Національна академія наук України
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору

Остапенко Артем Олексійович

УДК 532.5+519.63

МОДЕЛЮВАННЯ В'ЯЗКИХ ТЕЧІЙ МЕТОДОМ ГРАТКОВИХ РІВНЯНЬ БОЛЬЦМАНА ПРИ ПОМІРНИХ ТА ВЕЛИКИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Київ – 2020

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Державному вищому навчальному закладі «Приазовський державний технічний університет» Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Буланчук Галина Григорівна
Державний вищий навчальний заклад «Приазовський державний технічний університет», доцент кафедри вищої та прикладної математики.

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор,
Бомба Андрій Ярославович,
Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне,
Професор кафедри інформатики та прикладної математики;

кандидат технічних наук, старший науковий співробітник,
Каян Володимир Павлович,
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, м. Київ,
старший науковий співробітник відділу фізичного і математичного моделювання.

Захист відбудеться «___» ___________ 2020 року о ______ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.255.01 в Інституті телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України за адресою: 03186, м. Київ, Чоколівський бульвар, 13, кім. № 601.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України за адресою: 03186, м. Київ, Чоколівський бульвар, 13.

Автореферат розісланий «___» ________ 2020 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
кандидат технічних наук О. Г. Лебідь

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми дослідження. Методи обчислювальної гідродинаміки можуть бути класифіковані за принципом застосування в них різних підходів до опису суцільного середовища. При використанні підходу Ейлера вивчається зміна таких характеристик рідини, як швидкість і тиск у фіксованій точці простору з часом. Розрахункова область розбивається нерухомою сіткою, на якій відповідне диференційне рівняння (Ейлера або Нав'є - Стокса) дискретизується. До методів, що використовують ейлерів підхід, відносяться, наприклад, метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, метод скінченних об'ємів. При використанні підходу Лагранжа в кожен момент часу відстежується положення всіх частинок усередині розрахункової області. До методів, що базуються на лагранжевому підході, належать, наприклад, метод гідродинаміки згладжених частинок та дискретно-вихрові методи.

Широке поширення отримали гібридні методи, що поєднують в собі переваги підходів Ейлера та Лагранжа. Перший гібридний метод для розрахунку нестаціонарних задач гідродинаміки був розроблений в 1955 році в США - метод частинок в комірках Харлоу (PiC, від англ. Particle in Cell), побудований на основі рівняння Ейлера. Область розв'язку розбивається нерухомою ейлеровою сіткою на комірки, в яких знаходяться частинки. Суцільне середовище описується дискретною моделлю, як сукупність частинок фіксованої маси, які рухаються по комірках сітки. Метод частинок в комірках зручно застосовувати для дослідження динаміки багатокомпонентних течій і течій із вільними поверхнями. Однак у нього є два істотні недоліки. Перший пов'язаний із дискретним представленням суцільного середовища: можливі флуктуації – нерегулярність переміщення частинок. Другий недолік – високі вимоги до об'єму пам'яті і швидкодії комп'ютерів.

Розвитком методу частинок в комірках став метод крупних частинок, розроблений Давидовим Ю. М. та Білоцерківським О. М. в 1965 році, який усуває недоліки методу PiC, однак зберігає його сильні сторони. Обчислювальна область розбивається ейлеровою сіткою, комірки якої розглядаються як крупні частинки. Рух таких крупних частинок моделюється на основі нестаціонарної моделі Ейлера. Таким чином, метод займає проміжне місце між методом частинок в комірках Харлоу і класичними кінцево-різницевими методами. Метод крупних частинок дає можливість досліджувати обтікання тіл різної форми течіями ідеальної рідини від дозвукових до надзвукових швидкостей. Крім того, цей метод був розвинутий і для моделювання в'язких течій на основі рівняння Нав'є - Стокса, однак такі чисельні схеми не набули широкого застосування через появу нестійкості з ростом числа Рейнольдса. Надійні результати були отримані лише в діапазоні чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} < 10^3$.

Ще одним підходом у моделюванні динаміки рідини стала поява в 1973 році клітинно-автоматної гідродинаміки (LGA, від англ. Lattice Gas Cellular

Automata). Область розбивається сіткою, а всередині комірок розташовуються частинки. Частинки переміщуються в сусідні комірки і зіштовхуються в них за законами динаміки газів (рівняння Больцмана). Основними перевагами такої моделі є використання цілих значень, що виключає можливість накопичення помилок округлення, і можливість застосувати технології паралельних обчислень. Недоліком даного методу є сильний стохастичний шум, що з'являється при розрахунку густини, імпульсу і швидкості в окремих комірках. Як засіб усунення такого шуму був запропонований наступний метод: замість цілого числа частинок було введено поняття їх концентрації з використанням функції розподілу частинок за швидкостями і координатами із кінетичної теорії газів. Еволюція функції розподілу описується кінетичним рівнянням Больцмана. Такий підхід отримав назву методу граткових рівнянь Больцмана (LBM, від англ. Lattice Boltzmann Method).

Ідея методу LBM аналогічна ідеї методу крупних частинок Білоцерковського О. М. та Давидова Ю. М. Обчислювальна область розбивається сіткою, комірки якої трактуються як крупні частинки. Однак поведінка таких частинок описується не рівняннями Ейлера або Нав'є - Стокса, а кінетичним рівнянням Больцмана. А характеристики крупних частинок описуються статистично за допомогою функції розподілу частинок за координатами та швидкостями.

Останнім часом метод граткових рівнянь Больцмана набуває значного поширення. На сьогодні область застосування методу вже включає моделювання багатофазних і багатокомпонентних течій, мікротечій, течій із вільними границями, течій у пористих середовищах, моделювання теплопереносу. Однак, незважаючи на зростаючу популярність, ще існують такі проблеми:

1. Значний час розрахунків, що істотно збільшується зі зростанням числа Рейнольдса;

2. Умовна стійкість чисельної схеми.

Ці проблеми ускладнюють отримання чисельних розв'язків для течій із помірними числами Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 10^2$ та унеможливлюють моделювання при великих числах $\mathrm{Re} > 10^3$. Для їх часткового усунення при малих числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} \sim 10$) використовують, наприклад, схеми із декількома параметрами релаксації в інтегралі зіткнень частинок або неявні схеми. Проте вищенаведені проблеми до кінця не розв'язані і визначають актуальність теми дисертації, а також її наукове і практичне значення.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Роботи із зазначеної тематики виконувались в межах програми планових теоретичних досліджень, що здійснювались на кафедрі вищої та прикладної математики ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет» за замовленням Міністерства освіти і науки України: «Використання математичного моделювання для дослідження процесів у виробництві та економіці. Проблеми математичної освіти студентів у світлі нового закону про вищу освіту» (№ держреєстрації 0113U006283, 2016 р.); «Розв'язання задач виробництва з використанням методів прикладної математики. Методика викладання математики у вищій школі» (№ держреєстрації 0116U008777, 2017 р.); «Математичне моделювання в виробництві та економіці. Нові методи навчання математики» (№ держреєстрації 0118U006924, 2019 р.).

Мета і завдання дослідження. Метою цієї дисертаційної роботи є розвиток методу граткових рівнянь Больцмана для отримання стійких розв'язків за менший проміжок часу при моделюванні течій в'язкої рідини з помірними та великими числами Рейнольдса, а також створення програмно-моделюючої системи для комп'ютерного моделювання течій в'язкої рідини в областях довільних конфігурацій.

Реалізація поставленої мети визначається виконанням таких задач:

- вдосконалення алгоритму методу з метою підвищення його ефективності при моделюванні течій із помірними числами Рейнольдса;
- оптимізація алгоритму чисельного методу з метою підвищення швидкості розрахунків;
- вдосконалення чисельної моделі, що описує взаємодію рідини із твердими тілами;
- розробка методу регуляризації чисельного розв'язку з метою моделювання течій із великими числами Рейнольдса;
- створення програмно-моделюючої системи для моделювання в'язких течій методом граткових рівнянь Больцмана.

Об'єктом дослідження є течії, що виникають при обтіканні тіл різної форми в'язкою рідиною.

Предмет дослідження - метод граткових рівнянь Больцмана, за допомогою якого проводиться моделювання течій в'язкої рідини.

Методи дослідження. Представлені в дисертаційній роботі результати базуються на застосуванні вже існуючих чисельних підходів до моделювання гідродинамічних процесів та методів асимптотичного розв'язку кінетичних рівнянь, а також проведенні відповідних чисельних експериментів на основі вдосконалених алгоритмів і чисельних схем. У роботі використані сучасні технології, методи та підходи у програмуванні при створенні програмного забезпечення та технології паралельних обчислень. Верифікація отриманих чисельних розв'язків проводилась на основі існуючих результатів натурних та чисельних експериментів та за допомогою сучасних пакетів обчислювальної гідродинаміки.

Наукова новизна отриманих результатів. Розвинуто метод граткових рівнянь Больцмана для швидкого отримання стійких розв'язків при моделюванні течій в'язкої рідини з помірними та великими числами Рейнольдса. Основні положення, що визначають наукову новизну:

- вдосконалено алгоритм методу граткових рівнянь Больцмана, в якому в'язкість рідини задається через змінну граткову швидкість частинок та параметр релаксації;

– оптимізовано алгоритм методу за рахунок використання нової структури даних на етапі переміщення частинок у гратковому просторі;
– вдосконалено чисельну модель, що описує взаємодію рідини із твердими тілами;
– вперше розроблено метод регуляризації чисельного розв'язку рівняння Больцмана при моделюванні в'язких течій із великими числами Рейнольдса;
– створено програмно-моделюючу систему для моделювання в'язких течій методом граткових рівнянь Больцмана із можливістю завантаження довільних складних геометрій.

Обґрунтування і достовірність наукових положень, висновків, рекомендацій забезпечується відомими та перевіреними математичними моделями, коректністю постановок математичних задач та задовільним порівнянням результатів моделювання із відомими теоретичними результатами та даними інших чисельних експериментів, що відображені у наукових роботах інших авторів та отримані власноруч за допомогою сучасних пакетів обчислювальної гідродинаміки.

Наукове значення роботи. Результати роботи мають наукове значення для розвитку математичного моделювання течій в'язкої рідини та створення відповідних моделей, що будуються на основі кінетичного рівняння Больцмана.

Практичне значення отриманих результатів. Теоретичні та практичні результати дисертаційної роботи були використані при розробці держбюджетних програм (2016, 2017, 2019 рр.) кафедри вищої та прикладної математики факультету інформаційних технологій державного вищого навчального закладу «Приазовський державний технічний університет». Результати досліджень впроваджено у навчальний курс «Аналітичні та чисельні методи гідродинаміки» для студентів 5 курсу денної форми навчання спеціальності 113 – «Прикладна математика» кафедри вищої та прикладної математики ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет». А також у навчальний курс «Моделювання складних систем» для бакалаврів спеціальності 122 – «Комп'ютерні науки» кафедри комп'ютерних наук та вищої математики Донецького державного університету управління. Отримані відповідні довідки про впровадження результатів дисертаційного дослідження у навчальний процес та авторське свідоцтво на розроблену комп'ютерну програму (№ 89549 від 06.06.2019).

