МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДВНЗ «ПРИАЗОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ІНСТИТУТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ І ГЛОБАЛЬНОГО ІНФОРМАЦІЙНОГО
ПРОСТОРУ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ОСТАПЕНКО АРТЕМ ОЛЕКСІЙОВИЧ

УДК 532.5+519.63

ДИСЕРТАЦІЯ

МОДЕЛЮВАННЯ В'ЯЗКИХ ТЕЧІЙ МЕТОДОМ ГРАТКОВИХ РІВНЯНЬ БОЛЬЦМАНА ПРИ ПОМІРНИХ ТА ВЕЛИКИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи
(технічні науки)

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

______________ А. О. Остапенко

Науковий керівник
Буланчук Галина Григорівна
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Маріуполь - 2020

АНОТАЦІЯ

Остапенко А. О. Моделювання в'язких течій методом граткових рівнянь Больцмана при помірних та великих числах Рейнольдса. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи» (технічні науки). – Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору Національної академії наук України, м. Київ, 2020.

Дисертацію присвячено теоретичним та практичним аспектам методу граткових рівнянь Больцмана. Даний метод використовує кінетичний підхід до моделювання течій в'язкої рідини. Рух рідини розглядається як рух ансамблю крупних частинок, поведінка яких описується за допомогою апарату кінетичної теорії газів. На відміну від класичних методів, що базуються на чисельному розв'язку рівнянь Нав'є - Стокса або Ейлера, досліджуваний метод базується на розв'язку кінетичного рівняння Больцмана.

Перший розділ дисертації присвячено огляду наукової літератури за темою досліджень. Розглянуті основні підходи при моделюванні динаміки рідини та етапи розвитку дискретних моделей рідини. Розглянуто основні елементи апарату кінетичної теорії газів, на базі яких будуються чисельні схеми методу граткових рівнянь Больцмана (LBM). Проведено аналіз існуючих наукових робіт з даної тематики. Розглянуті переваги, недоліки, етапи розвитку та перспективи методу граткових рівнянь Больцмана. Аналіз результатів першого розділу дав змогу сформулювати задачу дисертаційного дослідження: розвинути метод граткових рівнянь Больцмана для отримання стійких розв'язків за менший проміжок часу при моделюванні течій в'язкої рідини з помірними та великими числами Рейнольдса.

У другому розділі докладно описується досліджуваний метод: його стан і можливості, чисельні схеми, стійкість, обґрунтування та програмна

реалізація. Розкривається сутність мезоскопічного рівня абстракції в описі рідини. Описані переваги методу: явний і лінійний вид рівнянь, інтуїтивно зрозумілі кроки алгоритму, можливість застосування технологій паралельних обчислень. Запропоновано вдосконалений алгоритм методу, в якому в'язкість рідини вводиться через граткову швидкість частинок. Оптимізовано чисельний алгоритм на етапі переміщення частинок шляхом трансформації розрахункової сітки у сферу даних – абстрактний тип даних, у якому немає граничних комірок.

У третьому розділі дисертації досліджуються методи задання початкових і граничних умов для прикладних задач. Розглядаються циклічні граничні умови, умови прилипання, рухомої стінки, потоку і стоку рідини, граничні умови в задачі про круговий циліндр, що обертається. Розвинуті чисельні схеми для умов стоку рідини і кругового циліндра, що обертається.

Показано, що при використанні сфери даних, як структури, що зберігає значення функції розподілу частинок, циклічні граничні умови задаються автоматично без введення додаткових чисельних схем.

Детально розглянуто та модифіковано чисельну схему для реалізації умови прилипання, що зазвичай задається за допомогою схеми зворотного відображення частинок. Недоліком такого підходу є поява пульсацій швидкостей поблизу границь обтічного тіла. Для усунення недоліку схема зворотного відображення частинок доповнена схемою миттєвого дзеркального відображення. Доповнена схема граничної умови прилипання дозволяє більш точно моделювати поведінку частинок біля границі, оскільки відбувається плавна зміна швидкості від її значення біля тіла обтікання до нуля на стінках тіла. Частинки в граничному шарі повертаються в потік на тому ж часовому кроці.

У четвертому розділі дисертації представлено програмно-моделюючу систему, що була створена у MS Visual Community 2015 на мові програмування C++ із застосуванням технології паралельних обчислень на центральному процесорі OpenMP. Досліджено вплив параметрів методу на стійкість та точність розв'язків на прикладних задачах. Визначено вплив параметра релаксації на стійкість розв'язків та швидкість обчислень модифікованого алгоритму. Проведено дослідження щодо меж застосування розвинутого та класичного алгоритмів (на основі скрипта, написаного phD університета Женеви J. Latt у пакеті MatLab). Основні результати п'ятого розділу показують розширення меж застосування методу LBM на порядок: від малих чисел Рейнольдса Re ~ 10 до помірних $\mathrm{Re} \sim 10^2$.

У п'ятому розділі дисертації показані результати моделювання течій із помірними та великими числами Рейнольдса. Для розв'язку задач із великими числами Рейнольдса запропоновано метод регуляризації чисельного розв'язку. Метод заснований на корекції значення функції в точці простору відповідно до сусідніх значень. У основі такої корекції лежить медіанна фільтрація. Метод регуляризації протестований на класичній задачі про обтікання кругового циліндра у діапазоні чисел Рейнольдса від $\mathrm{Re} = 500$ до $\mathrm{Re} = 20000$. Порівняння чисельних розв'язків показало добру узгодженість результатів моделювання методом LBM (діаграм швидкостей, ліній течії, коефіцієнтів лобового опору) із результатами інших чисельних розв'язків, що були отримані методом скінчених елементів.

Проведено дослідження обтікання профілю Nasa 0012 течією в'язкої рідини із різними кутами атаки. Отримані результати можна використати при проектуванні мініатюрних літальних апаратів. Проведено комп'ютерне моделювання гемодинаміки. Проведено моделювання аномалій артерій, їх ролі і місця в порушеннях кровообігу.

Основні результати п'ятого розділу показують розширення меж застосування методу LBM: від малих чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 10$ до великих $\mathrm{Re} \sim 10^4$.

Таким чином, в дисертаційному дослідженні розвинено метод граткових рівнянь Больцмана для отримання стійких розв'язків за менший проміжок часу при моделюванні течій в'язкої рідини з помірними та великими числами Рейнольдса. Створено програмно-моделюючу систему для комп'ютерного моделювання течій в'язкої рідини в областях довільних конфігурацій. Результати моделювання можуть буди отримані у вигляді таблиць значень швидкостей, як по всій обчислювальної області, так і в перерізах, у вигляді кольорових діаграм, ліній течії і у вигляді значень гідродинамічних коефіцієнтів обтічних тіл.

Робота підготовлена в межах держбюджетних програм (2016, 2017, 2019 рр.) кафедри вищої та прикладної математики факультету інформаційних технологій державного вищого навчального закладу «Приазовський державний технічний університет». Результати досліджень впроваджено у навчальний курс «Аналітичні та чисельні методи гідродинаміки» для студентів 5 курсу денної форми навчання спеціальності 113 – «Прикладна математика» кафедри вищої та прикладної математики ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», а також у навчальний курс «Моделювання складних систем» для бакалаврів спеціальності 122 – «Комп'ютерні науки» кафедри комп'ютерних наук та вищої математики Донецького державного університету управління. Отримане авторське свідоцтво на розроблену комп'ютерну програму (№ 89549 від 06.06.2019).

Ключові слова: моделювання течій в'язкої рідини, метод граткових рівнянь Больцмана, чисельні методи гідродинаміки, течія в каверні, обтікання циліндра, стійкість методу граткових рівнянь Больцмана, регуляризації розв'язку рівняння Больцмана.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Праці, в яких опубліковані наукові результати дисертації.

1. Bulanchuk G. Stability investigation of the two-dimensional nine-vectors model of the lattice Boltzmann method for fluid flows in a square cavity / G. Bulanchuk, O. Bulanchuk, A. Ostapenko // Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modeling. Information Technology.

Automated Control Systems». – 2015. – Vol. 28. – P. 113-125. *Особистий внесок здобувача полягає у розробці та програмуванні чисельного методу, проведення розрахунків з моделювання течії в каверні, чисельного аналізу стійкості методу.*

2. Остапенко А. А. Исследование влияния переменной скорости звука в ячейке при моделировании течений в плоском канале и обтекания кругового цилиндра потоком вязкой жидкости при расчете методом решеточных уравнений Больцмана / А. А. Остапенко, О. Н. Буланчук, Г. Г. Буланчук // Вестник Черкасского университета. Серия физико-математические науки.[1] – 2016. – № 1. – С. 50-64. *Особистий внесок здобувача полягає в удосконаленні чисельного методу та відповідних граничних умов, тестуванні отриманих результатів.*

3. Bulanchuk G. Investigation of the influence of the relaxation parameter on the viscous fluid flow over circular cylinder modeling process with the lattice Boltzmann method / G. Bulanchuk, A. Ostapenko // Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems». – 2017. – Vol. 33. – P. 52-61. *Особистий внесок здобувача полягає у моделюванні задачі обтікання кругового циліндра, аналізі впливу параметрів методу на процес моделювання, аналізі точності та стійкості отриманих результатів.*

4. Bulanchuk G. Modeling of the viscous fluid flow around rotating circular cylinders with the lattice Boltzmann method at moderate Reynolds numbers / G. Bulanchuk, A. Ostapenko // Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems». – 2017. – Vol. 36. – P. 27-37. *Особистий внесок здобувача полягає у моделюванні задачі обтікання циліндра, що обертається, розробці відповідних граничних умов та верифікації отриманих результатів.*

[1] Входить до міжнародних інформаційних систем та наукометричних баз даних: *Google Scholar, Index Copernicus.*

5. Ostapenko A. Calculations of the drag coefficient of circular, square and rectangular cylinders using the lattice Boltzmann method with variable lattice speed of sound / A. Ostapenko, G. Bulanchuk // Afrika Matematika.[2] – 2018. – Vol. 18, № 1-2. – P. 137-147. *Особистий внесок здобувача полягає у розробці методики розрахунку гідродинамічних коефіцієнтів, моделюванні задач обтікання та верифікації отриманих результатів.*

6. Остапенко А. О. Моделювання обтікання перешкод методом граткових рівнянь Больцмана при великих числах Рейнольдса / А. О. Остапенко, Г. Г. Буланчук // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2019. – № 8 (1333). – С. 149-155. *Особистий внесок здобувача полягає у розробці та тестуванні алгоритму регуляризації, а також проведені чисельних експериментів, аналізі та порівнянні отриманих результатів.*

7. Буланчук Г. Г. Текстурна адвекція при моделюванні в'язких течій методом граткових рівнянь Больцмана / Г. Г. Буланчук, О. М. Буланчук, А. О. Остапенко, Р. В. Чабану // Математичне моделювання в економіці. – 2019. – № 3 (16). – С. 49-57. *Особистий внесок здобувача полягає у адаптації алгоритмів текстурної візуалізації до візуалізації векторних полів течій та створенні відповідної комп'ютерної програми.*

Праці, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

8. Буланчук О. Н. Моделирование течений вязкой жидкости методом решеток Больцмана / О. Н. Буланчук, А. А. Остапенко // Университетская наука-2014 : в 5 т. : тез. докл. междунар. науч.-техн. конф. (Мариуполь, 20-21 мая 2014 г.) / ПГТУ. – Мариуполь, 2014. – Т. 2. – С. 155–156. *Особистий внесок здобувача полягає у розробці та програмуванні алгоритму методу.*

9. Буланчук Г. Г. Граничные и начальные условия в методе LBM / Г. Г. Буланчук, А. А. Остапенко // Университетская наука-2015 : тезисы

[2] Входить до міжнародних інформаційних систем та наукометричних баз даних: *SCOPUS, Current Mathematical Publications, Mathematical Reviews, MathSciNet, Zentralblatt MATH.*

докладов междунар. науч.-техн. конф., 19-20 мая 2015 г. : в 4-х т. / ГВУЗ «ПГТУ». – Мариуполь, 2015. – Т. 2. – С. 256-257. *Особистий внесок здобувача полягає у розробці та програмуванні початкових та граничних умов методу граткових рівнянь Больцмана.*

10. Остапенко А. А. Использование метода решеточных уравнений Больцмана для решения двумерных задач гидродинамики / А. А. Остапенко, О. Н. Буланчук, Г. Г. Буланчук // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики : XVII международный симпозиум (Суммы, 8-13 июня 2015 г.) : сб. науч. трудов / Суммы, 2015. – С. 196-200. *Особистий внесок здобувача полягає у моделюванні задач гідродинаміки та оцінці отриманих результатів.*

11. Буланчук Г. Г. Моделирование обтекания тел методом решеточных уравнений / Г. Г. Буланчук, О. Н. Буланчук, А. А. Остапенко // Университетская наука-2016 : в 4 т. : тез. докл. междунар. науч.-техн. конф. (Мариуполь, 19-20 мая 2016 г.) / ПГТУ. – Мариуполь, 2016. – Т. 2. – С. 206–207. *Особистий внесок здобувача полягає у моделюванні обтікання кругового циліндра та аналізі отриманих результатів.*

12. Буланчук Г. Г. Моделирование вязких течений методом решеточных уравнений Больцмана с применением технологий распараллеливания / Г. Г. Буланчук, А. А. Остапенко // Университетская наука - 2017 : Междунар. научно-техн. конф. (Мариуполь, 18-19 мая 2017 г.) : тез. докл. : в 3 т. / ГВУЗ "ПГТУ". - Мариуполь, 2017. - Т. 2. – С. 247–249. *Особистий внесок здобувача полягає у застосуванні технологій паралельних обчислень до чисельного алгоритму метода.*

13. Остапенко А. А. Моделирование обтекания вращающегося кругового цилиндра методом решеточных уравнений Больцмана / А. А. Остапенко, Г. Г. Буланчук // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики : XVIII международный симпозиум (Харьков, 26-28 июня 2017 г.) : сб. науч. трудов / Харьков, 2015. – С. 169-172. *Особистий*

внесок здобувача полягає у створенні та програмуванні граничних умов для обертового циліндра, аналізі та порівнянні отриманих результатів.

14. Остапенко А. А. Об особенностях моделирования течений методом решеточных уравнений Больцмана [Електронний ресурс] / А. А. Остапенко // Современные информационные технологии, средства автоматизации и электропривод : II Всеукраинская научно-техническая конференция (Краматорск, 19-21 апреля 2018 г.) : тез. докл. / Краматорск: ДДМА, 2018. – Режим доступу: http://dspace.dgma.donetsk.ua:8080/jspui/handle/DSEA/344

15. Остапенко А. О. Моделювання гемодинаміки методом граткових рівнянь Больцмана / А. О. Остапенко, Г. Г. Буланчук // Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях : 17 міжнародна науково – практична конференція (Київ, 25-26 вересня 2018 р.) : тез. доп. / Київ, 2018 р. – С. 90-92. *Особистий внесок здобувача полягає у побудові різних геометрій судин, проведенні чисельних експериментів із моделювання гемодинаміки.*

16. Остапенко А. О. Застосування кінетичного підходу до моделювання гідродинаміки / Остапенко А. О. // Комп'ютерна інженерія і кібербезпека : досягнення та інновації : матеріали Всеукр. наук.-практ. конф. здобувачів вищої освіти й молодих учених (м. Кропивницький, 27–29 листоп. 2018 р.). – Кропивницький: ЦНТУ, 2018. – С. 83-85.

17. Ostapenko A. A. Computer Modeling of Viscous Fluid Flow Based on the Regularized Lattice Boltzmann Model [Electronic resuorce] / Ostapenko A. A. // Computer Modeling and Intelligent Systems (CMIS-2019): Second International Workshop (Zaporizhzhia, April 15-19 2019): CEUR Workshop Proceedings, Vol. 2353 / Zaporizhzhia, 2019 – P. 717-728. – Access mode: http://ceur-ws.org/Vol-2353/paper57.pdf

18. Остапенко А. О. Метод граткових рівнянь Больцмана: застосування, особливості та перспективи розвитку / А. О. Остапенко // Математика у технічному університеті XXI сторіччя: Всеукраїнська наукова

конференція (Краматорск, 15-16 травня 2019 р.): зб. наук. праць / Краматорськ, 2019 – С. 196-198.

19. Остапенко А. О. Регуляризація чисельних розв'язків рівняння Больцмана при моделюванні в'язких течій / А. О. Остапенко // Університетська наука – 2019 : Міжнар. Науково-техн. конф. (Маріуполь, 16-17 травня 2019 г.) : тези доп. : в 4 т. / ДВНЗ "ПДТУ". – Маріуполь, 2019. – Т. 2. – С. 261–262.

20. Остапенко А. О. Візуалізація в'язких течій за допомогою текстурної адвекції при моделюванні методом граткових рівнянь Больцмана / А. О. Остапенко, Г. Г. Буланчук, О. М. Буланчук // Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях : 18 міжнародна науково – практична конференція (Київ, 01-02 жовтня 2019 р.) : тез. доп. / Київ, 2019 р. – С. 222-224. *Особистий внесок здобувача полягає у розробці та порівнянні методів текстурної візуалізації векторних полів.*

ABSTRACT

Ostapenko A. A. Modeling of the viscous flow with the lattice Boltzmann method at moderate and large Reynolds numbers. – Manuscript.

Dissertation for the scientific degree of a candidate of technical sciences by specialty 01.05.02 – “Mathematical modeling and computational methods”. – Institute of Telecommunications and Global Information Space of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2019.

The dissertation is devoted to theoretical and practical aspects of the lattice Boltzmann method. This method uses a kinetic approach to model the viscous fluid flow. Fluid dynamics regarded as the movement of a large particles, whose behavior is described by the kinetic theory of gases. Unlike classical methods, based on the numerical solution of the Navier - Stokes or Euler equations, researched method is based on the solution of the kinetic Boltzmann equation.

The first section of the thesis is devoted to the scientific literature review on the topic of research. The basic approaches of the fluid dynamics modeling and stages of the progress of the fluid discrete models are studied. Studied the main elements of the kinetic theory of gases, which were used to build the numerical schemes of the lattice Boltzmann method (LBM). The analysis of existing scientific works on this topic was conducted. Was considered the advantages, disadvantages, stages of development and perspectives of the lattice Boltzmann method. Analysis of the first section allowed to formulate the task of the dissertation: develop the lattice Boltzmann method for getting the stable solutions in less time in the viscous fluid flows modeling at moderate and high Reynolds numbers.

The second section describes the researches method in detail: its condition and possibilities, numerical schemes, stability, justification and software implementation. Essence of the mesoscopic level of abstraction in fluid describing is explained. The advantages of the method are described: explicit and line type of the equations, intuitive steps of the algorithm, the ability to use parallel computing technologies. Proposed the improved algorithm of the method in which viscosity is introduced by the lattice velocity of the particles. Numerical algorithm was optimized in the movement of particles step by the computational grid transformation into the sphere of data - an abstract data type in which no boundary cells.

In the third section of the dissertation, methods for determining the initial and boundary conditions for some applied problems are investigated. The periodic, no-slip, moving wall, inlet and fluid outlet, rotating circular cylinder boundary conditions are considered. Developed numerical schemes for fluid outlet conditions and rotating circular cylinder.

It is shown that when using the data sphere as a structure that preserves the value of the particle distribution function, the periodic boundary conditions are set automatically without the introduction of additional numerical schemes.

A numerical scheme for the realization of the no-slip boundary condition, which is usually provided by the inverse particle reflection scheme, is considered and modified in detail. The disadvantage of this approach is the appearance of the velocity fluctuations near streamlined body. To eliminate the drawback, the scheme of inverse particle reflection is supplemented with an instant mirror reflection scheme. The supplemented scheme of the no-slip boundary condition allows to simulate the behavior of particles near the boundary more accurately, since there is a smooth velocity change from its value near the streamlined body to zero on the walls of the body. The particles in the boundary layer return to the flow at the same time step.

The fourth section of the thesis presents the modeling system that was created using the MS Visual Community 2015 on the C ++ programming language and the parallel computing technology on CPU OpenMP. The influence of method parameters on the stability and accuracy of the solutions to applied problems was investigated. Determine the influence of the relaxation parameter on the solutions stability and computation speed of the modified algorithm. The researches about the limits of the advanced and classic algorithms are carried out (based on a script written by the phD of University of Geneva J. Latt in MatLab package). The main results of the fifth section are showing expand of the limits of the LBM method in order from small Reynolds numbers Re ~ 10 to moderate Re ~ 100.

In the fifth section of the thesis shows the flows simulation results at moderate and large Reynolds numbers. For the solution of problems with large Reynolds numbers proposed the method of the numerical solution regularization. The method is based on the correction of the value of the function at the space point in accordance with the neighboring values. The basis of this correction is median filtering. Regularization method was tested on the classic problem of flow around circular cylinder at the range of Reynolds numbers from $\mathrm{Re} = 500$ to $\mathrm{Re} = 20000$. Comparison of the numerical solutions showed good consistency of the simulation results with LBM (velocities diagram, streamlines, drag coefficient) with results of other numerical solutions, which were obtained with the finite element method.

The study of the viscous fluid flow over the Nasa 0012 profile with different angles of attack was carried out. The obtained results can be used for the design of miniature aircraft. The computer modeling of the hemodynamics is carried out. The simulation of the anomalies of the arteries, their role and place in the disturbances of the blood circulation has been carried out.

The main results of the fifth section are showing expand of the limits of the LBM method: from small Reynolds numbers $\mathrm{Re} \sim 10$ to large $\mathrm{Re} \sim 10^4$.

Thus, in the dissertation research, the lattice Boltzmann method is developed for obtaining stable solutions with less computational time in the viscous fluid flows modeling at moderate and large Reynolds numbers. A software-modeling system for computer simulation of the viscous fluid flows in arbitrary domains has been created. The simulation results can be obtained in the form of tables of velocity values, both throughout the computational area and in cross-sections, in the form of color diagrams, streamlines and in the form of values of hydrodynamic coefficients of streamlined bodies.

The work was prepared within the limits of state budget programs (2016, 2017, 2019) of the Department of Higher and Applied Mathematics of the Faculty of Information Technologies of the State Higher Educational Institution "Priazovskiy State Technical University". The research results are introduced into the course "Analytical and numerical methods of hydrodynamics" for students of the 5th year of full-time studying in specialty 113 – "Applied Mathematics" of the department of high and applied mathematics of the State Higher Educational Institution "Priazovskiy State Technical University" and also into the cource "Modeling of complex system" for bachelor students in specialty 122 – "Computer science" of the department of computer sciences and higher mathematics of Donetsk State University of Management. Received the copyright certificate for the developed computer program (№ 89549 from 06.06.2019).

Keywords: viscous fluid flow modeling, the lattice Boltzmann method, numerical methods of hydrodynamics, cavity flow, flow over a cylinder, stable of the lattice Boltzmann method, regularization of the solution of the Boltzmann equation.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Методи обчислювальної гідродинаміки можуть бути класифіковані за принципом застосування в них різних підходів до опису суцільного середовища. При використанні підходу Ейлера вивчається зміна таких характеристик рідини, як швидкість і тиск у фіксованій точці простору з часом. Розрахункова область розбивається нерухомою сіткою, на якій відповідне диференційне рівняння (Ейлера або Нав'є - Стокса) дискретизується. До методів, що використовують ейлерів підхід, відносяться, наприклад, метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, метод скінченних об'ємів. При використанні підходу Лагранжа в кожен момент часу відстежується положення всіх частинок усередині розрахункової області. До методів, що базуються на лагранжевому підході, належать, наприклад, метод гідродинаміки згладжених частинок та дискретно-вихрові методи.

Широке поширення отримали гібридні методи, що поєднують в собі переваги підходів Ейлера та Лагранжа. Перший гібридний метод для розрахунку нестаціонарних задач гідродинаміки був розроблений у 1955 році в США - метод частинок у комірках Харлоу (PiC, від англ. Particle in Cell), побудований на основі рівняння Ейлера. Область розв'язку розбивається нерухомою ейлеровою сіткою на комірки, в яких знаходяться частинки. Суцільне середовище описується дискретною моделлю, як сукупність частинок фіксованої маси, які рухаються по комірках сітки. Метод частинок у комірках зручно застосовувати для дослідження динаміки багатокомпонентних течій і течій із вільними поверхнями. Однак у нього є два істотні недоліки. Перший пов'язаний із дискретним представленням суцільного середовища: можливі флуктуації – нерегулярність переміщення частинок. Другий недолік – високі вимоги до об'єму пам'яті і швидкодії комп'ютерів.

Розвитком методу частинок у комірках став метод крупних частинок, розроблений Давидовим Ю. М. та Білоцерківським О. М. у 1965 році, який усуває недоліки методу PiC, однак зберігає його сильні сторони. Обчислювальна область розбивається ейлеровою сіткою, комірки якої розглядаються як крупні частинки. Рух таких крупних частинок моделюється на основі нестаціонарної моделі Ейлера. Таким чином, метод займає проміжне місце між методом частинок у комірках Харлоу і класичними кінцево-різницевими методами. Метод крупних частинок дає можливість досліджувати обтікання тіл різної форми течіями ідеальної рідини від дозвукових до надзвукових швидкостей. Крім того, цей метод був розвинутий і для моделювання в'язких течій на основі рівняння Нав'є - Стокса, однак такі чисельні схеми не набули широкого застосування через появу нестійкості з ростом числа Рейнольдса. Надійні результати були отримані лише в діапазоні чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} < 10^3$.

Ще одним підходом у моделюванні динаміки рідини стала поява в 1973 році клітинно-автоматної гідродинаміки (LGA, від англ. Lattice Gas Cellular Automata). Область розбивається сіткою, а всередині комірок розташовуються частинки. Частинки переміщуються в сусідні комірки і зіштовхуються в них за законами динаміки газів (рівняння Больцмана). Основними перевагами такої моделі є використання цілих значень, що виключає можливість накопичення помилок округлення, і можливість застосувати технології паралельних обчислень. Недоліком даного методу є сильний стохастичний шум, що з'являється при розрахунку густини, імпульсу і швидкості в окремих комірках. Як засіб усунення такого шуму був запропонований наступний метод: замість цілого числа частинок було введено поняття їх концентрації з використанням функції розподілу частинок за швидкостями і координатами із кінетичної теорії газів. Еволюція функції розподілу описується кінетичним рівнянням Больцмана. Такий підхід отримав назву методу граткових рівнянь Больцмана (LBM, від англ. Lattice Boltzmann Method).

Ідея методу LBM аналогічна ідеї методу крупних частинок Білоцерковського О. М. та Давидова Ю. М. Обчислювальна область розбивається сіткою, комірки якої трактуються як крупні частинки. Однак поведінка таких частинок описується не рівняннями Ейлера або Нав'є - Стокса, а кінетичним рівнянням Больцмана. А характеристики крупних частинок описуються статистично за допомогою функції розподілу частинок за координатами та швидкостями.