Особистий внесок. Всі результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Внесок здобувача в колективні роботи конкретизований у списку публікацій.

Апробація результатів дисертації. Основні положення та результати дисертаційного дослідження було обговорено та викладено в доповідях на наукових конференціях та науково-практичних заходах: Міжнародна науково-практична конференція «Університетська наука» (м. Маріуполь, 2014, 2015, 2016, 2017, 2019 р.); Міжнародний симпозіум «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (м. Суми, 2015 р., м. Харків, 2017 р., м. Одеса, 2019 р.); «Сучасні інформаційні технології, засоби автоматизації та електропривод» (м. Краматорськ, 2018 р.); «Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях» (м. Київ, 2018, 2019 р.); «Комп'ютерна інженерія і кібербезпека : досягнення та інновації» (м. Кропивницький, 2018 р.); «Computer Modeling and Intelligent Systems» (м. Запоріжжя, 2019 р.); «Математика у технічному університеті XXI сторіччя» (м. Краматорськ, 2019 р.). У повному обсязі робота доповідалась на науковому семінарі кафедри вищої та прикладної математики ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет» (м. Маріуполь, 2019 р.), на міжкафедральному науковому семінарі факультету інформаційних технологій ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет» (м. Маріуполь, 2019 р.).

Публікації. За результатами проведених досліджень опубліковано 20 робіт, в яких відображений основний зміст дисертації та етапи її підготовки. Із них: 1 стаття в журналі, що індексується наукометричною базою Scopus [5], 6 - в спеціалізованих виданнях, що входять до переліку видань, рекомендованих ВАК України [1-4, 6-7], 13 тез [8-20].

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаної літератури та 7 додатків. Робота містить 95 рисунків, 14 таблиць, список використаної літератури, що складається з 162 найменувань, викладених на 17 сторінках. Загальний обсяг дисертації – 182 сторінки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету дисертаційного дослідження, викладений короткий зміст дисертації та отриманих у ній результатів, визначено її наукову новизну та практичну цінність.

Перший розділ дисертації **«Моделювання динаміки рідини: класичні та кінетичні моделі»** присвячено огляду наукової літератури за темою досліджень. Розглянуті основні підходи при моделюванні динаміки рідини та етапи розвитку дискретних моделей рідини. Розглянуто основні елементи апарату кінетичної теорії газів, на базі яких будуються чисельні схеми методу LBM. Проведено аналіз існуючих наукових робіт з даної тематики. Розглянуті переваги, недоліки, етапи розвитку та перспективи методу граткових рівнянь Больцмана.

Визначення сучасного стану проблеми починається ще з робіт А. Нав'є та Д. Стокса, що заклали основи вчення про течію в'язкої рідини, зокрема рівняння та ряд точних розв'язків. Розвиток створених моделей в'язкої рідини відображено у працях О. Рейнольдса, У. Томсона з турбулентності, Л. Прандтля, Т. Кармана, К. Польгаузена, Л. І. Седова, Л. Г. Лойцянського, В. С. Авдуєвського, В. І. Івлева з теорії пограничного шару.

Важливу роль у становленні обчислювальної гідродинаміки відіграли роботи А. Тома, Д. Н. Алена та Р. В. Саусвелла з чисельного розв'язку задач гідродинаміки в'язкої рідини, що частково опиралися на роботи Е. Річардсона з чисельного дослідження диференційних рівнянь у частинних похідних.

Подальший розвиток обчислювальної техніки обумовив стрімкий ріст чисельних методів гідродинаміки, що нерозривно пов'язані із іменами таких видатних вчених як Д. Нейман, Ф. Харлоу, Б. Сполдинг, С. Патанкар, О. М. Белоцерковский, А. А. Самарський, С. К. Годунов.

Розвитком дискретних моделей рідини ми завдячуємо роботам із застосування клітинних автоматів у гідродинаміці (J. von Neumann, S. Wolfram, T. Toffolli, N. Margolus, U. Frish, B. Hasslacher, Y. Pomeau, D. Wolf-Gladrow). Сама цей підхід, разом із методами частинок у комірках Харлоу та методом крупних частинок О. М. Білоцеровсього та Ю. М. Давидова стали основою для розвитку методу граткових рівнянь Больцмана, розробленого італійськими вченими G. R. McNamara, F. J. Higuera, S. Succi у 1988 році (рис. 1).

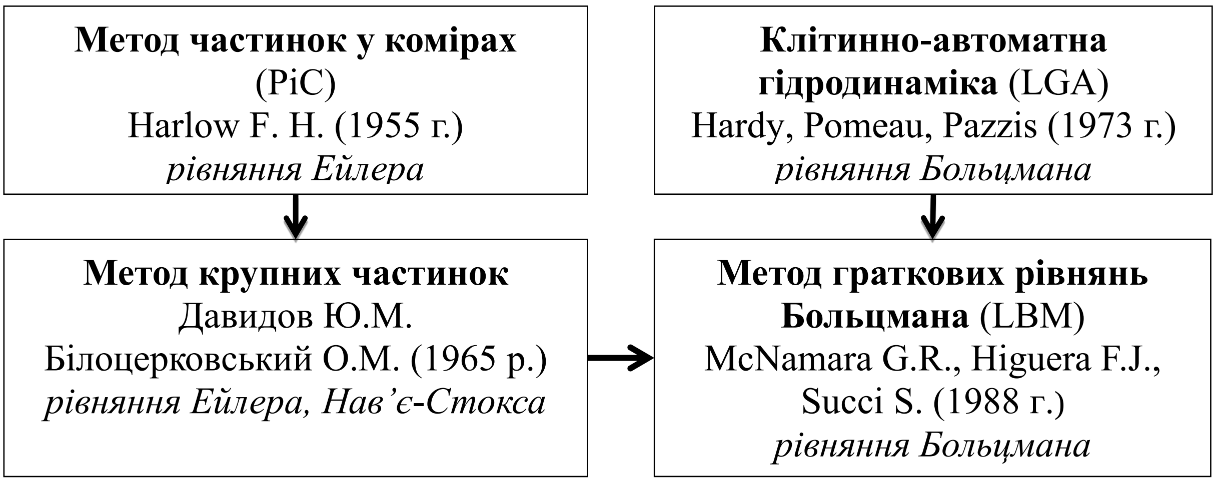


Рис. 1. Схема розвитку методу граткових рівнянь Больцмана

На сьогодні метод граткових рівнянь Больцмана набуває все більшого поширення. Велика частина робіт, присвячених розвитку цього методу, належить вченим із країн Європи та Америки: S. Succi, F. Higuera, Y. L. He, Q. Li, Q. Chen, J. Latt, Q. Liu, K. H. Luo, A. Perumal, V. S. Kumar, A. K. Dass, D. Wolf - Gladrow та іншим, а також невеликій групі вчених із Росії, серед яких: А. Л. Куперштох, Г. В. Кривовичев, Д. А. Бікулов, Д. С. Сенін. В Україні застосування методу до моделювання мікротечій викладено в роботах Тирінова И. І., Авраменка А. А., Басок Б. І. та Давиденка Б. В. Зростаюча популярність методу обумовлена низкою його переваг:

- всі етапи моделювання описуються лінійними рівняннями;
- граничні умови задаються у вигляді простих механічних правил, що описують взаємодію частинок за законами кінетичної теорії;
- моделювання течій можна проводити в областях довільної складної геометрії;

- використовується явна схема врахування впливу зовнішніх сил та обчислення тиску;
- до алгоритму легко застосовуються технологій паралельних обчислень;
- можна розв'язувати широкий клас задач, зокрема проводити мультифізичне моделювання.

Метод граткових рівнянь Больцмана є ефективним при моделюванні багатофазових, багатокомпонентних течій та течій у пористих середовищах за малими числами Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 10$. Однак при моделюванні течій із помірними числами Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 10^2$ виникають проблеми із збільшення часу моделювання та нестійкістю чисельних схем.

Аналіз результатів першого розділу дав змогу *сформулювати задачу дисертаційного дослідження:* розвинути метод граткових рівнянь Больцмана для отримання стійких розв'язків за менший проміжок часу при моделюванні течій в'язкої рідини з помірними та великими числами Рейнольдса. Основні результати розділу опубліковано в роботах [1, 2].

У другому розділі **«Метод граткових рівнянь Больцмана»** докладно описується досліджуваний метод: його стан і можливості, чисельні схеми, стійкість, обґрунтування та програмна реалізація.

Постановка задачі для моделювання течій в'язкої ізотермічної нестисливої рідини за відсутності зовнішніх сил складається із рівняння руху Нав'є-Стокса, рівняння нерозривності, відповідних початкових та граничних умов:

$$\frac{\partial \vec{u}\left(\vec{r},t\right)}{\partial t} + \left(\vec{u}\left(\vec{r},t\right)\cdot\nabla\right)\vec{u}\left(\vec{r},t\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla p\left(\vec{r},t\right) + \nu\Delta\vec{u}\left(\vec{r},t\right) \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = 0 \tag{2}$$

$$\left.\vec{u}\left(\vec{r},t\right)\right|_{t=t_0} = \vec{u}\left(\vec{r},t_0\right) \tag{3}$$

$$\left.\vec{u}\left(\vec{r},t\right)\right|_{\vec{r}\in L} = 0 \tag{4}$$

$$\left.\vec{u}\left(\vec{r},t\right)\right|_{\left|\vec{r}\right|\to\infty} = \overrightarrow{u_\infty} \tag{5}$$

де $\vec{u}$ – вектор швидкості рідини; $\vec{r}$ – радіус-вектор точки простору; ρ – густина; p – поле тиску; ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості; t_0 – початковий момент часу; L – контур обтічного тіла.

Рівняння (1) та (2), початкові та граничні умови (3)-(5) описують динаміку рідини на макроскопічному рівні абстракції. Розкривається сутність мезоскопічного рівня абстракції в описі рідини. Обчислювальна область розбивається на деякі малі області, що складаються з великої кількості частинок. Кожна така мала область розглядається як крупна частинка, характеристики якої відповідають усередненим характеристикам усієї сукупності. Такі великі частинки описуються статистично за допомогою апарату кінетичної теорії газів через функцію розподілу частинок за координатами і швидкостями $f\left(\vec{r},\vec{\upsilon},t\right)$, що є розв'язком рівняння Больцмана.

Отже на мезоскопічному рівні абстракції динаміка крупних частинок моделюється кінетичним рівнянням Больцмана таким чином, щоб на макроскопічному рівні виконувалися рівняння (1)-(5).