Останнім часом метод граткових рівнянь Больцмана набуває значного поширення. На сьогодні область застосування методу вже включає моделювання багатофазних і багатокомпонентних течій, мікротечій, течій із вільними границями, течій у пористих середовищах, моделювання теплопереносу. Однак, незважаючи на зростаючу популярність, ще існують такі проблеми:

1. Значний час розрахунків, що істотно збільшується із зростанням числа Рейнольдса;

2. Умовна стійкість чисельної схеми.

Ці проблеми ускладнюють отримання чисельних розв'язків для течій із помірними числами Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 10^2$ та унеможливлюють моделювання при великих числах $\mathrm{Re} > 10^3$. Для їх часткового усунення при малих числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} \sim 10$) використовують, наприклад, схеми із декількома параметрами релаксації в інтегралі зіткнень частинок або неявні схеми. Проте вищенаведені проблеми до кінця не розв'язані і визначають актуальність теми дисертації, а також її наукове і практичне значення.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами .

Роботи із зазначеної тематики виконувались в межах програми планових теоретичних досліджень, що здійснювались на кафедрі вищої та прикладної математики ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет» за замовленням Міністерства освіти і науки України: «Використання математичного моделювання для дослідження процесів у виробництві та економіці. Проблеми математичної освіти студентів у світлі нового закону про вищу освіту» (№ держреєстрації 0113U006283, 2016 р.); «Розв'язання задач виробництва з використанням методів прикладної математики. Методика викладання математики у вищій школі» (№ держреєстрації 0116U008777, 2017 р.); «Математичне моделювання в виробництві та економіці. Нові методи навчання математики» (№ держреєстрації 0118U006924, 2019 р.).

Мета і завдання дослідження. Метою цієї дисертаційної роботи є розвиток методу граткових рівнянь Больцмана для отримання стійких розв'язків за менший проміжок часу при моделюванні течій в'язкої рідини з помірними та великими числами Рейнольдса, а також створення програмно-моделюючої системи для комп'ютерного моделювання течій в'язкої рідини в областях довільних конфігурацій.

Реалізація поставленої мети визначається виконанням таких задач:

- вдосконалення алгоритму методу з метою підвищення його ефективності при моделюванні течій із помірними числами Рейнольдса;
- оптимізація алгоритму чисельного методу з метою підвищення швидкості розрахунків;
- вдосконалення чисельної моделі, що описує взаємодію рідини із твердими тілами;
- розробка методу регуляризації чисельного розв'язку з метою моделювання течій із великими числами Рейнольдса;
- створення програмно-моделюючої системи для моделювання в'язких течій методом граткових рівнянь Больцмана.

Об'єктом дослідження є течії, що виникають при обтіканні тіл різної форми в'язкою рідиною.

Предмет дослідження - метод граткових рівнянь Больцмана, за допомогою якого проводиться моделювання течій в'язкої рідини.

Методи дослідження. Представлені в дисертаційній роботі результати базуються на застосуванні вже існуючих чисельних підходів до моделювання гідродинамічних процесів та методів асимптотичного розв'язку кінетичних рівнянь, а також проведенні відповідних чисельних експериментів на основі вдосконалених алгоритмів і чисельних схем. У роботі використані сучасні технології, методи та підходи у програмуванні при створенні програмного забезпечення та технології паралельних обчислень. Верифікація отриманих чисельних розв'язків проводилась на основі існуючих результатів натурних та чисельних експериментів та за допомогою сучасних пакетів обчислювальної гідродинаміки.

Наукова новизна отриманих результатів. Розвинуто метод граткових рівнянь Больцмана для швидкого отримання стійких розв'язків при моделюванні течій в'язкої рідини з помірними та великими числами Рейнольдса. Основні положення, що визначають наукову новизну:

1. вдосконалено алгоритм методу граткових рівнянь Больцмана, в якому в'язкість рідини задається через змінну граткову швидкість частинок та параметр релаксації;

2. оптимізовано алгоритм методу за рахунок використання нової структури даних на етапі переміщення частинок у гратковому просторі;

3. вдосконалено чисельну модель, що описує взаємодію рідини із твердими тілами;

4. вперше розроблено метод регуляризації чисельного розв'язку рівняння Больцмана при моделюванні в'язких течій із великими числами Рейнольдса;

5. створено програмно-моделюючу систему для моделювання в'язких течій методом граткових рівнянь Больцмана із можливістю завантаження довільних складних геометрій.

Обґрунтування і достовірність наукових положень, висновків, рекомендацій забезпечується відомими та перевіреними математичними моделями, коректністю постановок математичних задач та задовільним порівнянням результатів моделювання із відомими теоретичними результатами та даними інших чисельних експериментів, що відображені у наукових роботах інших авторів та отримані власноруч за допомогою сучасних пакетів обчислювальної гідродинаміки.

Наукове значення роботи. Результати роботи мають наукове значення для розвитку математичного моделювання течій в'язкої рідини та створення відповідних моделей, що будуються на основі кінетичного рівняння Больцмана.

Практичне значення отриманих результатів. Теоретичні та практичні результати дисертаційної роботи були використані при розробці держбюджетних програм (2016, 2017, 2019 рр.) кафедри вищої та прикладної математики факультету інформаційних технологій державного вищого навчального закладу «Приазовський державний технічний університет». Результати досліджень впроваджено у навчальний курс «Аналітичні та чисельні методи гідродинаміки» для студентів 5 курсу денної форми навчання спеціальності 113 – «Прикладна математика» кафедри вищої та прикладної математики ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет». А також у навчальний курс «Моделювання складних систем» для бакалаврів спеціальності 122 – «Комп'ютерні науки» кафедри комп'ютерних наук та вищої математики Донецького державного університету управління. Отримані відповідні довідки про впровадження результатів дисертаційного дослідження у навчальний процес та авторське свідоцтво на розроблену комп'ютерну програму (№ 89549 від 06.06.2019).

Особистий внесок. Всі результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Внесок здобувача в колективні роботи конкретизований у списку публікацій.

Апробація результатів дисертації. Основні положення та результати дисертаційного дослідження було обговорено та викладено в доповідях на наукових конференціях та науково-практичних заходах: Міжнародна науково-практична конференція «Університетська наука» (м. Маріуполь, 2014, 2015, 2016, 2017, 2019 р.); Міжнародний симпозіум «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики» (м. Суми, 2015 р., м. Харків, 2017 р., м. Одеса, 2019 р.); «Сучасні інформаційні технології, засоби автоматизації та електропривод» (м. Краматорськ, 2018 р.); «Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях» (м. Київ, 2018, 2019 р.); «Комп’ютерна інженерія і кібербезпека : досягнення та інновації» (м. Кропивницький, 2018 р.); «Computer Modeling and Intelligent Systems» (м. Запоріжжя, 2019 р.); «Математика у технічному університеті XXI сторіччя» (м. Краматорськ, 2019 р.). У повному обсязі робота доповідалась на науковому семінарі кафедри вищої та прикладної математики ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет» (м. Маріуполь, 2019 р.), на міжкафедральному науковому семінарі факультету інформаційних технологій ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет» (м. Маріуполь, 2019 р.).

Публікації. За результатами проведених досліджень опубліковано 20 робіт, у яких відображений основний зміст дисертації та етапи її підготовки. Із них: 1 стаття в журналі, що індексується наукометричною базою Scopus [5], 4 - в спеціалізованих виданнях, що входять до переліку видань, рекомендованих ВАК України [1-4, 6-7], 13 тез [8-20].

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, п’яти розділів, висновків, списку використаної літератури та 6 додатків. Робота містить 95 рисунків, 14 таблиць, список використаної літератури, що складається з 162 найменувань, викладених на 17 сторінках. Загальний обсяг дисертації - 183 сторінки.

РОЗДІЛ 1. МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ РІДИНИ: КЛАССИЧНІ ТА КІНЕТИЧНІ МОДЕЛІ

1.1 Методи моделювання в сучасній обчислювальній гідродинаміці

Традиційно для моделювання руху рідини чисельно розв'язують рівняння Ейлера або Нав'є - Стокса. Рівняння Ейлера є одним із основних рівнянь гідродинаміки [1, 2]. Воно описує рух ідеальної рідини (стисливої або нестисливої) і має вигляд:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \nabla\right)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{F} \tag{1.1}$$

де $\vec{u} = \vec{u}\left(\vec{r}, t\right)$ – вектор швидкості рідини,

$\vec{r}$ – радіус-вектор точки простору,

t – час,

∇ – оператор Гамільтона,

ρ – густина,

$p = p\left(\vec{r}, t\right)$ – тиск,

$\vec{F}$ – рівнодіюча масових сил.

Рівняння Нав'є-Стокса – нелінійне диференціальне рівняння в частинних похідних, що описує рух в'язкої рідини. Для ізотермічної течії в'язкої нестисливої рідини рівняння має вигляд [3, 4]:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \nabla\right)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{u} + \vec{F} \tag{1.2}$$

де ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості,

Δ – оператор Лапласа.

До рівнянь руху (1.1) і (1.2) додається рівняння нерозривності, яке представляє собою рівняння збереження маси. Для нестисливої рідини рівняння нерозривності має вигляд [1, 2]:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{1.3}$$

Постановка гідродинамічної задачі обтікання тіла в’язкою рідиною складається із рівняння руху (1.2), рівняння нерозривності (1.3) та відповідних початкових та граничних умов. Початковою умовою є задане поле швидкостей у початковий момент часу t_0.

$$\vec{u}\left(\vec{r},t\right)\Big|_{t=t_0} = \vec{u}\left(\vec{r},t_0\right) \tag{1.4}$$

На контурі обтічного тіла L повинна виконуватися гранична умова прилипання:

$$\vec{u}\left(\vec{r},t\right)\Big|_{\vec{r}\in L} = 0 \tag{1.5}$$

Поле швидкостей повинно також задовольняти граничній умові на нескінченності:

$$\vec{u}\left(\vec{r},t\right)\Big|_{\left|\vec{r}\right|\to\infty} = \overrightarrow{u_\infty} \tag{1.6}$$

На сьогодні загального аналітичного розв’язку рівняння Нав’є-Стокса отримано не було. Розв’язок можна знайти лише для окремих випадків, обумовлених низкою припущень або простою геометрією [4, 5]. В інших випадках використовуються чисельні методи.

Методи обчислювальної гідродинаміки можуть бути класифіковані за принципом застосування в них різних підходів до опису суцільного середовища.

1.1.1 Підхід Ейлера

При використанні ейлерового підходу до опису суцільного середовища вивчається зміна таких характеристик рідини, як швидкість $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t)$ і тиск $p = p(x, y, z, t)$ у фіксованій точці простору з часом [2]. Розрахункова область розбивається нерухомою ейлеровою сіткою, на якій відповідне диференційне рівняння (Ейлера або Нав'є - Стокса) дискретизується. До методів, що базуються на ейлеровому підході, відносяться метод скінченних різниць (FDM, finite difference method), метод скінченних елементів (FEM, finite element method), метод скінченних об'ємів (FVM, finite volume method) та інші. Стисло викладемо ідеї цих методів.

Метод скінченних різниць базується на заміні похідних, що входять до рівнянь, їх різницевими аналогами [6]. З урахуванням крайових умов отримується система лінійних або нелінійних алгебраїчних рівнянь. Перевагами методу є простота реалізації і можливість побудови схем із більш високим порядком точності. До недоліків відноситься вибір правильної різницевої схеми, яка буде сходитися до розв'язку і обчислення на регулярній сітці, однак погано підходить для реальних фізичних задач зі складними границями.

Метод скінченних елементів на сьогодні є одним із найбільш поширених в обчислювальній гідродинаміці [6, 7]. Розрахункова область розбивається на скінченну кількість підобластей (елементів). У кожному елементі вибирається деяка апроксимуюча функція, як правило, поліном, незалежно від положення елемента на сітці. Невідома величина, що шукається, апроксимується цією функцією на елементі, а сама функція підбирається так, щоб у вузлах сітки сусідні значення функцій співпадали, тобто щоб виконувалася умова неперервності величини. Так виходить сукупність функцій, кожна з яких визначена на своїй підобласті. Ідея методу полягає в пошуку найкращого наближення точного розв'язку в просторі кусково-гладких функцій. Таким чином, чисельний розв'язок зводиться до мінімізації деякого функціоналу та розв’язку варіаційної задачі. Перевага методу скінченних елементів полягає в довільній формі області, на якій шукається розв’язок і можливості згущення або розрідження у відповідних місцях розрахункової сітки. Метод скінченних елементів широко використовується в комерційних програмних продуктах, таких як Comsol Multiphysics, ANSYS, Autodesk, Cosmos Floworks і багатьох інших.

Принцип методу скінченних об’ємів полягає в розбитті розрахункової області на скінченні об’єми. Розв’язок рівняння шукається в точках, які знаходяться в центрах цих об’ємів [6, 8]. Причому для кожного такого об’єму повинні виконуватися закони збереження маси, руху і енергії. Метод добре працює як на регулярних, так і на неструктурованих сітках, проте складний в програмуванні, зокрема через складнощі розв’язку системи нелінійних рівнянь, що не має певної структури. Незважаючи на це, метод скінченних об’ємів має широке застосування і використовується, зокрема, в таких пакетах обчислювальної гідродинаміки як Phoenics, FlowVision, Flow 3d, у вільному пакеті OpenFOAM та інших.

1.1.2 Підхід Лагранжа

При використанні лагранжевого підходу, в кожен момент часу відстежується положення частинок усередині розрахункової області [2]. До методів, що використовують лагранжевий підхід, відносяться, наприклад, гідродинаміка згладжених частинок [9] та дискретно-вихрові методи [10 - 12].

Метод гідродинаміки згладжених частинок (SPH від англ. Smoothed Particle Hydrodynamics) вперше був описаний для розв’язку задач астрофізики. Ідея методу полягає в оперуванні частинками, які мають довжину згладжування. Довжина згладжування – це деяка відстань, на якій властивості частинок згладжуються функцією ядра. Фізичні характеристики будь-якої частинки залежать від відповідних характеристик сусідніх частинок і можуть бути отримані шляхом додавання за всіма частинкам в межах двох згладжених довжин. Ряд програмного забезпечення, наприклад, RealFlow, GADGET, SPLASH, SPHysics, працює на основі методу SPH.

Метод дискретних вихорів, розроблений С. М. Білоцерківським [10], застосовується до моделювання відривних течій на основі моделі ідеальної нестисливої рідини. Він ґрунтується на апроксимації неперервної вихрової пелени набором упорядкованих дискретних вихрових систем, що складаються з нескінченно тонких вихрових ниток (рис. 1.1) [11, 12]. Метод дискретних вихорів широко застосовується для моделювання задач гідродинаміки, особливо теорії крила.

Рис. 1.1. Вихрова пелена за тілом (метод дискретних вихорів [11])

1.1.3 Гібридні методи

Широке поширення отримали гібридні методи, що поєднують у собі переваги ейлерового і лагранжевого підходів до опису суцільного середовища.

Першим гібридним методом для розв’язку нестаціонарних задач гідродинаміки став розроблений у 1955 році в США метод частинок у комірках Харлоу (PiC, від англ. ParticleinCell), побудований на основі рівняння Ейлера [6, 13 - 15]. Область розв’язку розбивається нерухомою ейлеровою сіткою на комірки, в яких знаходяться частинки (рис. 1.2). Суцільне середовище описується дискретною моделлю, як сукупність частинок фіксованої маси, які рухаються по комірках ейлерової сітки. Маса, імпульс, енергія і густина кожної комірки розраховується з урахуванням переміщення частинок, і, таким чином, закон збереження маси завжди задовольняється. Метод частинок у комірках зручно застосовувати для дослідження динаміки багатокомпонентних середовищ і течій із вільними поверхнями. Однак у нього є два головні недоліки. Перший випливає із дискретної природи уявлення про суцільне середовище. При обчисленні можливі флуктуації – нерегулярність переміщення частинок у просторі. Другий недолік – високі вимоги, що висуваються до обсягу пам'яті і швидкодії обчислювальних машин.

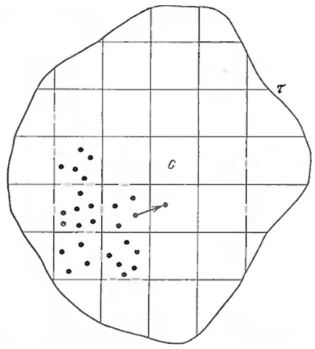


Рис. 1.2. Розрахункова область для методу частинок в комірках [13]

Метод частинок у комірках і сьогодні застосовується при моделюванні динаміки рідин, газів і плазми [15, 16]. Крім того, ідеї методу сприяли розвитку методу крупних частинок [13].

Метод крупних частинок був розроблений Давидовим Ю. М. та Білоцерковським О. М. у 1965 році при намаганні уникнути недоліків методу PiC і, в той же час, зберегти його сильні сторони. Обчислювальна область розбивається нерухомою ейлеровою сіткою, комірки якої розглядаються як крупні частинки. Рух таких крупних частинок моделюється на основі нестаціонарної моделі Ейлера. Таким чином, метод займає проміжне місце між методом частинок у комірках Харлоу і звичайними кінцево-різницевими підходами: використовуються закони збереження для комірки скінчених розмірів без подальшого граничного переходу до точки [13].

Метод крупних частинок має широкі обчислювальні можливості і дозволяє досліджувати складні картини обтікання тіл різної форми течіями від дозвукових до надзвукових швидкостей. Крім того, метод крупних частинок можна використовувати і для розв’язку рівняння Нав’є - Стокса, однак такі чисельні схеми не мають широкого застосування. Труднощі, що виникають у цьому випадку, пов’язані з появою нестійкості чисельної схеми з ростом числа Рейнольдса до критичного $\mathrm{Re} \sim 10^2 : 10^3$. Однак, незважаючи на це, були отримані надійні результати в діапазоні чисел Рейнольдса до $\mathrm{Re} < 10^3$.

У 1973 році з’явився метод обчислювальної гідродинаміки, що був заснований на ідеї клітинних автоматів – метод граткових газів або клітинно-автоматна гідродинаміка (LGA, від англ. Lattice Gas Cellular Automata) [17, 18]. У рамках цього методу розрахункова область розбивається сіткою, в комірках якої знаходиться ціле число частинок одиничної маси, яким дозволено мати одиничну швидкість в одному з фіксованих напрямків. Переміщення і зіткнення частинок описується дискретним кінетичним рівнянням Больцмана. Густина визначається кількістю частинок у комірці, а імпульс – сумою добутку кількості частинок на одиничну швидкість. Основними перевагами використання такої моделі є використання цілих значень, що виключає можливість накопичення помилок округлення, і можливість застосування технологій паралельних обчислень. Недоліком даного методу є сильний стохастичний шум, який з’являється при розрахунку густини, імпульсу і швидкості для окремих комірок. Тому на практиці використовуються осереднені значення. Крім того, для усунення цього шуму, замість цілого числа частинок було введено поняття концентрації частинок у комірках. Концентрація частинок – дійсне число, що описується за допомогою функції розподілу частинок за швидкостями і координатами з кінетичної теорії газів. Еволюція функції розподілу частинок при цьому описується кінетичним рівнянням Больцмана.

Так, у 1988 році розвитком клітинно-автоматної гідродинаміки став метод граткових рівнянь Больцмана (LBM, від англ. Lattice Boltzmann Method). Ідея методу аналогічна ідеї методу крупних частинок: обчислювальна область розбивається нерухомою ейлеровою сіткою, в комірках якої знаходяться крупні частинки. Однак динаміка таких частинок описується не рівняннями Ейлера або Нав'є - Стокса, а кінетичним рівнянням Больцмана [17, 19]. Показано виведення основних рівнянь гідродинаміки з рівняння Больцмана, що дає підстави для його використання при моделюванні гідродинамічних систем.

Оскільки метод граткових рівнянь Больцмана заснований на кінетичній теорії газів, введемо основні її положення і покажемо зв'язок між динамікою рідин і кінематикою газів.

1.2 Основні положення кінетичної теорії газів. Перехід від кінетичної теорії до гідродинаміки

1.2.1 Функція розподілу частинок

Кінетична теорія газів є розділом фізики, що вивчає поведінку газів, як системи, утвореної настільки великим числом молекул, що до них можна застосовувати статистичні закономірності [20]. Дослідження системи в статистичному сенсі призводить до того, що ми оперуємо ймовірностями замість достовірностей. Статистичні закономірності поведінки газу найпростіше визначати за допомогою функції розподілу газу за різними його станами [21]. Для визначення поняття функції розподілу розглянемо одноатомних газ, що знаходиться в нерівноважному стані. Виходячи з молекулярного уявлення про газ, як речовину, що складається з N молекул, стан газу можна описати N точками в шестивимірному фазовому просторі координат і швидкостей. Припустимо, що молекулами є пружні кульки, що взаємодіють за допомогою абсолютно пружного зіткнення (повна енергія і імпульс зберігаються). Також припустимо, що газ є ідеальним, тобто можна знехтувати впливом оточуючих частинок на зіткнення частинок газу. Тоді введемо для такого газу нерівноважну функцію розподілу [22]:

$$f\left(x, y, z, \upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z, t\right) \equiv f\left(\vec{r}, \vec{\upsilon}, t\right) \tag{1.7}$$

де $\vec{r} = (x, y, z)$ – вектор координат,

$\vec{\upsilon} = (\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$ – швидкість частинки газу.

З фізичної точки зору функція розподілу $f\left(\vec{r}, \vec{\upsilon}, t\right) d\vec{r} d\vec{\upsilon}$ є числом частинок, координати яких в момент часу t лежать в інтервалі $\vec{r} + d\vec{r}$, а складові відповідних швидкостей лежать в інтервалі $\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon}$. Тоді число частинок в одиниці фазового об'єму дорівнює:

$$dN = f\left(\vec{r}, \vec{\upsilon}, t\right) d\vec{r} d\vec{\upsilon} \tag{1.8}$$

Повне число частинок газу – це інтеграл по всьому об'єму газу і по всіх можливих значеннях швидкостей частинок газу:

$$\int f\left(\vec{r}, \vec{\upsilon}, t\right) d\vec{r} d\vec{\upsilon} = N \tag{1.9}$$

де N – число частинок газу

Густина газу $\rho = \rho\left(\vec{r}, t\right)$ пов'язана з функцією розподілу співвідношенням:

$$\rho\left(\vec{r}, t\right) = \int f\left(\vec{r}, \vec{\upsilon}, t\right) d\vec{\upsilon} \tag{1.10}$$

Для успішного застосування функції розподілу із кінетичної теорії газів необхідно знати вид кінетичного рівняння – закону, за яким такі функції змінюються. Кінетичні рівняння описують еволюцію функції розподілу молекул $f\left(\vec{r}, \vec{\upsilon}, t\right)$ або інших частинок або об'єктів (електронів, іонів, зірок, галактик) за швидкостями, координатами і часом *t*. Також відзначимо, що при відсутності зовнішніх впливів нерівноважні функції розподілу повинні переходити з часом у рівноважні .

Таким чином, основними задачами кінетичної теорії газів є:

- пошук кінетичних рівнянь, які описують зміну функції розподілу в просторі і з часом;
- встановлення зв'язків між функцією розподілу і макроскопічними характеристиками рідини.

1.2.2 Основні принципи опису нерівноважної системи

При релаксації функції розподілу існують різні масштаби часу. Так, для будь-якого реального газу існують три характерних інтервали часу [23]:

1. τ_0 – час зіткнення частинок. Це середній час, протягом якого дві частинки знаходяться в області одна одної. З цим часом пов'язаний радіус потенційної взаємодії r_0. Порядок величин: $\tau_0 \sim 10^{-12} c, r_0 \sim 10^{-8} см$.
2. τ_1 – середній час між зіткненнями. Це середній час, протягом якого зіткнення відсутні. З цим часом пов'язана середня довжина вільного пробігу λ. Порядок величин: $\tau_1 \sim 10^{-9} c, \lambda \sim 10^{-5} см$.
3. T_0 – час, який потрібен частинці, щоб перетнути посудину, заповнену газом. З цим параметром пов'язаний характерний розмір посудини *L*. Порядок величин: $T_0 \sim 10^{-4} c, L \sim 1\ см$.

Розглянуті часові масштаби задовольняють співвідношенню $\tau_0 << \tau_1 << T_0$. Відповідно до зазначеної нерівності, для опису еволюції системи на кожному етапі потрібне знання різного числа параметрів. Так можна говорити про три інтервали часу в розвитку газової системи (рис. 1.3):

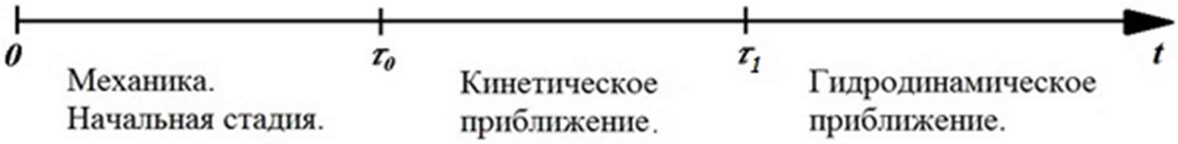


Рис. 1.3. Послідовність релаксаційних процесів

1. Механіка. Початкова стадія. Стан системи описується координатами і швидкостями всіх частинок системи.
2. Кінетичне наближення. Стан системи можна охарактеризувати статистично за допомогою одночасткової функції розподілу частинок за координатами і швидкостями $f\left(\vec{r},\vec{\upsilon},t\right)$.
3. Гідродинамічне наближення. В системі відбулося велике число зіткнень. У малих об'ємах молекулярної системи встановилася локальна рівновага, для опису якої досить знати такі локальні макроскопічні параметри, як густина $\rho\left(\vec{r},t\right)$, швидкість газу $\vec{\upsilon}\left(\vec{r},t\right)$, локальна температура $T\left(\vec{r},t\right)$.