Математична модель складається із рівняння Больцмана (6), у якому інтеграл зіткнення частинок заміняється наближенням Бхатнагара-Гросса-Крука (7), що будується за законами збереження маси, імпульсу та енергії:

$$\partial_t f + \vec{\upsilon}\partial_x f + \frac{\vec{F}}{m}\partial_\upsilon f = \int\left|\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2\right|\left(f_1^{'} f_2^{'} - f_1 f_2\right) d\sigma d\vec{\upsilon}_2 \tag{6}$$

$$I_{coll} = \int\left|\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2\right|\left(f_1^{'} f_2^{'} - f_1 f_2\right) d\sigma d\vec{\upsilon}_2 \approx \frac{f^{eq} - f}{\tau} \tag{7}$$

Чисельна модель – система граткових рівнянь (8), отримується шляхом дискретизації рівняння (6) та інтегралу (7) із урахуванням відсутності зовнішніх сил $\vec{F} \equiv 0$.

$$\underbrace{f_k(\vec{r} + \vec{V}_k\Delta t, t + \Delta t) = f_k(\vec{r},t)}_{\text{переміщення}} - \underbrace{\frac{1}{\tau}[f_k(\vec{r},t) - f_k^{eq}(\vec{r},t)]}_{\text{зіткнення}} \tag{8}$$

де $f_k(\vec{r},t)$ – дискретна функція розподілу частинок за швидкостями;

$\vec{V}_k$ – дискретний набір швидкостей частинок;

Δt – крок за часом;

τ – безрозмірний параметр релаксації;

$f_k^{eq}(\vec{r},t)$ – дискретне наближення локальної рівноважної функції розподілу Максвела-Больцмана.

Обґрунтування того, що метод граткових рівнянь Больцмана може застосовуватись для моделювання в'язких течій викладено в роботі X. He та L. Luo. Показано, що в ході розкладу рівнянь (8) за методом Чепмена-Енського можна отримати рівняння Нав'є-Стокса та рівняння нерозривності для нестисливої ізотермічної рідини (9) та формули, що пов'язують макроскопічні параметри рідини та граткові параметри методу (10)-(13).

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}\cdot\nabla\right)\vec{u} = -\nabla p + \nu\Delta\vec{u} + o(\Delta t) + o(M_p^2);\;\; \nabla\cdot\vec{u} = 0 + o(\Delta t) + o(M_p). \tag{9}$$

Кінематична в'язкість рідини	$\nu = c_s^{\,2}\Delta t\left(\tau - 0,5\right)$	(10)
«Швидкість звуку» в комірці	$c_s = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$	(11)
Граткова швидкість частинок	$c = \dfrac{d}{\Delta t}$, де d – розмір комірки	(12)

Граткове число Маха $$M_p = \frac{U_{\max}}{c_s}, \text{ де } U_{\max} \text{ – максимальна швидкість рідини в області} \quad (13)$$

Стійкість чисельної схеми методу LBM досліджувалась аналітично Scordos P., X. He, L. Luo, D. Wolf-Gladrow, А. Л. Куперштох та іншими. В цих роботах доведено, що метод є умовно стійким за параметром релаксації та значеннями швидкості, та збігається до рівнянь Нав’є-Стокса та нерозривності (1), (2) при малих величинах кроку по часу та граткового числа Маха (13). Нестійкість чисельного розв’язку може бути викликана одним із факторів:

– збільшення граткового числа Маха. Кінетичне рівняння Больцмана апроксимує рівняння Нав’є-Стокса тільки з малими числами Маха $M_p < 0{,}3$;

– зменшення параметра релаксації. «Безпечним» значенням (за S. Sucop) є $\tau = 1$. Зменшення τ викликає нестійкість: частинки скупчуються у деяких комірках, що приводить до виникнення пульсацій у полі швидкостей (рис. 2);

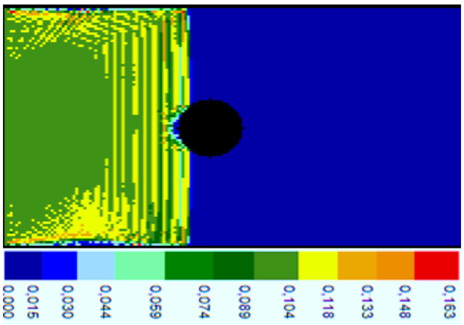


Рис. 2. Пульсації у полі швидкостей (Re = *1000*)

– збільшення швидкості. Чисельна модель передбачає моделювання течій лише з малими швидкостями $U_{\max} < c_s$.

– зростання числа Рейнольдса. Із збільшенням числа Рейнольдса $\mathrm{Re} > 10^3$ течії стають турбулентними (згідно досліджень Г. Шліхтинга, Л. Г. Лойцянського).

Макроскопічні параметри рідини: густина, швидкість та тиск визначаються як моменти функції розподілу відповідно до формул:

$$\rho\left(\vec{r},t\right) = \sum_{k=0}^{8} f_k\left(\vec{r},t\right); \;\; \vec{u}\left(\vec{r},t\right) = \frac{1}{\rho\left(\vec{r},t\right)} \sum_{k=0}^{8} \vec{V}_k f_k\left(\vec{r},t\right); \;\; p\left(\vec{r},t\right) = c_s^2 \rho\left(\vec{r},t\right) \quad (14)$$

Сукупність векторів можливих напрямків переміщення частинок $\left\{\vec{e}_k\right\}_{k=1}^{n}$ визначає модель решітки. Модель решітки визначається таким чином, щоб забезпечити ізотропність відповідних тензорів 4-го та 6-го порядків та виконання закону збереження моменту імпульсу. В роботі докладно описані чисельні схеми для розв’язку двовимірних задач на основі моделі решітки з дев’ятьма можливими напрямками переміщення частинок (D2Q9).

Класична схема методу передбачає одиничну граткову швидкість частинок $c = 1$ і фіксовану «швидкість звуку» в комірці $c_s = 1/\sqrt{3}$. При цьому задання розмірності розрахункової сітки однозначно визначає в’язкість рідини або навпаки. В’язкість рідини ν також визначається BGK-оператором зіткнення частинок за допомогою параметра релаксації τ, фізичним змістом якого є швидкість встановлення рівноваги в гідродинамічній системі. Проте зазвичай його покладають $\tau = 1$ через можливу нестійкість методу. Недоліком такого підходу є досить вузькі межі застосування, оскільки зменшення в'язкості вимагає істотного подрібнення розрахункової сітки.

Класична схема

1. Задається в'язкість рідини ν або розмір комірки d.
   $d = \Delta t;\ c = 1;\ c_s = 1/\sqrt{3};\tau = 1.$
2. Обчислюється або d або ν відповідно до формули (5).
3. Обчислюється $M_p = \sqrt{3} \cdot U_{\max}$.

Модифікована схема

1. Задається розмір комірки d, в'язкість рідини ν та параметр релаксації τ.
2. Обчислюється $\Delta t = d^2(\tau - 0{,}5)/(3\nu)$.
3. Обчислюються
   $c = \dfrac{d}{\Delta t};\ c_s = \dfrac{c}{\sqrt{3}};M_p = \dfrac{U_{\max}}{c_s}.$

У дисертаційній роботі вдосконалено алгоритм методу граткових рівнянь Больцмана, в якому в'язкість рідини визначається через змінну граткову швидкість частинок та параметр релаксації. Перевагами такого підходу є:

– можливість як через зміну розміру комірки так і через зміну параметра релаксації варіювати граткове число Маха, що впливає на точність та стійкість розв'язків;
– можливість пришвидшити розрахунки за рахунок зменшення параметра релаксації.

Аналогічно до методу частинок в комірках Харлоу та методу крупних частинок Білоцерковського О. М. та Давидова Ю. М., проводиться розщеплення рівняння (5) за методом Яненко – розщеплення за фізичними процесами. Один крок за часом розкладається на три етапи (рис. 3): зіткнення крупних частинок, їх переміщення та перехід від мезоскопічного рівня до макроскопічних параметрів рідини (густини ρ, швидкості $\vec{u}$ і тиску p) за формулами (14).

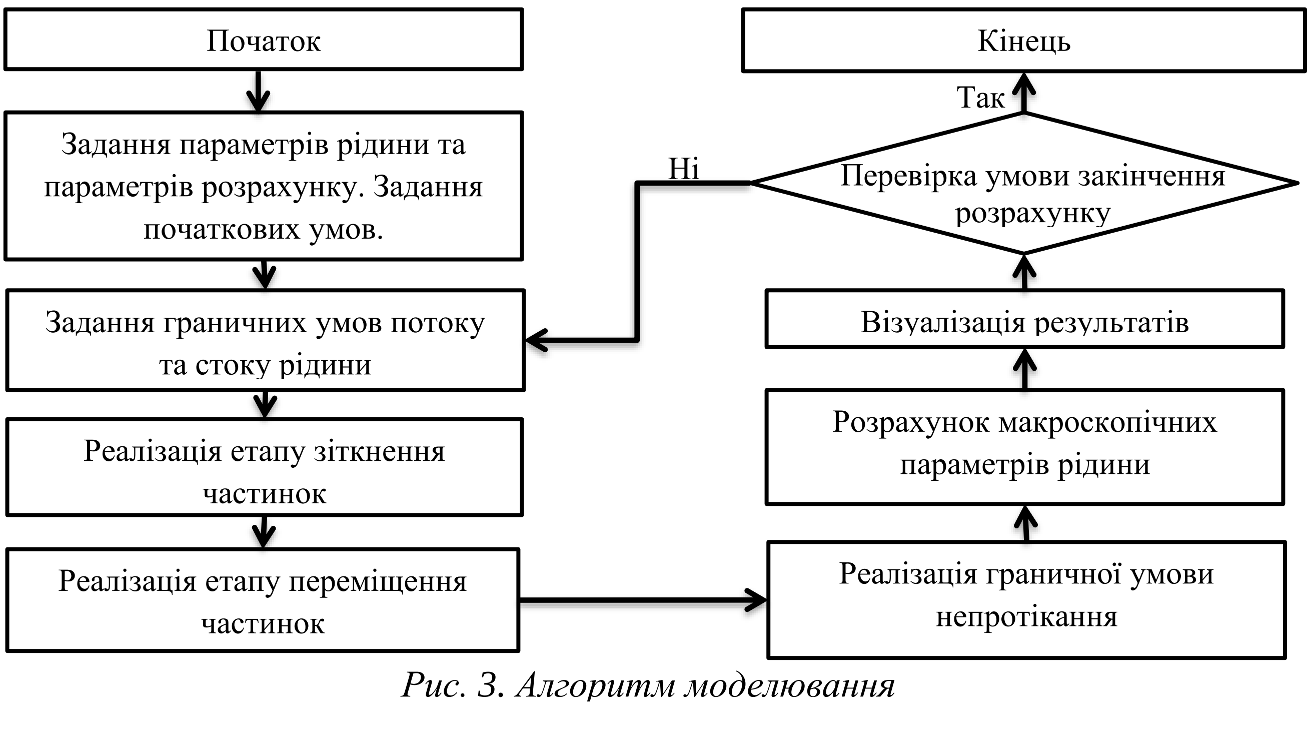


Рис. 3. Алгоритм моделювання

Особливістю застосування кінетичного підходу до моделювання течій є необхідність створення структури даних, що зберігає інформацію про кожну крупну частинку. При дискретизації розрахункової області, кожна квадратна комірка є крупною мезоскопічною частинкою, що містить дев’ять значень функції розподілу $f_k, k = \overline{0,8}$ (для D2Q9 моделі). Кожне значення функції розподілу є тією частиною мікроскопічних частинок, що мають одну з швидкостей $\overrightarrow{V_k}$. Таким чином, перехід від мезоскопічного рівня до мікроскопічного призводить до трансформування розрахункової сітки розмірності $M \times N$ у розрахунковий куб розмірності $M \times N \times 9$ (рис. 4).