1.2.3 Інтеграл зіткнення частинок. Рівняння Больцмана

Будемо вважати газ досить розрідженим і далі обмежимося розглядом лише парних зіткнень частинок. Нехай до зіткнення швидкості двох частинок були рівні $\overrightarrow{\upsilon_1}$ і $\overrightarrow{\upsilon_2}$ відповідно. З огляду на те, що при зіткненні сили взаємодії частинок значно більше зовнішніх сил, можна вважати, що ці частинки утворюють замкнену систему і для неї виконуються закони збереження кількості руху і енергії (рис. 1.4):

$$\overrightarrow{\upsilon_1} + \overrightarrow{\upsilon_2} = \overrightarrow{\upsilon_1}' + \overrightarrow{\upsilon_2}'$$
$$\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 = \upsilon_1'^2 + \upsilon_2'^2$$

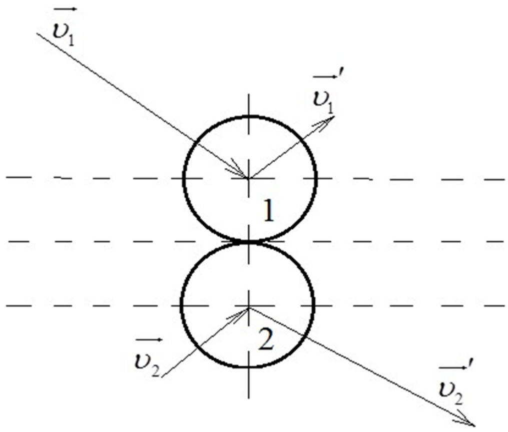


Рис. 1.4. Зіткнення двох частинок

Оскільки в результаті такого зіткнення двох частинок відбувається різка зміна їх швидкостей, то спостерігається стрибкоподібне переміщення фазових точок, які відповідають стану газу, в шестивимірному фазовому просторі (координат і швидкостей). Так, зміну числа частинок можна представити у вигляді рівняння:

$$\frac{d\left(dN\right)}{dt}=\left(I_{in}-I_{out}\right)d\vec{r}d\vec{\upsilon} \tag{1.11}$$

де $I_{out}d\vec{r}d\vec{\upsilon}$ – число частинок, які в результаті зіткнення залишають елемент фазового об'єму $d\vec{r}d\vec{\upsilon}$;

$I_{in}d\vec{r}d\vec{\upsilon}$ – число частинок, які в результаті зіткнення входять в елемент фазового об'єму $d\vec{r}d\vec{\upsilon}$.

Ґрунтуючись на формулі (1.11) і з огляду на (1.8), зміна числа частинок в елементі фазового об'єму має вигляд:

$$\frac{d\left(dN\right)}{dt}=\frac{df\left(\vec{r},\vec{\upsilon},t\right)d\vec{r}d\vec{\upsilon}}{dt}=\left(I_{in}-I_{out}\right)d\vec{r}d\vec{\upsilon} \tag{1.10}$$

Таким чином, отримаємо вираз:

$$\frac{df\left(\vec{r},\vec{\upsilon},t\right)}{dt}=I_{in}-I_{out} \tag{1.13}$$

Дану величину називають інтегралом зіткнень $I_{coll} = I_{in} - I_{out}$.

Інтеграл зіткнень є різницею джерел і стоків частинок, що відповідають появі та зникненні частинок в елементі фазового простору [24]. І, згідно з формулою (1.13), це швидкість зміни функції розподілу частинок. Розглянемо повну похідну функції розподілу:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \upsilon_x}\frac{d\upsilon_x}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \upsilon_y}\frac{d\upsilon_y}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \upsilon_z}\frac{d\upsilon_z}{dt} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\frac{\partial f}{\partial \vec{\upsilon}}$$

Із урахуванням рівнянь $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}, \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}$ отримаємо:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\upsilon}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{\upsilon}} \tag{1.14}$$

Прирівнюючи (1.13) і (1.14), отримаємо кінетичне рівняння Больцмана [22, 25]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\upsilon}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{\upsilon}} = I_{coll} \tag{1.15}$$

де $\vec{F}$ – вектор масових сил,

m – маса частинок.

Рівняння Больцмана є складним інтегро-диференційним рівнянням і має фундаментальне значення в кінетичній теорії [22, 23, 25, 26]. Вище було розглянуто виведення рівняння Больцмана тільки для парного зіткнення частинок, що звужує область застосування до випадку досить розріджених газів. Крім того, з одного боку, в основу виведення покладені зворотні в часі рівняння класичної механіки, а, з іншого боку, можна показати, що в результаті зіткнень у газі встановлюється молекулярний хаос і ентропія газу монотонно зростає [27]. При цьому не ясно, в якому місці в хід викладок вноситься імовірнісний характер. Проте, це виведення є досить простим і наочним. З іншим, більш складним і ґрунтовним виведенням рівняння Больцмана, що враховує ці недоліки, можна ознайомитися в роботах [22, 25].

1.2.4 Перехід від кінетичної теорії газів до динаміки рідини

Нехай газ як ціле рухається із середньою швидкістю $\vec{u}$. Швидкості руху різних об’ємів газу є різними, так що $\vec{u} = \vec{u}\left(\vec{r}, t\right)$. Масова швидкість $\vec{u}$ є тим ефектом молекулярного руху, який ми можемо сприймати за допомогою спостереження. Кожна молекула має деяку швидкість $\vec{\upsilon}$, яка складається з суми $\vec{u}$ і швидкості $\vec{\upsilon}_c$, яка описує випадкове відхилення швидкості молекули від упорядкованого руху [28].

$$\vec{\upsilon} = \vec{u} + \vec{\upsilon}_c \tag{1.16}$$

Швидкість $\vec{\upsilon}_c$ – власна чи теплова швидкість. Власна швидкість збігається з $\vec{\upsilon}$, коли газ макроскопічно нерухомий. Середнє значення $\left\langle \vec{\upsilon}_c \right\rangle = 0$.

Розглянемо довільну функцію швидкості відносного руху $g\left(\vec{c}\right)$. І розглянемо середнє значення цієї функції, беручи до уваги, що середнє значення деякої функції A є:

$$\left\langle A \right\rangle = \frac{\int A f d\vec{\upsilon}}{\int f d\vec{\upsilon}} \tag{1.17}$$

Так, середнє значення функції g є:

$$\left\langle g \right\rangle = \frac{\int g f d\vec{\upsilon}}{\int f d\vec{\upsilon}} = \frac{1}{N} \int g\left(\vec{\upsilon}_c\right) f d\vec{\upsilon} \tag{1.18}$$

Помножимо ліву і праву частини кінетичного рівняння Больцмана (1.15) на функцію $g\left(\vec{\upsilon}_c\right)$ і проінтегруємо його за швидкостями:

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} g d\vec{\upsilon} + \int \vec{\upsilon} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} g d\vec{\upsilon} + \int \frac{\vec{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \vec{\upsilon}} g d\vec{\upsilon} = \int I_{coll} g d\vec{\upsilon} \tag{1.19}$$

Перетворимо складові в лівій частині рівняння (1.19) з урахуванням формули (1.18):

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\partial f}{\partial t} g d\vec{\upsilon} = \frac{\partial}{\partial t} \int f g d\vec{\upsilon} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\langle g \rangle N\right) = \langle g \rangle \frac{\partial N}{\partial t} + N \frac{\partial \langle g \rangle}{\partial t} \\
&\int \vec{\upsilon} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} g d\vec{\upsilon} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \int g \vec{\upsilon} f d\vec{\upsilon} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(N \left\langle g \vec{\upsilon} \right\rangle\right) \\
&\int \frac{\vec{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \vec{\upsilon}} g d\vec{\upsilon} = \frac{\vec{F}}{m} \int \frac{\partial f}{\partial \vec{\upsilon}} g d\vec{\upsilon} = \frac{\vec{F}}{m}\left[\int \frac{\partial (gf)}{\partial \vec{\upsilon}} d\vec{\upsilon} - \int f \frac{\partial g}{\partial \vec{\upsilon}} d\vec{\upsilon}\right] = -N \frac{\vec{F}}{m} \left\langle \frac{\partial g}{\partial \vec{\upsilon}} \right\rangle
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Останнє рівняння отримано із застосуванням властивості похідної добутку $\frac{\partial f}{\partial \vec{\upsilon}} g = \frac{\partial (gf)}{\partial \vec{\upsilon}} - f \frac{\partial g}{\partial \vec{\upsilon}}$. При цьому передбачається, що функція розподілу f спадає досить швидко з ростом абсолютної величини швидкості, так що (gf) прямує до нуля при $|\upsilon| \to \infty$. Об'єднуючи (1.19) і (1.20) отримаємо:

$$\langle g \rangle \frac{\partial N}{\partial t} + N \frac{\partial \langle g \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(N \left\langle g \vec{\upsilon} \right\rangle\right) - N \frac{\vec{F}}{m} \left\langle \frac{\partial g}{\partial \vec{\upsilon}} \right\rangle = \int I_{coll} g d\vec{\upsilon}$$

$$\frac{\partial \left(N \langle g \rangle\right)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(N \left\langle g \vec{\upsilon} \right\rangle\right) - N \frac{\vec{F}}{m} \left\langle \frac{\partial g}{\partial \vec{\upsilon}} \right\rangle = \int I_{coll} g d\vec{\upsilon} \tag{1.21}$$

Рівняння (1.21) носить назву рівняння Енського або узагальненого рівняння переносу [29]. Якщо функція g є одним із адитивних інтегралів руху [27] φ: $\varphi_1 = m,\ \varphi_{2,3,4} = m\vec{\upsilon},\ \varphi_5 = m\frac{\vec{\upsilon}^2}{2}$, то рівняння Енського істотно спрощується. Якщо враховувати, що макроскопічна густина речовини дорівнює $\rho = mN$, то для $g = m$, з урахуванням формули (1.16) загальне рівняння переносу набуває вигляду:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho \vec{u} \right)}{\partial \vec{r}} = 0 \tag{1.22}$$

Рівняння (1.22) описує зміну з часом масової густини і є рівнянням нерозривності [1, 2]. Отримане рівняння є законом збереження маси в рухомому середовищі і може бути застосовано не тільки до розріджених газів, а й до рідин.

Істотний внесок в кінетичну теорію внесли С. Чепмен і Д. Енског на початку 20 століття, розробивши метод отримання рівняння Нав'є-Стокса з рівняння Больцмана [28, 29]. В основі методу лежить теорія збурень. Функція розподілу розкладається в ряд за степенями малого параметра ε: $f = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_n$. У якості малого параметра на гідродинамічній стадії може виступати число Кнудсена $\varepsilon = K_n = \frac{\lambda}{L}$ – відношення середньої довжини вільного пробігу частинок λ до характерної довжині розміру посудини *L*, яке визначає ступінь розрідженості газу [28].

1.3 Етапи розвитку методу граткових рівнянь Больцмана

Перша згадка про метод граткових рівнянь Больцмана з'явилась у 1988 і 1989 роках в роботах [30, 31] як розвиток клітинно-автоматної гідродинаміки LGA [17, 18].

У методі LGA область розбивається нерухомою ейлеровою сіткою, а всередині комірок розташовуються частинки. Рух частинок заснований на ідеї клітинних автоматів. Деяке число частинок переміщується у гратковому просторі в сусідні комірки і зіштовхується в них за законами динаміки газів (рівняння Больцмана). Недоліком такого підходу є вимушене осереднення числа частинок, яке виконується для того, щоб придушити стохастичний шум і можливі флуктуації, що випливають із дискретної природи уявлення рідини.

Для усунення цих недоліків була введена концентрація частинок у комірках через функцію розподілу частинок за координатами і швидкостями з кінетичної теорії газів. Ця функція розподілу описує еволюцію частинок газів і є розв’язом кінетичного рівняння Больцмана. Такий підхід дозволяє виключити стохастичний шум і зменшити флуктуації, що виникають при моделюванні методом LGA. Крім цього, оператор зіткнення частинок замінюється неперервною функцією від часу релаксації, наприклад у вигляді наближення Бхатнагар - Гросса - Крука (BGK). Такий підхід отримав назву методу граткових рівнянь Больцмана (LBM, від англ. Lattice Boltzmann Method) (рис. 1.5).

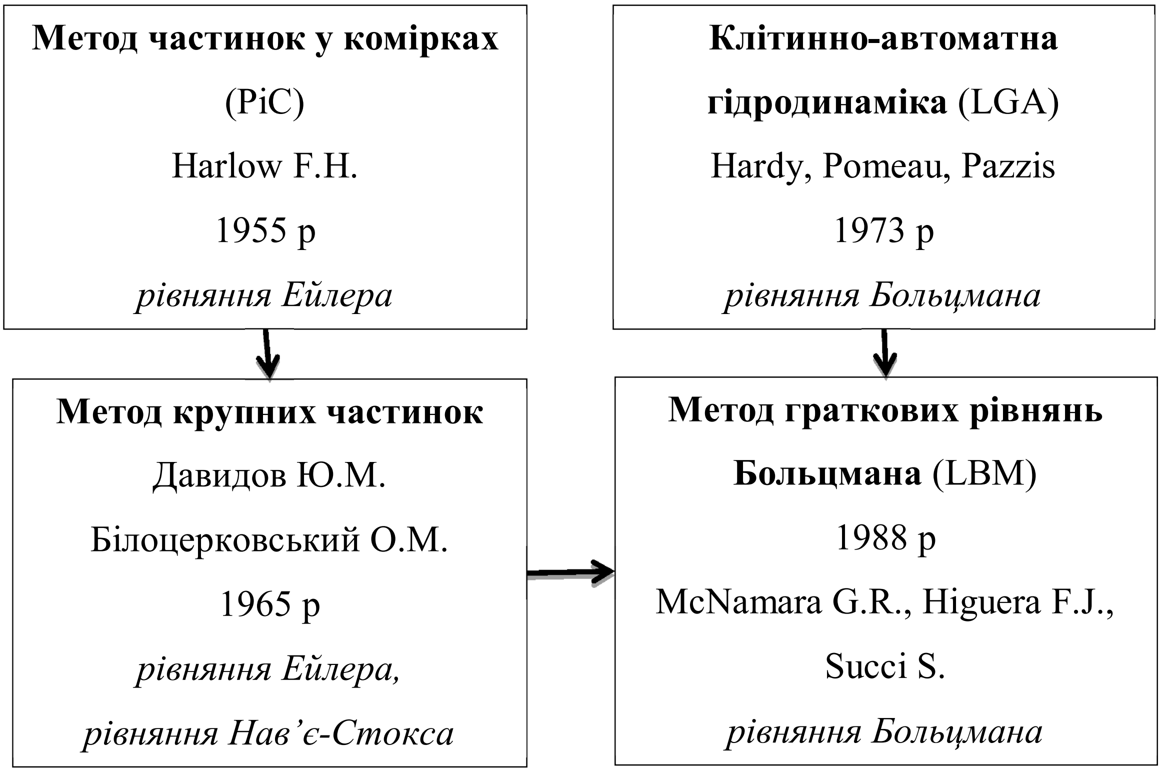


Рис. 1.5. Схема розвитку гібридних методів обчислювальної гідродинаміки

Ідея методу LBM аналогічна ідеї методу крупних частинок Білоцерковського О. М. та Давидова Ю. М (п. 1.1.3). Обчислювальна область розбивається нерухомою ейлеровою сіткою, комірки якої трактуються як крупні частинки. Однак динаміка таких частинок описується не рівняннями

Ейлера або Нав'є - Стокса, а дискретним кінетичним рівнянням Больцмана [21]. Характеристики крупних частинок відповідають усередненим характеристикам усієї сукупності мікроскопічних частинок і описуються статистично за допомогою функції розподілу частинок за координатами і швидкостями. У ряді робіт, наприклад [22, 23], показано виведення основних рівнянь гідродинаміки з рівняння Больцмана, що дає підстави для його використання при моделюванні гідродинамічних систем.

Подальший внесок вніс S. Succi і в 1991 році у своїй роботі [32] описав метод граткових рівнянь Больцмана як новий метод у обчислювальній гідродинаміці: ідею методу, основні рівняння, перспективи розвитку.

Наступна робота з методу з'явилася в 1993 році. У ній P. Skordos виклав можливі двовимірні моделі решіток для побудови граткових схем. Були розглянуті квадратна модель з дев'ятьма напрямками переміщення частинок і шестикутна – з сімома напрямками [33]. У цій же роботі викладено спосіб задання в'язкості рідини через параметр релаксації і описані методи постановки початкових і граничних умов. У тому ж році D. O. Martinez, W. H. Matthaeus, S. Chen провели порівняльний аналіз методу LBM і спектрального методу [34]. Порівняння показало високу точність отриманих розв'язків. Крім того, було відзначено, що LBM у 2,5 рази ефективніше спектрального методу.

У 1994 році було проведено чисельне моделювання течії в'язкої рідини в квадратній каверні за допомогою двовимірної дев'ятишвидкісної моделі методу граткових рівнянь Больцмана [35]. Було досліджено вплив розміру комірки на точність отриманих результатів.

Розвиваючи ідею методу LBM, X. He, L. Luo і L. Zou у 1997 році опублікували роботи, що описують дискретизацію рівняння Больцмана в часі і у просторі, а також можливі двовимірні (D2Q6, D2Q7, D2Q9) і тривимірні (D3Q27) моделі решіток [36]. Докладно розглянуті методи задання граничних умов для багатьох прикладних задач [37], якими користуються і сьогодні. Розглянуто виведення рівнянь гідродинаміки з граткового рівняння

Больцмана. Описано границі застосування чисельних схем, їх стійкість. Розв'язана задача про течію рідини в плоскому каналі [38].

Вже в 1998 році опублікована оглядова стаття за методом [39], в якій з'явилася перша згадка про можливість моделювання багатофазних і багатокомпонентних течії методом граткових рівнянь Больцмана. Розглянуто основні рівняння, чисельні схеми і способи задання граничних умов. Розглядалася задача моделювання конденсації рідких крапель у перенасиченому розчині.

Продовжуючи розвивати метод, S. Succi у 2000 році опублікував монографію з докладним описом методу, методик побудови чисельних схем на основі різних моделей решіток і методів задання початкових і граничних умов [40]. У тому ж році M. Breuer, J. Bernsdorf, T. Zeiser, F. Durst провели чисельний експеримент із моделювання обтікання квадратного циліндра в плоскому каналі і порівняли отримані результати з результатами чисельного експерименту, проведеного методом скінченних об'ємів [41]. У роботі були розглянуті як стаціонарні, так і нестаціонарні течії. Число Рейнольдса при цьому варіювалось в інтервалі $0,5 \le \mathrm{Re} \le 200$. Крім того, були описані способи задання граничних умов на вході і на виході рідини з каналу, що були застосовані до цієї задачі.

Паралельно з попередніми дослідженнями були опубліковані роботи [42, 43], в яких викладено принципи дискретизації рівняння Больцмана і процедури розкладу Чепмена - Енського. Крім того, описано оператор зіткнень і різні чисельні параметри, такі як швидкість звуку в комірці.

У роботі [44], опублікованій у 2002 році, R. Mei, D. Yu, W. Shyy, L. Luo вперше докладно описали методику розрахунку коефіцієнтів лобового опору і підйомної сили на прикладі кругового циліндра, побудованого на гратковому просторі без урахування границь комірок (рис. 1.6).

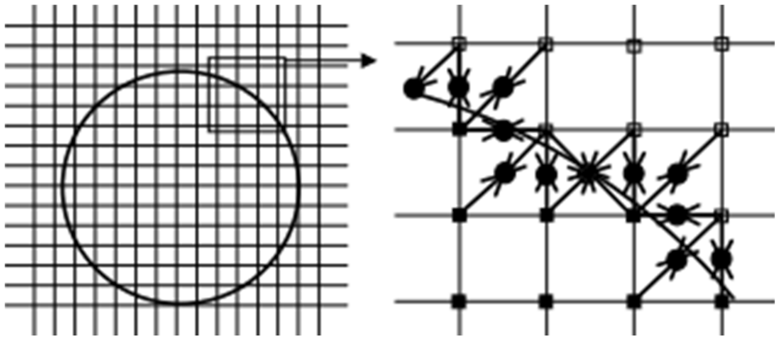


Рис. 1.6. Схема побудови кругового циліндра без урахування границь комірок [44]

У тому ж році за допомогою двовимірної моделі D2Q9 було проведено чисельне моделювання течій Пуазейля і Куетта для малих і помірних чисел Рейнольдса $0{,}1 \le \mathrm{Re} \le 100$, течії рідини в квадратній каверні для чисел $\mathrm{Re} \le 1000$ [45]. Вперше в задачі задавалося значення параметра релаксації τ менше 1.

D. Yu та ін. у своїй роботі [46] в 2003 році описали застосування різних моделей інтегралів зіткнення частинок, а саме SRT і MRT, для двовимірної моделі методу. Розглядалися такі задачі: обтікання кругового циліндра в плоскому каналі для течії з числом Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1000$, течії рідини в квадратній каверні і обтікання профіля NASA 0012. Тіла обтікання будувалися без урахування кордонів комірок. Докладно описані методики задання граничних умов, необхідні для розв’язання поставлених задач. Були розглянуті різні підходи в обчисленні гідродинамічних коефіцієнтів. Проведено моделювання турбулентних течій в мікроканалах.

R. R. Nourgaliev в роботі [47] і S. Geller в [48] дали загальний опис методу, чисельних схем і граткових моделей. Nourgaliev розглянув можливості моделювання багатофазних течій, використовуючи двовимірну (D2Q9) і тривимірну модель решіток (D3Q15). Крім того, в роботі [47] було розглянуто застосування методу до задачі з вільними поверхнями – падіння стіни рідини.

У 2004 році першим в Росії ідею методу продовжив розвивати А. Л. Куперштох. У своїй першій роботі [49] він простежив історію розвитку основних дискретних моделей рідин, описав ідею методу, принцип розкладу Чепмена - Енського. Розглянуто одновимірну модель D1Q3 і урахування дії об'ємних сил при моделюванні рідини.

У 2006 році J. J. Derksen в своїй статті [50] і M.C. Sucop в своїй книзі [51] описали програмну реалізацію методу і методики реалізації граничних умов для спрощеної схеми методу. Крім того, Derksen описав побудову тіл обтікання на розрахунковій сітці, а Sucop описав моделі інтегралів зіткнень, застосування методу до моделювання багатофазних і багатокомпонентних течій, а також течій у пористих середовищах. Розглянуто течію Пуазейля і обтікання кругового циліндра потоком рідини з числом Рейнольдса $\mathrm{Re} < 105$.

У 2008-2009 роках метод бурхливо розвивається. Опубліковані роботи [52-57], в яких, окрім уже існуючих обґрунтувань методу, чисельних схем, граткових моделей і граничних умов, розв'язувались нові прикладні задачі. Була розглянута модель D3Q15 [52], змодельовані течії в кавернах різних конфігурацій [53] та течія біля кругового циліндра, що обертається для числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 200$ при різних розмірах розрахункової сітки [55], змодельована течія у зігнутій трубі [56]. Істотний внесок у постанову граничних умов внесли автори роботи [57]. У роботі [58] Б. В. Сидоренко використовував MRT-модель методу граткових рівнянь Больцмана для моделювання мілководних водойм із урахуванням впливу зовнішніх сил. У роботі [60] було використано неодиничні значення параметра релаксації при моделюванні обтікання квадратного циліндра в каналах різних конфігурацій для максимального числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 100$.

А. Л. Куперштох у 2010 році в своїх роботах [61-62] провів моделювання двофазної системи типу рідина-пар і описав чисельну стійкість методу. У тому ж році A. Narvarz дав повний опис тривимірної граткової моделі D3Q19 для BGK і MRT моделей оператора зіткнень [63].

У 2011 році було розглянуто наступні можливості методу: моделювання неізотермічних течій на основі двовимірних (D2Q4, D2Q9) MRT-моделей [64]; обтікання циліндра, що обертається для $\mathrm{Re} = 200$ на основі MRT-моделі [65]; обгрунтування методу, що включає виведення рівняння Нав'є - Стокса з граткового рівняння Больцмана, дискретизацію рівнянь і постановку граничних умов, моделювання мікротечій, реалізацію алгоритму в середовищі комп'ютерної математики MatLab [66]; обчислення гідродинамічних коефіцієнтів при побудові тіл обтікання без урахування границь комірок за допомогою MRT-моделі методу для двох циліндрів, що обертаються [67]; можливість проведення обчислень на графічних прискорювачах [68].

У наступні роки кількість публікацій з методу LBM істотно зросла. Науковий інтерес визначив нові можливості методу, більш ґрунтовний теоретичний опис і обґрунтування методу, нові прикладні задачі, які були розв'язані методом граткових рівнянь Больцмана. А саме, було проведено моделювання:

- течії Пуазейля в роботах [69, 70, 76, 78, 92];
- ізотермічних течій в каверні [69, 71, 85, 78, 87, 88, 91, 92, 102];
- течії в каверні з теплообміном [72, 90];
- вихору Тейлора - Гріна [69, 70];
- обтікання кругового циліндра течією з числом Рейнольдса $\mathrm{Re} \leq 200$ [73, 74, 89, 94];
- обтікання ромбовидного циліндра з $\mathrm{Re} \leq 200$ [74];
- обтікання еліптичного циліндра з $\mathrm{Re} \leq 100$ [75];
- обтікання трикутного циліндра з $\mathrm{Re} \leq 133$ [77, 98];
- обтікання квадратного циліндра з $\mathrm{Re} \leq 100$ [78, 99];
- обтікання двох кругових циліндрів [79];
- обтікання плоскої пластини [80];

Розглянуто ряд нових можливостей методу, серед яких:

- методи обчислення гідродинамічних коефіцієнтів [73, 75, 89, 94, 93, 95, 98, 100];
- можливість моделювання тривимірних течій [81, 82, 84, 100];
- метод розщеплення чисельного алгоритму [83, 85, 87, 97];
- можливість виконувати обчислення на графічних прискорювачах [76, 83, 84];
- можливість моделювати багатофазні течії [86, 101, 105];
- можливість моделювати течії в пористих середовищах [86, 100];

Розширився й теоретичний опис методу:

- детально розглянуто обґрунтування методу і процес розкладу Чепмена - Енського [85, 87, 88, 96, 97];
- теоретично досліджена стійкості методу [69, 85, 91, 92, 96, 103, 104].

На сьогодні метод граткових рівнянь Больцмана набуває все більшого поширення. Як було показано, велика частина робіт, присвячених розвитку цього методу, належить вченим із країн Європи та Америки: S. Succi, F. Higuera, Y. L. He, Q. Li, Q. Chen, J. Latt, Q. Liu, K. H. Luo, A. Perumal, V. S. Kumar, A. K. Dass, D. Wolf - Gladrow та іншим, а також невеликій групі вчених із Росії, серед яких: А. Л. Куперштох, Г. В. Кривовичев, Д. А. Бікулов, Д. С. Сенін. В Україні застосування методу до моделювання мікротечій викладено в роботах Тирінова И. І., Авраменка А. А., Басок Б. І. та Давиденка Б. В. Зростаюча популярність методу обумовлена низкою його переваг:

1. всі етапи моделювання описуються лінійними рівняннями;
2. граничні умови задаються у вигляді простих механічних правил, що описують взаємодію частинок за законами кінетичної теорії;
3. моделювання течій можна проводити в областях довільної складної геометрії;
4. використовується явна схема врахування впливу зовнішніх сил та обчислення тиску;

5. до алгоритму легко застосовуються технологій паралельних обчислень;

6. можна розв'язувати широкий клас задач, зокрема проводити мультифізичне моделювання.

Метод граткових рівнянь Больцмана є ефективним при моделюванні багатофазових, багатокомпонентних течій та течій у пористих середовищах з малими числами Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 10$. Однак, незважаючи на зростаючу популярність, ще існують такі проблеми:

1. Значний час розрахунків, що істотно збільшується із зростанням числа Рейнольдса;

2. Умовна стійкість чисельної схеми.