Кожен із дев’яти шарів куба відповідає одному з напрямків переміщення частинок $\overrightarrow{e_k}, k = \overline{0,8}$. Недоліком такого підходу є значний час моделювання етапу переміщення частинок при великій кількості комірок розрахункової сітки.

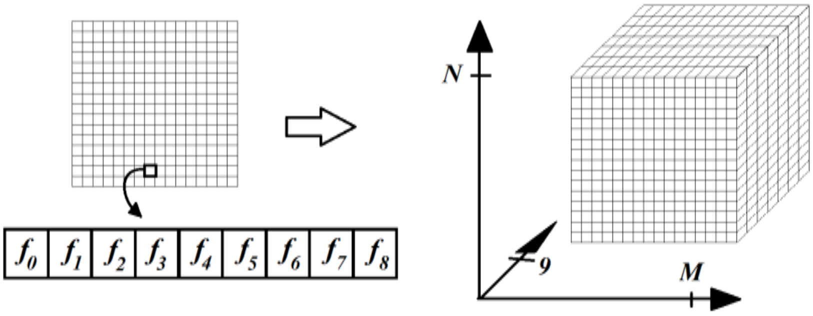


Рис. 4. Розрахунковий куб у моделі D2Q9

Оптимізовано чисельний алгоритм на етапі переміщення частинок шляхом трансформації розрахункової сітки у сферу даних – абстрактний тип даних, в якому немає граничних комірок (рис. 5). Визначення індексу комірки відбувається відносно початкової точки відліку, а зсув усіх даних у сфері реалізується лише за рахунок зміщення однієї точки відліку.

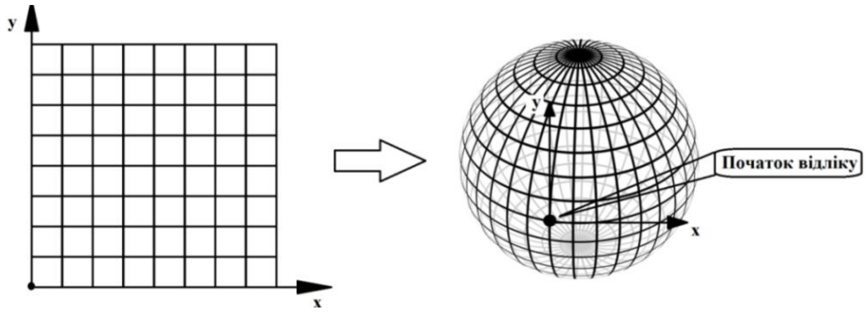


Рис. 5. Сфера даних

Таким чином, замість куба, що складається з дев’яти шарів розрахункової області, розглядається дев’ять сфер даних, що дозволяє проводити етап переміщення частинок за мінімально можливий час.

Алгоритм методу LBM складається з ряду локальних операцій у комірках розрахункової сітки. Винятком є етап переміщення частинок, що застосовується до всіх комірок. Успішна оптимізація етапу переміщення частинок і розпаралелювання етапу зіткнення частинок на CPU з використанням технології OpenMP дала можливість збільшити швидкість розрахунків приблизно в 3-4 рази.

Розроблені в другому розділі чисельні схеми стали основою для всіх подальших досліджень та обчислень. Основні результати цього розділу були опубліковані в роботах [1, 2, 5, 8, 10, 12].

У третьому розділі дисертації **«Початкові та граничні умови»** досліджені методи задання початкових і граничних умов для низки прикладних задач. Розглянуті циклічні граничні умови (рис. 6 *а*), умови прилипання (рис. 6 *б*), рухомої стінки, витоку і стоку рідини, граничні умови в задачі про обертання кругового циліндра.

Показано, що при використанні сфери даних, як структури, що зберігає значення функції розподілу частинок, циклічні граничні умови задаються автоматично без введення додаткових чисельних схем.

Детально розглянуті чисельні схеми для реалізації умови прилипання. У LBM ця умова зазвичай задається за допомогою схеми зворотного відображення (рис. 6 *б*). У цьому випадку частинки, що виходять за лінію розділу твердого та рідкого середовищ, відбиваються від неї у протилежному напрямку і на наступному кроці повертаються назад у потік.

Математично схема відображення має вигляд:

$$f_{\bar{k}}(\vec{r},t) = f_k(\vec{r},t), \vec{r} \in \Omega \tag{15}$$

де Ω – область, що не містить рідини;

$\bar{k}$ – протилежний до k напрямок вектора.

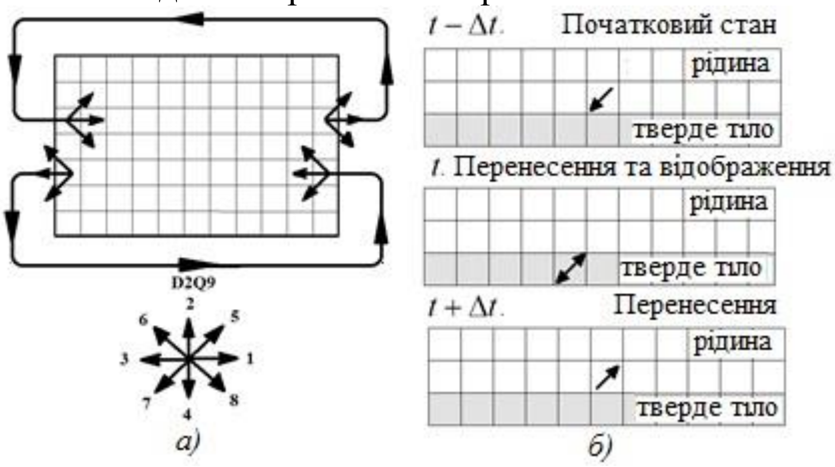


Рис. 6. Схеми реалізації граничних умов
а) циклічні граничні умови б) умова прилипання

Недоліком такого підходу є поява пульсацій швидкостей поблизу границь обтічного тіла. Для усунення цього недоліку схема зворотного відображення частинок доповнена схемою миттєвого дзеркального відображення. При цьому, по-перше, частинки, що виходять за лінію розділу середовищ, миттєво від неї віддзеркалюються, а, по-друге, в комірках твердого тіла реалізується умова прилипання.

Схема миттєвого дзеркального відображення частинок показана на рис. 7 на прикладі відображення від правої твердої границі.

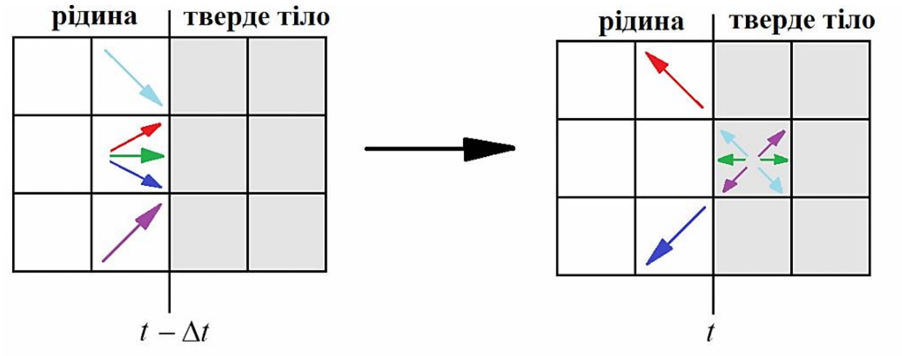


Рис. 7. Схема миттєвого дзеркального відображення

Доповнена схема граничної умови прилипання дозволяє більш точно моделювати поведінку частинок біля границі, оскільки відбувається плавна зміна швидкості від її значення біля тіла обтікання до нуля на стінках тіла. Частинки в граничному шарі повертаються в потік на тому ж часовому кроці.

Результати третього розділу викладені в роботах [2, 4, 5, 7, 11].

У четвертому розділі дисертації **«Програмно-моделююча система на основі методу граткових рівнянь Больцмана»** представлено програмно-моделюючу систему, що була створена у MS Visual Community 2015 на мові програмування C++ із застосуванням технології паралельних обчислень на центральному процесорі OpenMP. Моделювання в'язких течій проводиться за розвинутим алгоритмом методу граткових рівнянь Больцмана. Інтерфейс програми показаний на рис. 8.

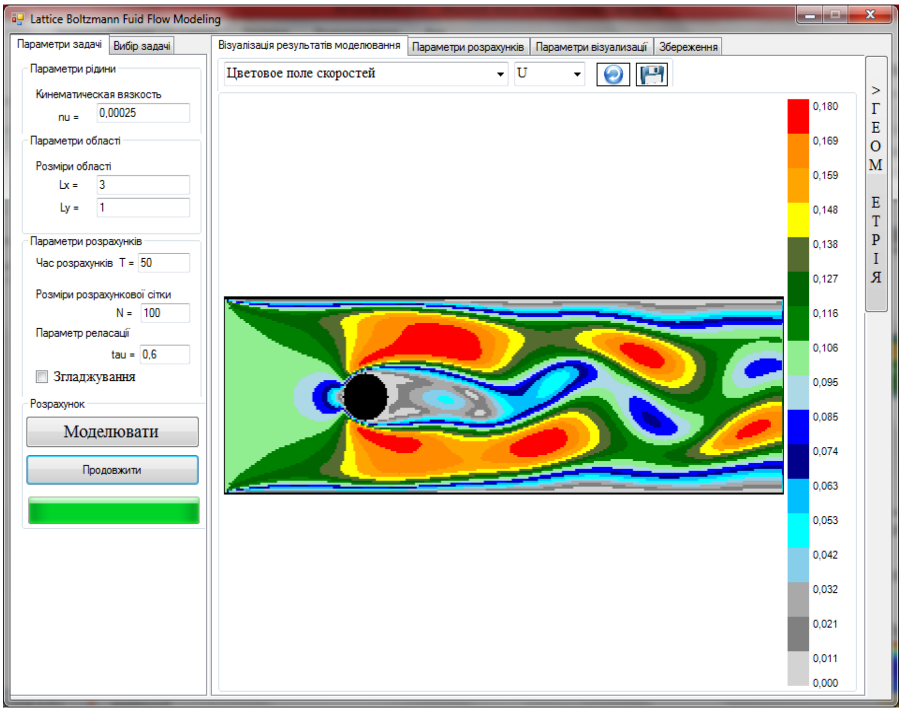
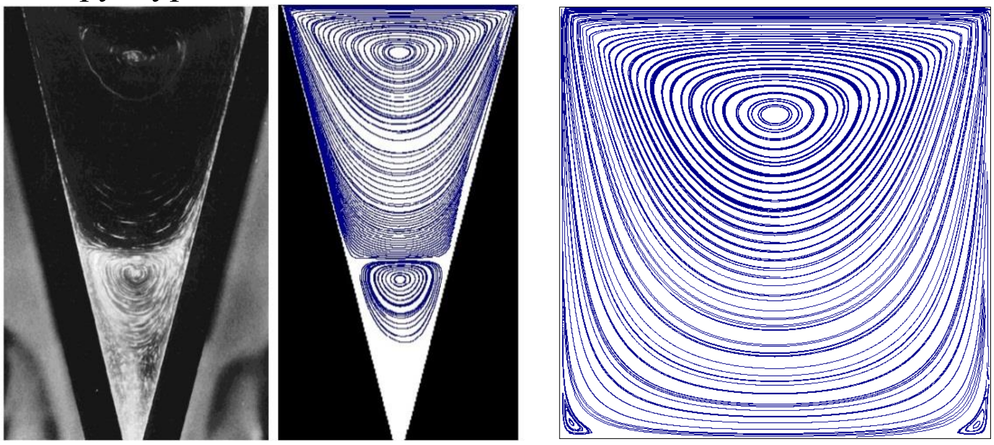


Рис. 8. Інтерфейс програми

Функціонал програми включає в себе задання параметрів течії та параметрів моделювання, побудову стандартних або завантаження довільних геометрій та представлення результатів моделювання у вигляді діаграм розподілу модуля швидкості, компонент швидкості, тиску, ліній течії, а також у вигляді табличних значень модуля швидкості, компонент швидкості, коефіцієнтів лобового опору, підйомної сили та тиску обтічних тіл. Передбачено можливість дослідження течії в довільних перерізах.