Ці проблеми ускладнюють отримання чисельних розв'язків для течій із помірними числами Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 10^2$ та унеможливлюють моделювання при великих числах $\mathrm{Re} > 10^3$. Для їх часткового усунення при малих числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} \sim 10$) використовують, наприклад, схеми із декількома параметрами релаксації в інтегралі зіткнень частинок або неявні схеми. Проте вище наведені проблеми до кінця не розв'язані і визначають актуальність теми дисертації, а також її наукове і практичне значення.

Аналіз результатів першого розділу дав змогу *сформулювати задачу дисертаційного дослідження:* розвинути метод граткових рівнянь Больцмана задля отримання стійких розв'язків за менший проміжок часу при моделюванні течій в'язкої рідини з помірними та великими числами Рейнольдса.

Висновки за розділом 1

У цьому розділі розглянуто основні ідеї моделювання динаміки рідини в сучасній обчислювальній гідродинаміці, а також етапи розвитку, перспективи та проблеми методу граткових рівнянь Больцмана. Коротко їх можна підсумувати наступним чином:

1. Метод граткових рівнянь Больцмана – метод обчислювальної гідродинаміки, що використовує кінетичне рівнянням Больцмана для моделювання течій в'язкої рідини. Обчислювальна область розбивається нерухомою сіткою, комірки якої трактуються як крупні мезоскопічні частинки. Таки частинки описуються функцією розподілу частинок за швидкостями із кінетичної теорії газів. Всі макроскопічні параметри рідини, такі як густина, швидкість або тиск обчислюються через ці функції розподілу.

2. Серією робіт доведено зв'язок кінетичного рівняння Больцмана із рівняннями гідродинаміки. За допомогою процедури розкладу Чепмена-Енського з рівняння Больцмана можна отримати рівняння Нав'є-Стокса, що служить обґрунтуванням для застосування кінетичного рівняння для моделювання течій в'язкої рідини.

3. Метод граткових рівнянь Больцмана є перспективним методом обчислювальної гідродинаміки, що продовжує набирати популярність. Однак, незважаючи на зростаючий науковий інтерес, поки залишається проблематичним моделювання течій із помірними та великими числами Рейнольдса. Задачі обтікання, розглянуті раніше, розв'язувались переважно для течій при малих числах Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 10$, окремі задачі до $\mathrm{Re} < 200$. Проблемою є і швидкість розрахунків, що стрімко зростає з ростом числа Рейнольдса.

РОЗДІЛ 2. МЕТОД ГРАТКОВИХ РІВНЯНЬ БОЛЬЦМАНА

Метод граткових рівнянь Больцмана – це метод обчислювальної гідродинаміки, що використовує молекулярно-кінетичний підхід для опису гідродинамічних систем [30-32]. Базуючись на уявленні рідини як сукупності дуже великої кількості молекул, всі макроскопічні просторово-часові зміни в гідродинамічній системі можуть бути визначені через осереднені кінетичні (мікроскопічні) характеристики даних частинок. Таким чином, маємо три рівні абстракції (рис. 2.1):

- мікроскопічний рівень, що описує динаміку кожної частинки, з яких складається суцільне середовище (наприклад, за допомогою ньютонівської механіки);
- мезоскопічний рівень, на якому розглядаються осереднені параметри деякої сукупності частинок, з яких складається суцільне середовище;
- макроскопічний рівень, на якому оперуємо параметрами рідини, такими як густина ρ, швидкість руху $\vec{u}$, тиск p і температура T. На цьому рівні працюють класичні методи обчислювальної гідродинаміки (п. 1.1), що базуються на рівняннях Ейлера чи Нав'є - Стокса.

У статистичній механіці зв'язок між макроскопічними параметрами рідини і мікроскопічними параметрами структуроутворюючих частинок вводиться через одночасткову функцію розподілу частинок за швидкостями і координатами $f\left(\vec{r},\vec{\upsilon},t\right)$ (п. 1.2.1), яка є розв'язком кінетичного рівняння Больцмана (1.12) [19- 24].

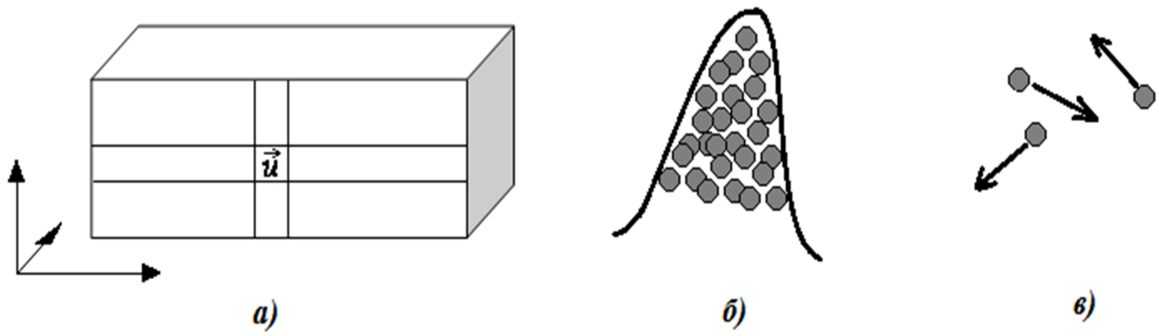


Рис. 2.1. Рівні абстракції при описі суцільного середовища
а) макроскопічний рівень б) мезоскопічний рівень
в) мікроскопічний рівень.

Таким чином, метод граткових рівнянь Больцмана працює на мезоскопічному рівні, розбиваючи суцільне середовище на деякі малі області, що складаються з великої кількості частинок. У кожній такій малій області розглядаються осереднені характеристики частинок за допомогою функції розподілу частинок. Тому на мезоскопічному рівні абстракції динаміка рідини буде моделюватися не рівняннями Ейлера чи Нав’є-Стокса, а рівнянням Больцмана.

З точки зору формального опису, мікроскопічна та мезоскопічна динаміка системи частинок набагато простіша, ніж динаміка суцільного середовища: частинки знаходяться лише у поступальному русі, взаємодіють між собою і твердою поверхнею на границі розділу середовищ і відчувають деякі додаткові ефекти, що обумовлені наявністю зовнішніх сил. З цього випливає основна перевага використання молекулярно-кінетичного підходу для опису гідродинамічних систем: легкість в описі та програмуванні, можливість розв’язку задач для довільних обчислювальних областей. Крім того, даний підхід дозволяє легко враховувати наявність різних додаткових зовнішніх впливів і явищ у системі [49].

2.1 Опис узагальненого методу LBM

Метод граткових рівнянь Больцмана (LBM, від англ. Lattice Boltzmann Method) – чисельний метод, що використовує як ейлерів так і лагранжевий підходи при моделювання динаміки рідини [6]. Спочатку розрахункова область розбивається нерухомою ейлеровою сіткою, в комірках якої знаходяться частинки. Так, на відміну від суцільного простору, де частинкам дозволено рухатися в довільному напрямку, вводиться гратковий простір, в якому частинки можуть переміщатися виключно вздовж зв'язків деякої періодичної решітки (рис. 2.2). Для опису моделі решітки в залежності від розмірності задачі і від набору можливих напрямків переміщення частинок вводиться позначення виду *DpQn*, де $p \in \{1,2,3\}$ – розмірність фізичного простору, а $n \in N$ – число можливих напрямків [33, 36, 40].

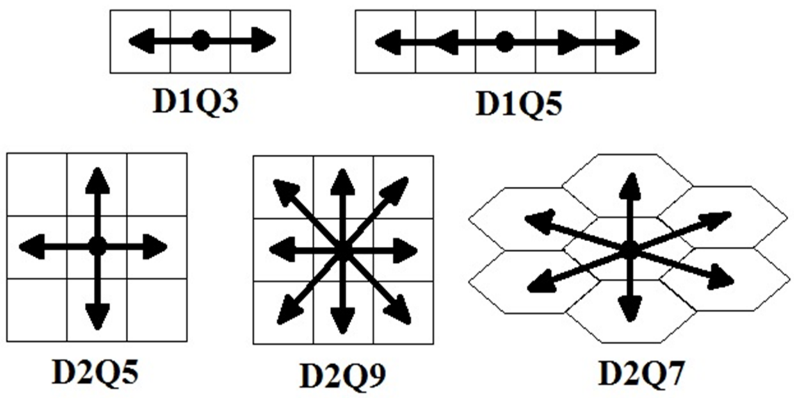


Рис. 2.2. Моделі решіток

Течія рідини розглядається як динаміка ансамблю крупних частинок [32, 61, 88]. За крок у часі Δt частинки без взаємодії одна з одною переходять до сусідньої комірки. Взаємодія (абсолютно пружне зіткнення) може здійснюватися тільки в комірках сітки. Динаміка ансамблю таких частинок або псевдочастинок описується статистично за допомогою апарату кінетичної теорії газів, викладеного в п. 1.2.

2.2 Дискретизація рівняння Больцмана

Далі будемо вважати, що зовнішні сили відсутні $\vec{F} = 0$. Тоді рівняння Больцмана (1.12) набуде вигляду:

$$\frac{\partial f\left(\vec{r},\vec{\upsilon},t\right)}{\partial t} + \vec{\upsilon}\frac{\partial f\left(\vec{r},\vec{\upsilon},t\right)}{\partial \vec{r}} = I_{coll} \qquad (2.1)$$

Дискретизація рівняння (2.1) проводиться в два етапи: на першому етапі здійснюється дискретизація у просторі швидкостей, на другому етапі - дискретизація за часом і просторовими змінними. Для дискретизації в просторі швидкостей задається кінцева сукупність векторів можливих напрямків переміщення частинок $\{\vec{\mathrm{e}}_k\}_{k=1}^{n}$ і відповідні їм вектори можливих швидкостей $\vec{V}_k$. Кожному вектору із заданої сукупності ставиться у відповідність своя дискретна функція розподілу частинок за швидкостями, що залежить тільки від моменту часу t і точки простору $\vec{r}$: $f_k(\vec{r},t),\ k = \overline{1,n}$. Кожне значення такої функції розподілу описує ймовірність частинки мати одну із швидкостей з дискретного набору швидкостей $\vec{V}_k$. Таким чином, рівняння (2.1) може бути зведено до системи рівнянь в частинних похідних від f_k у вигляді [15, 42, 43, 53]:

$$\frac{\partial f_k(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{V}_k\frac{\partial f_k(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}} = \left(I_{coll}\right)_k \qquad (2.2)$$

де $\vec{V}_k$ – дискретна сукупність векторів швидкостей переміщення частинок;

$\left(I_{coll}\right)_k$ – оператор зіткнення частинок – дискретизована під задану схему чисельного методу модель інтегралу зіткнень [35, 106].

Рівняння (2.2) – рівняння Больцмана з дискретними швидкостями. Розглядаючи рівномірну за часом і просторовими змінними сітку і, з огляду на те, що частинки за крок у часі переходять у сусідні комірки розрахункової сітки, може бути отримане граткове рівняння Больцмана [15]:

$$f_k(\vec{r}+\vec{V}_k\Delta t, t+\Delta t) = f_k(\vec{r},t) + \left(I_{coll}\right)_k (f_k(\vec{r},t)) \tag{2.3}$$

2.3 Модель зіткнень Бхатнагара - Гросса - Крука

Найбільшою проблемою при розв’язку рівняння Больцмана є інтеграл зіткнення частинок – нелінійний функціонал, що відображає зміну функції розподілу в результаті зіткнення частинок. Вирішенням цієї проблеми є заміна інтегралу зіткнень на більш простий вираз – модель зіткнень. Ця модель повинна відображати основні властивості інтегралу зіткнень:

1. Ортогональність будь-якому із інваріантів зіткнення (п. 1.2.3), що виражає закони збереження маси, імпульсу та енергії:

$$\int 1 I_{coll} dv = \int V_k I_{coll} dv = \int c^2 I_{coll} dv = 0$$

2. Ентропія процесу зіткнення завжди невід’ємна (дисипативність моделі зіткнення):

$$-\int I_{coll} \ln f dv \geq 0$$

3. У рівноважному стані частинки розподілені відповідно до локальної рівноважної функції розподілу Максвела-Больцмана:

$$I_{coll} = 0 \Rightarrow f = f^{eq}\left(\rho, \vec{u}, t\right)$$

Однією із моделей зіткнення частинок, що використовується для опису інтегралу зіткнень I_{coll} із рівняння Больцмана (1.12), є наближення Бхатнагара-Гросса-Крука або BGK (від англ. Bhatnagar-Gross-Krook). Модель BGK є лінійним наближенням до локальної рівноваги Максвела-Больцмана у вигляді [35-37]:

$$I_{coll} \approx \frac{f^{eq}(\vec{\upsilon},t) - f(\vec{\upsilon},t)}{\tau} \tag{2.4}$$

де τ – безрозмірний параметр релаксації, зміст якого – час переходу функції розподілу до локального рівноважного стану. Порядок τ збігається із порядком середнього часу вільного пробігу молекул газу; $f^{eq}(\vec{\upsilon},t)$ – локальна рівноважна функція розподілу.

У методі граткових рівнянь Больцмана використовується оператор зіткнення частинок $\left(I_{coll}\right)_k$, що отримується шляхом дискретизації BGK-моделі зіткнень (2.4) під задану схему чисельного методу [37]:

$$\left(I_{coll}\right)_k = \frac{f_k^{eq}(\vec{r},t) - f_k(\vec{r},t)}{\tau} \tag{2.5}$$

де f_k^{eq} – апроксимація локальної рівноважної функції розподілу.