Для тестування чисельних схем спочатку були розв'язані класичні задачі: задача про течію рідини у каверні, течію Пуазейля у плоскому каналі та обтікання циліндрів різних форм у плоскому каналі. Спершу проведено моделювання течії в'язкої рідини у кавернах клиновидної та квадратної форм при малих числах Рейнольдса $\mathrm{Re} < 1$. В обох випадках виявлені перші два вихори із теоретично нескінченної послідовності вихорів Моффата (рис. 9). Картини течії порівнювалися з результатами експерименту, представленому в альбомі Ван Дайка і свідчать про можливість моделювання тонких вихрових структур методом LBM.



а) б) в)

Рис. 9. Лінії течії у каверні при $\mathrm{Re} = 0{,}17$

а) течія у клині – натурний експеримент M. Van Dyke б) течія у клині - моделювання LBM в) течія у квадратній каверні - моделювання LBM

Досліджено вплив параметрів методу на стійкість та точність розв'язків на прикладних задачах. На прикладі моделювання течії у квадратній каверні у діапазоні чисел Рейнольдса від $\mathrm{Re} = 120$ до $\mathrm{Re} = 2160$ проведено дослідження із визначення впливу граткового числа Маха M_p на точність чисельних розв'язків. Результати моделювання методом граткових рівнянь Больцмана (LBM) порівнювалися із відповідними результатами, отриманими у пакеті Comsol Multiphysics методом скінчених елементів (FEM) (рис. 10).

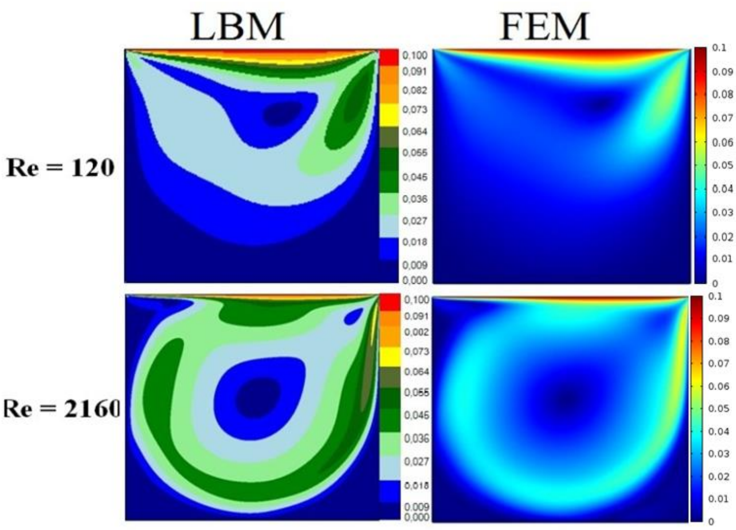


Рис. 10. Діаграми розподілу модуля швидкості у каверні

На рис. 11 представлені графіки порівняння значень швидкості у вертикальному перерізі каверни при різних числах Рейнольдса і значень граткового числа Маха M_p.

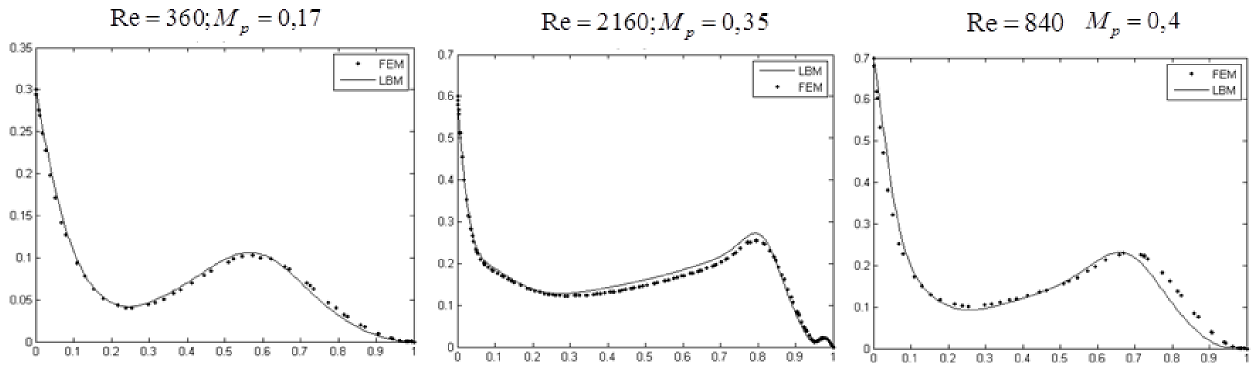


Рис. 11. Порівняння значень модуля швидкості в перерізі каверни X=0,75 при різних граткових числах Маха і різних числах Рейнольдса

У результаті визначено, що для отримання чисельного розв'язку із відносною похибкою менше 10% граткове число Маха повинно бути $M_p < 0{,}3$. Аналогічні висновки зроблені і при моделюванні течії Пуазейля у плоскому каналі.

Проведено дослідження щодо меж застосування розвинутого та класичного алгоритмів (на основі скрипта, написаного phD університета Женеви J. Latt у пакеті MatLab). Рисунок 12 ілюструє моделювання течії при Re = 300 за класичною схемою методу в момент часу t = 2. На рисунку видно початок збурень, що виникають зліва на вході рідини в область. Далі розв'язок розбігається. При таких же числах Рейнольдса вдалося отримати стійкий розв'язок модифікованою схемою (рис. 13).

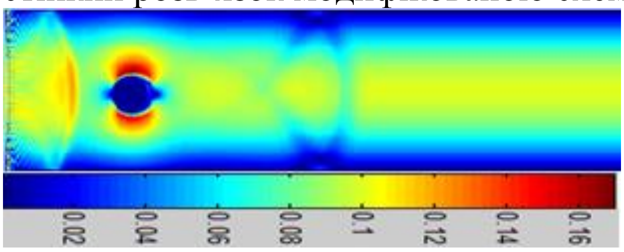


Рис. 12. Діаграма розподілу модуля швидкості при Re = *300 (класичний алгоритм LBM), t = 2*

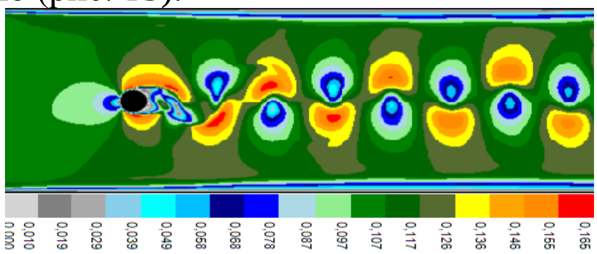
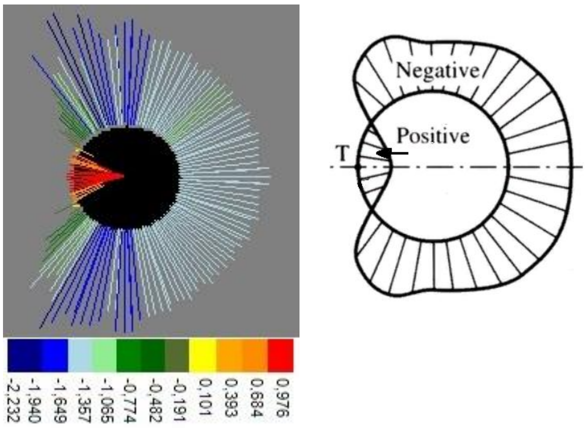


Рис. 13. Діаграма розподілу модуля швидкості при Re = *300 (модифікований алгоритм), t = 100*

Дослідження стійких розв'язків, що отримані розвиненим алгоритмом LBM показало узгодженість результатів моделювання із аналогічними результатами відомих натурних та чисельних експериментів. Зокрема розглянуті розподіл коефіцієнта тиску C_p по поверхні циліндра (рис. 14), графіки зміни коефіцієнтів лобового опору C_d та підйомної сили C_l з часом та їх середні значення $<C_d>, <C_l>$ (рис. 15).



а) б)

Рис. 14. Розподіл коефіцієнта тиску для кругового циліндра при Re = 300 а) кольорові лінії епюри - метод LBM б) теоретична епюра

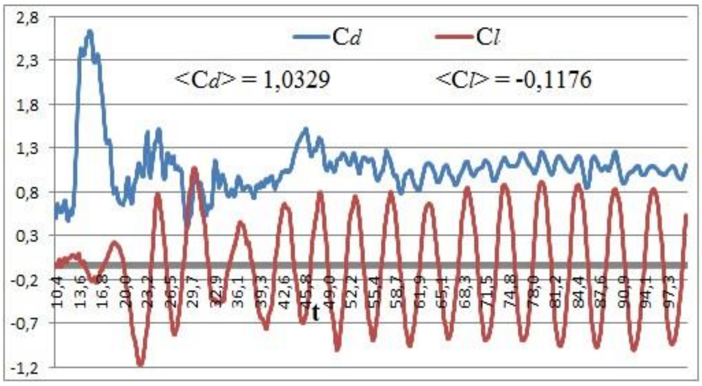


Рис. 15. Графіки зміни коефіцієнтів лобового опору та підйомної сили з часом для кругового циліндра при Re = 300

Модифікована схема методу відкриває додаткові можливості для варіювання параметром релаксації, який через нестійкість зазвичай покладають $\tau = 1$. Проведено дослідження впливу параметра релаксації на необхідну кількість комірок на одиницю довжини області N, час моделювання та точність чисельного розв'язку на прикладі обтікання кругового циліндра у плоскому каналі із числом Рейнольдса $\mathrm{Re} = 100$. Досліджувалися характер течії, значення коефіцієнтів лобового опору циліндра і час моделювання з різними числами Рейнольдса. Отримані результати порівнювалися із відомими експериментальними даними (Tritton D. J.) та даними інших чисельних розв'язків (Calhoun D. A.). Результати цього дослідження зібрані у таблиці 1.

Табл. 1. Результати моделювання обтікання кругового циліндра з числом Рейнольдса Re = 100 при різних параметрах релаксації

	N	*Cd*	Відносна похибка (за Tritton D. J.),%	Час моделювання
LBM, τ = 0,75	500	1,1865	4,3	14 ч 42 хв
LBM, τ = 0,6	300	1,1929	3,8	9 год 39 хв
LBM, τ = 0,55	200	1,1922	3,8	2 год 15 хв
LBM, τ = 0,535	100	1,1833	4,6	23 хв
FEM, Comsol	100	1,2875	3,8	19 хв
Експеримент (Tritton D. J.)	-	1,24	-	-
Моделювання (Calhoun D. A.)	-	1,33	-	-

Результати дослідження показали, що зменшення параметра релаксації дозволяє зменшити кількість комірок на одиницю довжини розрахункової області і, таким чином, істотно зменшити час моделювання. Нижньою границею параметра релаксації, при якому розв'язок залишається стійким для задачі про обтікання кругового циліндра, є $\tau = 0{,}535$.

Тестування результатів моделювання модифікованим алгоритмом LBM проводилося у діапазоні чисел Рейнольдса $100 \le \mathrm{Re} \le 1000$. При цьому, через те, що параметр релаксації не може бути менше $\tau = 0{,}535$, то збільшення числа Рейнольдса вимагає за собою подрібнення розрахункової сітки. Лінії течії, що відповідають процесу формування вихрової доріжки із числом Рейнольдса Re = 1000 ілюстровані на рис. 16 у момент часу $t = 30$. Подальший розвиток вихрової доріжки відповідає переходу течії від ламінарної до турбулентної, структурованість течії з часом зникає. Чисельний розв'язок у цьому випадку розбігається. Це означає, що модифікований алгоритм методу дозволяє розв'язувати задачі обтікання із великими числами Рейнольдса, але вимагає внесення змін у чисельну схему.

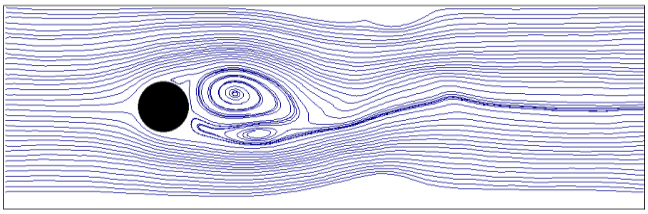


Рис. 16. Лінії течії при Re = *1000 (модифікований алгоритм)*, t = *30*

Основні результати четвертого розділу, що показують розширення меж застосування методу LBM на порядок: від малих чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 10$ до помірних $\mathrm{Re} \sim 10^2$ опубліковані в роботах [1-4, 5, 9-12].

У п'ятому розділі дисертації **«Регуляризація чисельних розв'язків. Чисельні експерименти»** показані результати моделювання течій із великими числами Рейнольдса $\mathrm{Re} > 10^3$. Для розв'язку задач із великими числами Рейнольдса запропоновано метод регуляризації чисельного розв'язку. Методи регуляризації застосовуються при виникненні пульсацій різного походження при розв'язку рівнянь переносу, теплопровідності, рівняння Больцмана для моделювання газової динаміки та плазми (А. Т. Федорченко, І. Н. Ларіна та ін.).

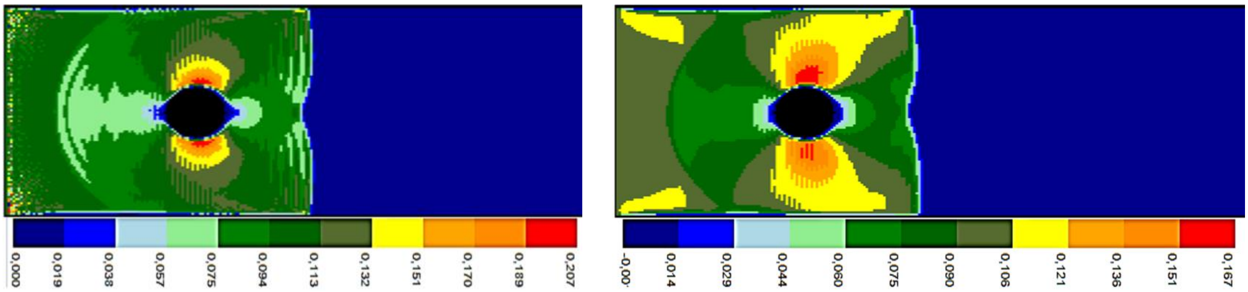
Для моделювання течії в'язкої рідини була використана схема, аналогічна схемі згладжування А. Л. Чудова. Метод базується на корекції значення функції в точці простору відповідно до сусідніх значень. В основу такої корекції була закладена медіанна фільтрація (16).

$$u_x(i,j) = med(u_x(i,j-2), u_x(i,j-1), u_x(i,j), u_x(i,j+1), u_x(i,j+2)) \qquad (16)$$

Особливістю медіанного фільтра є нелінійність. Після згладжування зберігаються різкі границі областей розв'язку. Водночас при цьому, ефективно пригнічуються некорельовані або слабокорельовані перешкоди, зменшуються аномальні викиди та згладжуються пульсації (рис. 17). Після згладжування поля швидкостей, функції розподілу частинок перераховуються за локальною рівноважною функцією розподілу Максвелла-Больцмана.

Рис. 17. Схема згладжування розв'язку

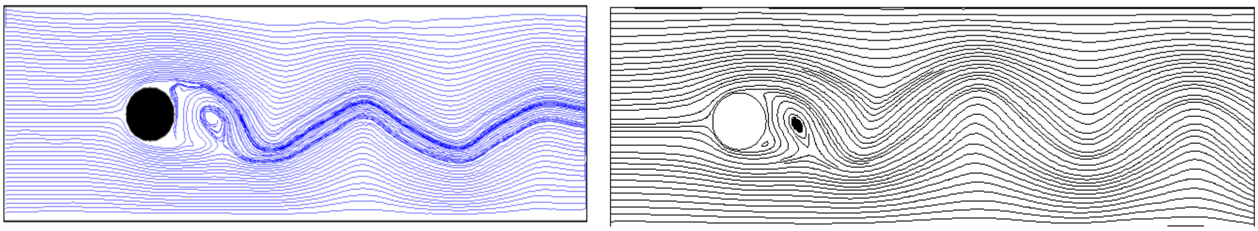
Схема згладжування протестована на класичній тестовій задачі про обтікання кругового циліндра в діапазоні чисел Рейнольдса $500 \le \mathrm{Re} \le 20000$. Порівняння діаграм розподілу модуля швидкості, що були отримані алгоритмами зі згладжуванням та без нього при $\mathrm{Re} = 500$ у момент часу $t = 2{,}5$ показано на рис. 18.



а *б*

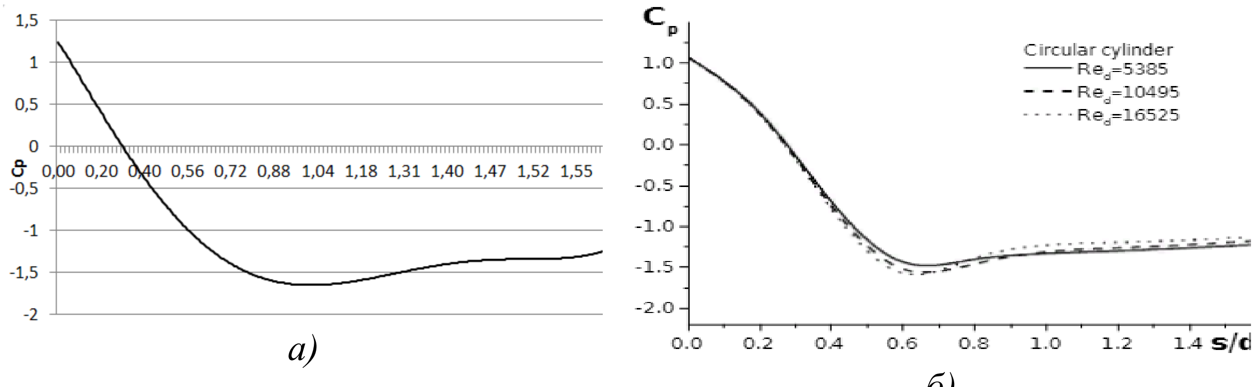
Рис. 18. Порівняння діаграм модуля швидкості при Re = 500
а) без згладжування б) зі згладжуванням

На рис. 18 *а* видно початок збурень – подальший чисельний розв'язок розбігається. Порівняння стійких розв'язків, що були отримані методом граткових рівнянь Больцмана зі згладжуванням проведено для чисел Рейнольдса в діапазоні $500 \le \mathrm{Re} \le 20000$. Порівнювалися діаграми розподілу модуля швидкості, профілі швидкості у перерізах, лінії течії (рис. 19), графіки розподілу коефіцієнта тиску C_p (рис. 20) та середні значення коефіцієнтів лобового опору $< C_d > = 1{,}125$ та підйомної сили $< C_l > = 0{,}08$.



а *б*

Рис. 19. Порівняння ліній течії при Re = 20000, t = 50
а) метод граткових рівнянь Больцмана зі згладжуванням б) метод скінченних елементів



а) *б)*

Рис. 20. Порівняння графіків розподілу коефіцієнта тиску по верхній поверхні кругового циліндра при Re = 20000 а) метод граткових рівнянь Больцмана зі згладжуванням б) натурний експеримент

Порівняння чисельних розв’язків із застосуванням запропонованого методу регуляризації на класичній задачі про обтікання кругового циліндра показало узгодженість результатів моделювання із результатами інших чисельних розв’язків у діапазоні чисел Рейнольдса $500 \le \mathrm{Re} \le 20000$. Саме тому цей метод був використаний при розв’язку інших прикладних задач.

На сьогодні одним із перспективних напрямків досліджень по всьому світі є створення мініатюрних літальних апаратів (МЛА). Серед типів МЛА виділяють дрони із гвинтовим двигуном. Політ таких дронів відбувається при числах Рейнольдса у діапазоні $10^3 \le \mathrm{Re} \le 10^5$. Характер течій у цьому діапазоні принципово відрізняється від більш вивченого діапазону $\mathrm{Re} > 10^6$, при яких аеродинамічні характеристики слабо залежать від числа Рейнольдса. Тому проектування мініатюрних літальних апаратів вимагає детального вивчення таких течій.

Проведено комп’ютерне моделювання обтікання профілю Nasa 0012 при різних кутах атаки течією в’язкої рідини при числі Рейнольдса $\mathrm{Re} = 10^4$. Лінії течії зображені на рис. 21.

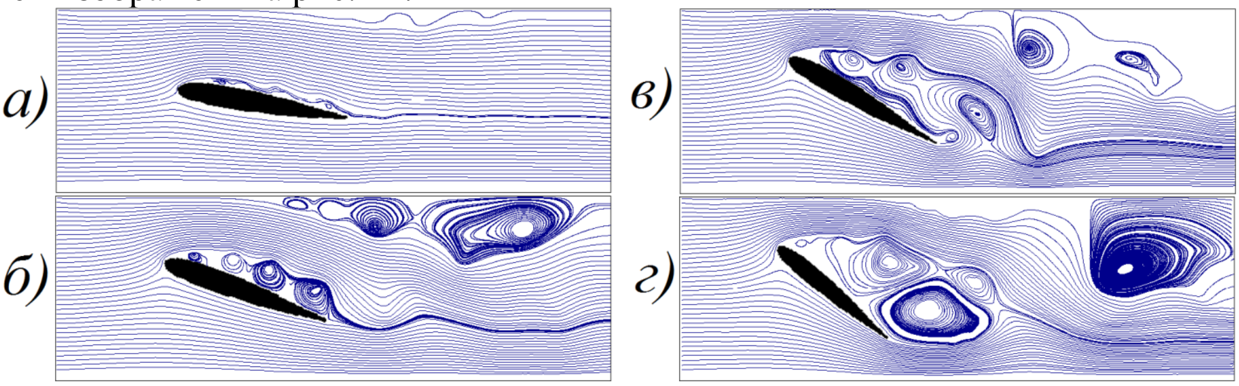


Рис. 21. Лінії течії при обтіканні профілю NASA 0012 із різними кутами атаки α течією при Re = *10000*

а) $\alpha = 10^0$ *б)* $\alpha = 20^0$ *в)* $\alpha = 30^0$ *г)* $\alpha = 40^0$

Для різних кутів атаки отримані графіки зміни коефіцієнтів лобового опору C_d та підйомної сили C_l з часом, та розподіл коефіцієнта тиску C_p по поверхні крила. Приклади таких графіків для $\alpha = 10^0$ ілюстровані на рис. 22 та 23. Досліджений вплив кута атаки α на характер течії та характеристики профілю.

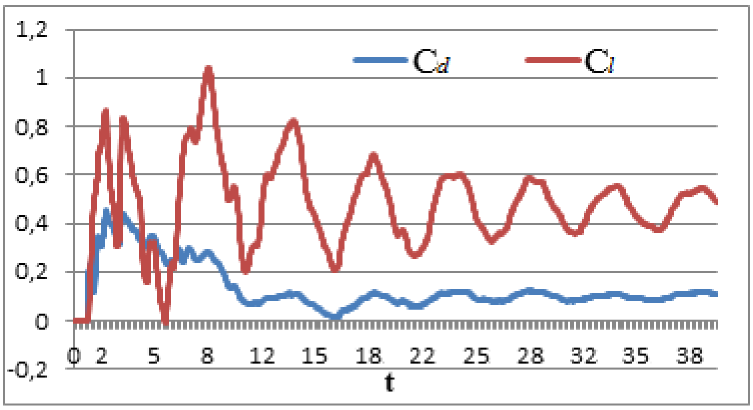
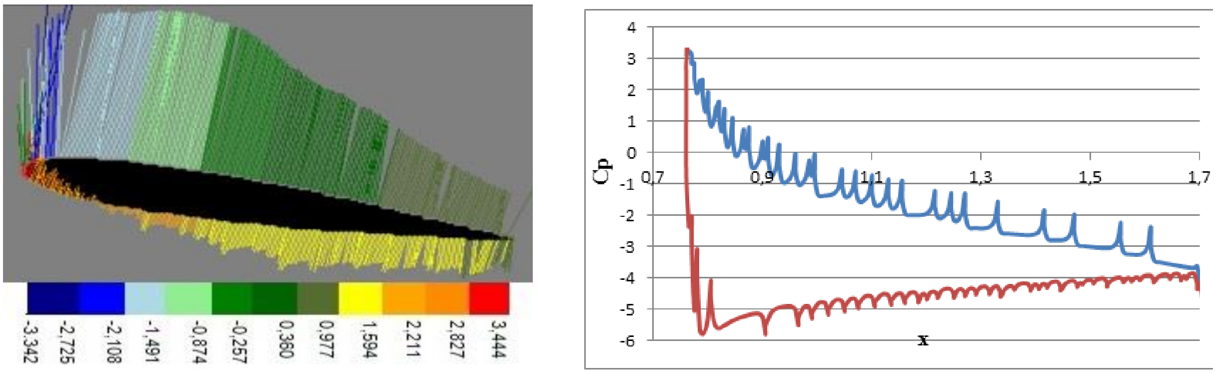


Рис. 22. Графіки зміни коефіцієнтів лобового опору та підйомної сили профілю Nasa 0012 із часом при $\alpha = 10^0$

Отримані результати можна використати при проектуванні мініатюрних літальних апаратів.



а) *б)*

Рис. 23. Розподіл коефіцієнта тиску по поверхні профілю Nasa 0012 при $\alpha = 10^0$ *а) кольорові лінії епюри б) графіки розподілу*

Розглянуті течії в'язкої рідини у каналах довільної форми. Такі течії мають широке практичне значення у різних областях науки та техніки. Тому проведено комп'ютерне моделювання течій у каналах різних довільно викривлених геометрій при числі Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1000$ (рис. 24).

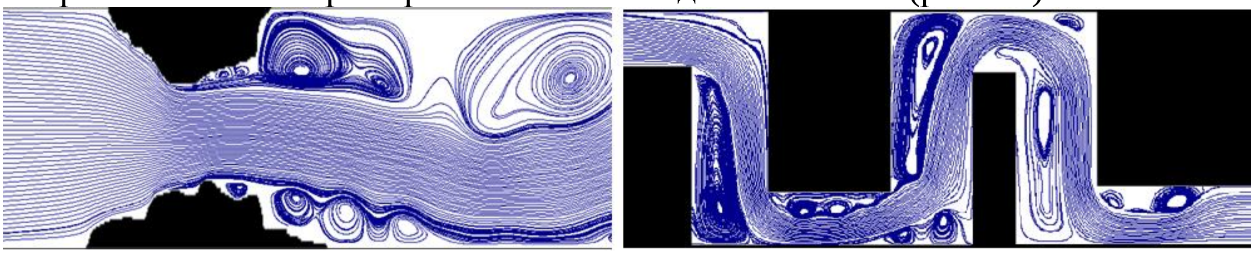


Рис. 24. Лінії течії у каналах довільних геометричних форм при $\mathrm{Re} = 1000$

Результати моделювання показали широкі можливості методу граткових рівнянь Больцмана, а саме повну незалежність процесу моделювання від геометрії області. Створена програмна-моделююча система передбачає завантаження довільних областей, що є зручним для дослідження. Цінним є те, що при моделюванні можна врахувати в'язкі ефекти без розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса.

Основні результати п'ятого розділу опубліковані в роботах [13-16].

ВИСНОВКИ

У дисертації розвинено метод граткових рівнянь Больцмана, що дозволяє отримати стійкі розв'язки за менший проміжок часу при моделюванні течій в'язкої рідини з помірними та великими числами Рейнольдса. Створено програмно-моделюючу систему для комп'ютерного моделювання течій в'язкої рідини в областях довільних конфігурацій.

Основні результати роботи можна описати наступними пунктами:

1. Вдосконалено алгоритм методу граткових рівнянь Больцмана за рахунок варіювання гратковою швидкістю частинок. Розвинутий алгоритм, на відміну від існуючих чисельних схем, дозволяє більш ефективно моделювати задачі гідродинаміки, змінюючи одночасно в'язкість рідини, розмірність розрахункової сітки і параметр релаксації. Таким чином,

з'являється можливість контролювати точність, стійкість розв'язків і швидкість обчислень.

2. Оптимізовано чисельний алгоритм методу за рахунок використання нової структури даних на етапі переміщення частинок у гратковому просторі. Розрахункову область пропонується розглядати як сферу даних – абстрактний тип даних, в якому немає граничних комірок. Успішна оптимізація етапу переміщення частинок і розпаралелювання етапу зіткнення частинок на CPU з використанням технології OpenMP дала можливість збільшити швидкість розрахунків приблизно в 3-4 рази. Крім того, показано, що при використанні сфери даних, як структури, що зберігає значення функції розподілу частинок, циклічні граничні умови задаються автоматично без введення додаткових чисельних схем.

3. Вдосконалено чисельну модель, що описує взаємодію рідини із твердими тілами. Класична схема відображення частинок доповнена умовою миттєвого дзеркального відображення функції розподілу частинок у граничних комірках. Доповнена схема дозволяє уникати значних пульсацій швидкостей біля обтічного тіла.

4. Розроблено метод регуляризації чисельного розв'язку з метою моделювання течій із великими числами Рейнольдса. Метод заснований на корекції значення функції в точці простору відповідно до сусідніх значень. В основі такої корекції лежить медіанна фільтрація (за аналогом згладження А. Л. Чудова). Метод апробований на класичній задачі про обтікання кругового циліндра і показав добру узгодженість результатів моделювання (діаграм розподілу модуля швидкості, профілів швидкості у перерізах, ліній течії, гідродинамічних коефіцієнтів) із результатами інших чисельних розв'язків як для помірних $\mathrm{Re} \sim 10^2$ так і для великих чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} \le 2 \cdot 10^4$.

5. Створено програмно-моделюючу систему для моделювання в'язких течій методом граткових рівнянь Больцмана. Функціонал програми включає в себе задання параметрів течії та параметрів моделювання, побудову стандартних або завантаження довільних геометрій та представлення результатів моделювання у вигляді діаграм розподілу модуля швидкості, компонент швидкості, тиску, ліній течії, а також у вигляді табличних значень модуля швидкості, компонент швидкості та коефіцієнтів лобового опору, підйомної сили та тиску обтічних тіл. Передбачено можливість дослідження течій в довільних перерізах.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Bulanchuk G. Stability investigation of the two-dimensional nine-vectors model of the lattice Boltzmann method for fluid flows in a square cavity / G. Bulanchuk, O. Bulanchuk, A. Ostapenko // Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems ». - 2015. - Vol. 28. - P. 113-125. *Особистий внесок*

здобувача полягає у розробці та програмуванні чисельного методу, проведення розрахунків з моделювання течії в каверні, чисельного аналізу стійкості методу.

2. Остапенко А. А. Исследование влияния переменной скорости звука в ячейке при моделировании течений в плоском канале и обтекания кругового цилиндра потоком вязкой жидкости при расчете методом решеточных уравнений Больцмана / А. А. Остапенко, О. Н. Буланчук, Г. Г. Буланчук // Вестник Черкасского университета. Серия физико-математические науки. – 2016. – № 1. – С. 50-64. *Особистий внесок здобувача полягає в удосконаленні чисельного методу та відповідних граничних умов, верифікації отриманий результатів.*

3. Bulanchuk G. Investigation of the influence of the relaxation parameter on the viscous fluid flow over circular cylinder modeling process with the lattice Boltzmann method / G. Bulanchuk, A. Ostapenko // Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems ». - 2017. - Vol. 33. - P. 52-61. *Особистий внесок здобувача полягає у моделюванні задачі обтікання кругового циліндра, аналізі впливу параметрів методу на процес моделювання, аналізі точності та стійкості отриманий результатів.*

4. Bulanchuk G. Modeling of the viscous fluid flow around rotating circular cylinders with the lattice Boltzmann method at moderate Reynolds numbers / G. Bulanchuk, A. Ostapenko // Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems ». - 2017. - Vol. 36. - P. 27-37. *Особистий внесок здобувача полягає у моделюванні задачі обтікання циліндра, що обертається, розробці відповідних граничних умов та верифікації отриманий результатів.*

5. Ostapenko A. Calculations of the drag coefficient of circular, square and rectangular cylinders using the lattice Boltzmann method with variable lattice speed of sound / A. Ostapenko, G. Bulanchuk // Afrika Matematika. - 2018. - Vol. 18, № 1-2. - P. 137-147. *Особистий внесок здобувача полягає у створенні схеми розрахунку гідродинамічних коефіцієнтів, моделюванні задач обтікання та верифікації отриманий результатів.*

6. Остапенко А. О. Моделювання обтікання перешкод методом граткових рівнянь Больцмана при великих числах Рейнольдса / А. О. Остапенко, Г. Г. Буланчук // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2019. – № 8 (1333). – С. 149-155. *Особистий внесок здобувача полягає у розробці та тестуванні алгоритму регуляризації, а також проведені чисельних експериментів, аналізі та порівнянні отриманих результатів.*

7. Буланчук Г. Г. Текстурна адвекція при моделюванні в’язких течій методом граткових рівнянь Больцмана / Г. Г. Буланчук, О. М. Буланчук, А. О. Остапенко, Р. В. Чабану // Математичне моделювання в економіці. – 2019. – № 3 (16). – С. 49-57. *Особистий внесок здобувача полягає у адаптації алгоритмів текстурної візуалізації до візуалізації векторних полів течій та створенні відповідної комп’ютерної програми.*

8. Буланчук О. Н. Моделирование течений вязкой жидкости методом решеток Больцмана / О. Н. Буланчук, А. А. Остапенко // Университетская наука-2014 : в 5 т. : тез. докл. междунар. науч.-техн. конф. (Мариуполь, 20-21 мая 2014 г.) / ПГТУ. – Мариуполь, 2014. – Т. 2. – С. 155–156. *Особистий внесок здобувача полягає у розробці та програмуванні алгоритму методу.*

9. Буланчук Г. Г. Граничные и начальные условия в методе LBM / Г. Г. Буланчук, А. А. Остапенко // Университетская наука-2015 : тезисы докладов междунар. науч.-техн. конф., 19-20 мая 2015 г. : в 4-х т. / ГВУЗ «ПГТУ». – Мариуполь, 2015. – Т. 2. – С. 256-257. *Особистий внесок здобувача полягає у розробці та програмуванні початкових та граничних умов методу граткових рівнянь Больцмана.*

10. Остапенко А. А. Использование метода решеточных уравнений Больцмана для решения двумерных задач гидродинамики / А. А. Остапенко, О. Н. Буланчук, Г. Г. Буланчук // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики : XVII международный симпозиум (Суммы, 8-13 июня 2015 г.) : сб. науч. трудов / Суммы, 2015. – С. 196-200. *Особистий внесок здобувача полягає у моделюванні задач гідродинаміки та оцінці отриманий результатів.*

11. Буланчук Г. Г. Моделирование обтекания тел методом решеточных уравнений / Г. Г. Буланчук, О. Н. Буланчук, А. А. Остапенко // Университетская наука-2016 : в 4 т. : тез. докл. междунар. науч.-техн. конф. (Мариуполь, 19-20 мая 2016 г.) / ПГТУ. – Мариуполь, 2016. – Т. 2. – С. 206–207. *Особистий внесок здобувача полягає у моделюванні обтікання кругового циліндра та аналізі отриманий результатів.*

12. Буланчук Г. Г. Моделирование вязких течений методом решеточных уравнений Больцмана с применением технологий распараллеливания / Г. Г. Буланчук, А. А. Остапенко // Университетская наука - 2017 : Междунар. научно-техн. конф. (Мариуполь, 18-19 мая 2017 г.) : тез. докл. : в 3 т. / ГВУЗ "ПГТУ". – Мариуполь, 2017. – Т. 2. – С. 247–249. *Особистий внесок здобувача полягає у застосуванні технологій паралельних обчислень до чисельного алгоритму методу.*

13. Остапенко А. А. Моделирование обтекания вращающегося кругового цилиндра методом решеточных уравнений Больцмана / А. А. Остапенко, Г. Г. Буланчук // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики : XVIII международный симпозиум (Харьков, 26-28 июня 2017 г.) : сб. науч. трудов / Харьков, 2015. – С. 169-172. *Особистий внесок здобувача полягає у створенні та програмуванні граничних умов для циліндра, що обертається, аналізі та порівнянні отриманих результатів.*

14. Остапенко А. А. Об особенностях моделирования течений методом решеточных уравнений Больцмана / А. А. Остапенко // Современные информационные технологии, средства автоматизации и электропривод : II Всеукраинская научно-техническая конференция (Краматорск, 19-21 апреля 2018 г.) : тез. докл. / Краматорск: ДДМА, 2018. - №. – С.

15. Остапенко А. О. Моделювання гемодинаміки методом граткових рівнянь Больцмана / А. О. Остапенко, Г. Г. Буланчук // Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях : 17 міжнародна науково – практична конференція (Київ, 25-26 вересня 2018 р.) : тез. доп. / Київ, 2018 р. – С. 90-92. *Особистий внесок здобувача полягає у проведені чисельних експериментів, аналізі та порівнянні отриманих результатів.*

16. Остапенко А. О. Застосування кінетичного підходу до моделювання гідродинаміки / Остапенко А. О. // Комп’ютерна інженерія і кібербезпека : досягнення та інновації : матеріали Всеукр. наук.-практ. конф. здобувачів вищої освіти й молодих учених (м. Кропивницький, 27–29 листоп. 2018 р.). – Кропивницький: ЦНТУ, 2018. – С. 83-85.

17. Ostapenko A. A. Computer Modeling of Viscous Fluid Flow Based on the Regularized Lattice Boltzmann Model / Ostapenko A. A. [Electronic resuorce] // Computer Modeling and Intelligent Systems (CMIS-2019): Second International Workshop (Zaporizhzhia, April 15-19 2019): CEUR Workshop Proceedings, Vol. 2353 / Zaporizhzhia, 2019 – P. 717-728. – Access mode: http://ceur-ws.org/Vol-2353/paper57.pdf

18. Остапенко А. О. Метод граткових рівнянь Больцмана: застосування, особливості та перспективи розвитку / А. О. Остапенко // Математика у технічному університеті XXI сторіччя: Всеукраїнська наукова конференція (Краматорск, 15-16 травня 2019 р.): зб. наук. праць / Краматорськ, 2019 – С. 196-198

19. Остапенко А. О. Регуляризація чисельних розв’язків рівняння Больцмана при моделюванні в’язких течій / А. О. Остапенко // Університетська наука – 2019 : Міжнар. Науково-техн. конф. (Маріуполь, 16-17 травня 2019 г.) : тези доп. : в 4 т. / ДВНЗ "ПДТУ". – Маріуполь, 2019. – Т. 2. – С. 261–262.

20. Остапенко А. О. Візуалізація в’язких течій за допомогою текстурної адвекції при моделюванні методом граткових рівнянь Больцмана / А. О. Остапенко, Г. Г. Буланчук, О. М. Буланчук // Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях : 18 міжнародна науково – практична конференція (Київ, 01-02 жовтня 2019 р.) : тез. доп. / Київ, 2019 р. – С. 222-224. *Особистий внесок здобувача полягає у розробці та порівнянні методів текстурної візуалізації векторних полів.*

АНОТАЦІЯ

Остапенко А. О. Моделювання в'язких течій методом граткових рівнянь Больцмана при помірних та великих числах Рейнольдса. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи» (технічні науки). – Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору Національної академії наук України, м. Київ, 2019.

Дисертацію присвячено теоретичним та практичним аспектам методу граткових рівнянь Больцмана. Даний метод використовує кінетичний підхід до моделювання течій в'язкої рідини. Рух рідини розглядається як рух ансамблю крупних частинок, поведінка яких описується за допомогою апарату кінетичної теорії газів. На відміну від класичних методів, що базуються на чисельному розв'язку рівнянь Нав'є - Стокса або Ейлера, досліджуваний метод базується на розв'язку кінетичного рівняння Больцмана.

В дисертаційному дослідженні розвинено метод граткових рівнянь Больцмана для отримання стійких розв'язків за менший проміжок часу при моделюванні течій в'язкої рідини з помірними та великими числами Рейнольдса. Створено програмно-моделюючу систему для комп'ютерного моделювання течій в'язкої рідини в областях довільних конфігурацій. Результати моделювання можуть буди отримані у вигляді таблиць значень швидкостей, як по всій обчислювальної області, так і в перерізах, у вигляді кольорових діаграм, ліній течії і у вигляді значень гідродинамічних коефіцієнтів обтічних тіл.

Ключові слова: моделювання течій в'язкої рідини, метод граткових рівнянь Больцмана, чисельні методи гідродинаміки, течія в каверні, обтікання циліндра, стійкість методу граткових рівнянь Больцмана, регуляризації розв'язку рівняння Больцмана.

ABSTRACT

Ostapenko A. A. Modeling of the viscous flow with the lattice Boltzmann method at moderate and large Reynolds numbers. – Manuscript.

Dissertation for the scientific degree of a candidate of technical sciences by specialty 01.05.02 – “Mathematical modeling and computational methods”. – Institute of Telecommunications and Global Information Space of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

The dissertation is devoted to theoretical and practical aspects of the lattice Boltzmann method. This method uses a kinetic approach to model the viscous fluid flow. Fluid dynamics regarded as the movement of large particles, whose behavior is described by the kinetic theory of gases. Unlike classical methods, based on the numerical solution of the Navier - Stokes or Euler equations, researched method is based on the solution of the kinetic Boltzmann equation.

In the dissertation research, the lattice Boltzmann method is developed for obtaining stable solutions with less computational time in the viscous fluid flows modeling at moderate and large Reynolds numbers. A software-modeling system for computer simulation of the viscous fluid flows in arbitrary domains has been created. The simulation results can be obtained in the form of tables of velocity values, both throughout the computational area and in cross-sections, in the form of color diagrams, streamlines and in the form of values of hydrodynamic coefficients of streamlined bodies.

Keywords: viscous fluid flow modeling, the lattice Boltzmann method, numerical methods of hydrodynamics, cavity flow, flow over a cylinder, stable of the lattice Boltzmann method, regularization of the solution of the Boltzmann equation.