2.4 Рівноважна функція розподілу

В якості рівноважної функції розподілу в рамках LBM використовують локальну рівноважну функцію розподілу Максвела-Больцмана [36, 107, 108]:

$$f^{eq}\left(\vec{\upsilon},t\right) = \rho\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{D}{2}} e^{-\frac{m\left(\vec{\upsilon}-\vec{u}\right)^2}{2kT}} \tag{2.6}$$

де ρ – густина,

D – розмірність простору,

k – стала Больцмана,

T – температура,

$\vec{\upsilon}$ – швидкість молекул (мікроскопічна швидкість),

$\vec{u}$ – швидкість рідини (макроскопічна швидкість).

Швидкість молекул набагато менша за швидкість потоку $\vec{\upsilon} << \vec{u}$. Швидкість звуку в середовищі υ_s пов'язана зі сталою Больцмана k, температурою T і масою молекул m наступним співвідношенням [107, 108]:

$$\upsilon_s^2 = \frac{kT}{m}$$

Швидкість звуку визначає число Маха M – ступінь впливу стисливості середовища на поведінку потоку певної швидкості [1]:

$$M = \frac{\left|\vec{u}\right|}{\upsilon_s} \tag{2.7}$$

де $\left|\vec{u}\right|$ – швидкість руху середовища.

Скориставшись розкладом функції e^x в ряд Тейлора, отримаємо:

$$e^{-\frac{\left(\vec{\upsilon}-\vec{u}\right)^2}{2\upsilon_s^2}} = e^{-\frac{\vec{\upsilon}^2}{2\upsilon_s^2}} e^{-\frac{\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{\upsilon}}{2\upsilon_s^2}} \approx e^{-\frac{\vec{\upsilon}^2}{2\upsilon_s^2}} \left(1 - \frac{\vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{\upsilon}}{2\upsilon_s^2} + \frac{\left(\vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{\upsilon}\right)^2}{8\upsilon_s^4} + \ldots \right) \approx$$

$$\approx e^{-\frac{\vec{\upsilon}^2}{2\upsilon_s^2}} \left(1 - \frac{\vec{u}^2}{2\upsilon_s^2} + \frac{\vec{u}\cdot\vec{\upsilon}}{\upsilon_s^2} + \frac{\left(\vec{u}\cdot\vec{\upsilon}\right)^2}{2\upsilon_s^4} \right) + o\left(\vec{u}^2\right)$$

Таким чином, рівноважна функція розподілу Максвела-Больцмана (2.6) для малих чисел Маха апроксимується як [36]:

$$f^{eq}\left(\vec{\upsilon},t\right) = \frac{\rho}{\left(2\pi\upsilon_s^2\right)^{D/2}} e^{-\frac{\vec{\upsilon}^2}{2\upsilon_s^2}} \left[1 - \frac{\vec{u}^2}{2\upsilon_s^2} + \frac{\vec{u}\cdot\vec{\upsilon}}{\upsilon_s^2} + \frac{\left(\vec{u}\cdot\vec{\upsilon}\right)^2}{2\upsilon_s^4} \right] \tag{2.8}$$

2.5 D2Q9 модель методу граткових рівнянь Больцмана

Розглянемо плоскі ізотермічні течії в’язкої рідини. Обчислювальна область розбивається квадратними комірками зі стороною *d*, розмір яких визначається із кількості комірок на одиницю довжини N_ℓ. Вводиться граткова швидкість частинок c – фіксована величина, що визначає швидкість переміщення частинок у гратковому просторі і обчислюється як [38]:

$$c = \frac{d}{\Delta t} \tag{2.9}$$

Швидкість звуку в комірці c_s обчислюється відповідно до формули [38]:

$$c_s^2 = \frac{c^2}{3} \tag{2.10}$$

Класична схема методу передбачає одиничну граткову швидкість частинок $c = 1$ [35, 50, 53, 60, 74]. При цьому, відповідно до (2.9), задання розміру розрахункової комірки d однозначно визначає крок за часом Δt. В'язкістю рідини ν керує BGK-оператор зіткнення частинок (2.5) за допомогою параметра релаксації τ, фізичним змістом якого є швидкість встановлення рівноваги в гідродинамічній системі [53]:

$$\nu = c_s^2 \Delta t \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \tag{2.11}$$

Незважаючи на те, що в деяких роботах [38, 42, 45, 53] розглядається залежність (2.11), значення параметра релаксації при розв'язку прикладних задач фіксують $\tau = 1$ через можливу нестійкість методу [51]. При цьому не зрозуміло, як саме впливає параметр релаксації на стійкість чисельного розв'язку. Виходить, що в класичній схемі методу задання розмірності розрахункової сітки (розміру комірки *d*) однозначно визначає в'язкість рідини або навпаки [53, 109]. Недоліком такого підходу є звуження меж застосування методу, оскільки зменшення в'язкості вимагає істотного подрібнення розрахункової сітки [109].

Для того, щоб розширити можливості методу, пропонується розглянути залежність в'язкості рідини від граткової швидкості частинок. Для цього поряд із розміром комірок розрахункової сітки *d*, задається кінематична в'язкість рідини ν. Значення кроку у часі Δt обчислюється за допомогою введених величин і формул (2.9) - (2.11) [37]:

$$\Delta t = \frac{1}{3} \frac{d^2}{\nu} \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \tag{2.12}$$

Виходячи з формули (2.12) і умови $\Delta t > 0$, отримаємо обмеження на параметр релаксації: $\tau > 0.5$. Значення параметра релаксації варіюватимемо в межах $0,5 < \tau \le 1$.

Перевагами модифікованого підходу є:

- можливість як через зміну розміру комірки так і через зміну параметра релаксації керувати гратковим числом Маха, що впливає на точність та стійкість розв'язків;
- можливість пришвидшити розрахунки за рахунок зменшення параметра релаксації.

Класична схема	**Модифікована схема**
1. Задається в'язкість рідини ν або розмір комірки *d*. $d = \Delta t;\ c = 1;\ c_s = 1/\sqrt{3};\tau = 1.$	1. Задається розмір комірки *d*, в'язкість рідини ν та параметр релаксації τ.
2. Обчислюється або d або ν відповідно до формули (5).	2. Обчислюється $\Delta t = d^2(\tau - 0,5)/(3\nu)$.
3. Обчислюється $M_p = \sqrt{3} \cdot U_{\max}$.	3. Обчислюються $c = \dfrac{d}{\Delta t};\ c_s = \dfrac{c}{\sqrt{3}};M_p = \dfrac{U_{\max}}{c_s}.$

Для задання моделі решітки вводиться сукупність векторів можливих напрямків переміщення частинок $\left\{\vec{e}_k\right\}_{k=0}^{n}$. Найбільш поширеною двовимірною моделлю є модель з дев'ятьма векторами можливих напрямків:

$$\begin{aligned}&\vec{e_0} = (0,0),\ \vec{e_1} = (1,0),\ \vec{e_2} = (0,1),\ \vec{e_3} = (-1,0),\ \vec{e_4} = (0,-1),\\&\vec{e_5} = (1,1),\ \vec{e_6} = (-1,1),\ \vec{e_7} = (-1,-1),\ \vec{e_8} = (1,-1),\end{aligned} \tag{2.13}$$

де k = 0 ... 8 – індекс напрямку.

Така модель називається двовимірною дев'ятишвидкісною моделлю методу граткових рівнянь Больцмана (D2Q9). У цій моделі частинки можуть переміщуватися в будь-яку із сусідніх комірок, тобто в одному з восьми можливих напрямків або залишатися в стані спокою. На рисунку 2.3 показані рівномірна сітка в декартових координатах з розміром комірки d і можливі напрямки переміщення частинок $\vec{e}_k$. Вектор $\vec{e}_0$ означає, що частинка перебуває в стані спокою.

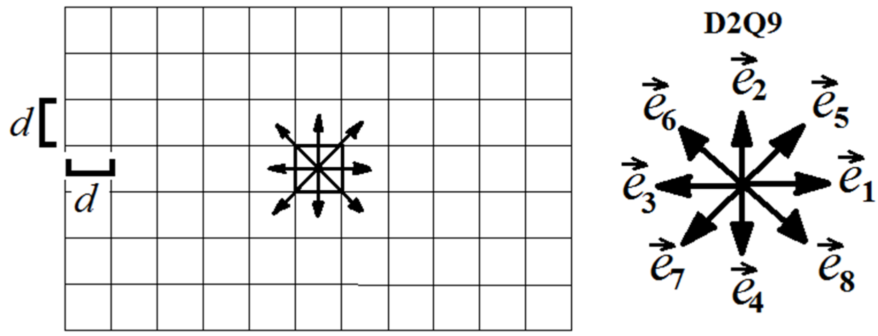


Рис. 2.3. D2Q9 модель решітки

Кожному вектору $\vec{e}_k$ ставиться у відповідність швидкість переміщення частинки у відповідному напрямку $\vec{V}_k$ (рис. 2.4).

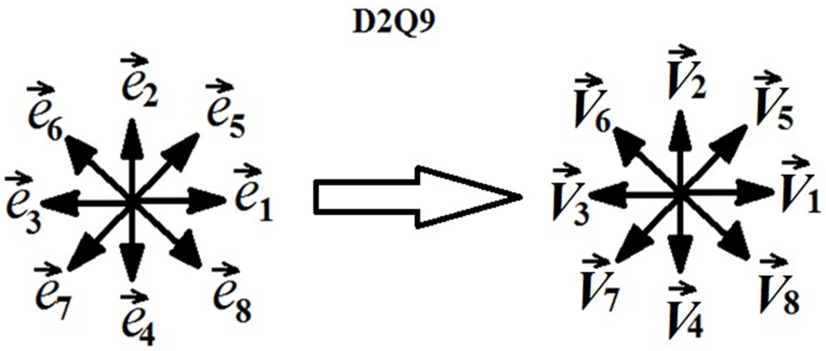


Рис. 2.4. Вектори можливих напрямків переміщення частинок і відповідні їм швидкості

Таким чином, у рамках моделі D2Q9 методу LBM в кожній комірці розрахункової сітки буде перебувати дев'ять значень функції розподілу частинок $\left\{f_k(\vec{r},t)\right\}_{k=0}^{8}$, які визначають ймовірність частинок мати одну з дев'яти можливих швидкостей $\vec{V}_k$. Дискретний набір швидкостей $\vec{V}_k$ визначається як:

$$\vec{V}_k = c \cdot \vec{e}_k \qquad (2.14)$$

де c – граткова швидкість частинок.

Система дискретних кінетичних рівнянь, що описує динаміку ансамблю крупних частинок із урахуванням граткового рівняння (2.3) і BGK моделі зіткнень (2.5) має вигляд [35, 36]:

$$\underbrace{f_k(\vec{r}+\vec{V}_k\Delta t, t+\Delta t) = f_k(\vec{r},t)}_{перенос} - \underbrace{\frac{1}{\tau}[f_k(\vec{r},t) - f_k^{eq}(\vec{r},t)]}_{релаксация}, \qquad (2.15)$$

Для ізотермічних течій проведемо розклад локальної рівноважної функції розподілу Максвела-Больцмана в ряд за степенями вектора швидкості $\vec{u}$ для малих чисел Маха (2.8). Після дискретизації рівняння (2.8) набуде вигляду [36]:

$$f_k^{eq}\left(\vec{r},t\right) = w_k \rho\left(\vec{r},t\right)\left(1 + \frac{\left(\vec{V}_k \cdot \vec{u}\left(\vec{r},t\right)\right)}{c_s^2} + \frac{1}{2}\frac{\left(\vec{V}_k \cdot \vec{u}\left(\vec{r},t\right)\right)^2}{c_s^4} - \frac{1}{2}\frac{\vec{u}\left(\vec{r},t\right)^2}{c_s^2}\right) \qquad (2.16)$$

де w_k – вагові коефіцієнти.

З урахуванням формули (2.10), рівняння (2.16) буде мати вигляд:

$$f_k^{eq}\left(\vec{r},t\right) = w_k \rho\left(\vec{r},t\right)\left(1 + \frac{3}{c}\left(\vec{e}_k \cdot \vec{u}\left(\vec{r},t\right)\right) + \frac{9}{2c^2}\left(\vec{e}_k \cdot \vec{u}\left(\vec{r},t\right)\right)^2 - \frac{3}{2c^2}\vec{u}\left(\vec{r},t\right)^2\right) \qquad (2.17)$$

Вагові коефіцієнти w_k є різними для різних моделей решіток. Для рівноважної функції (2.16, 2.17) моделі D2Q9 вагові коефіцієнти мають вигляд [37, 38]:

$$
\mathrm{w}_k = \begin{cases} \frac{4}{9}, k = 0 \\ \frac{1}{9}, k = \overline{1,4} \\ \frac{1}{36}, k = \overline{5,8} \end{cases} . \qquad (2.18)
$$

Аналогічно методу частинок в комірках Харлоу та методу крупних частинок Білоцерковського О. М. та Давидова Ю. М., проводиться розщеплення рівняння (2.15) за методом Яненко – розщеплення за фізичними процесами. Один крок за часом розкладається на три етапи.

Перший етап: переміщення частинок зі швидкостями $\vec{V}_k$ за допомогою перенесення значень функції розподілу в напрямку, що відповідає векторам $\vec{e}_k$ (2.10). Математично схема перенесення має вигляд:

$$
f_k(\vec{r} + \vec{V}_k \Delta t, t + \Delta t) = f_k(\vec{r}, t),\ t = t_0 \quad (2.19)
$$

Другий етап: отримання нового значення функції розподілу частинок $\tilde{f}_k$ у результаті лінійної релаксація функції розподілу f_k до локальної рівноважної функції розподілу Максвела-Больцмана f_k^{eq} (2.16):

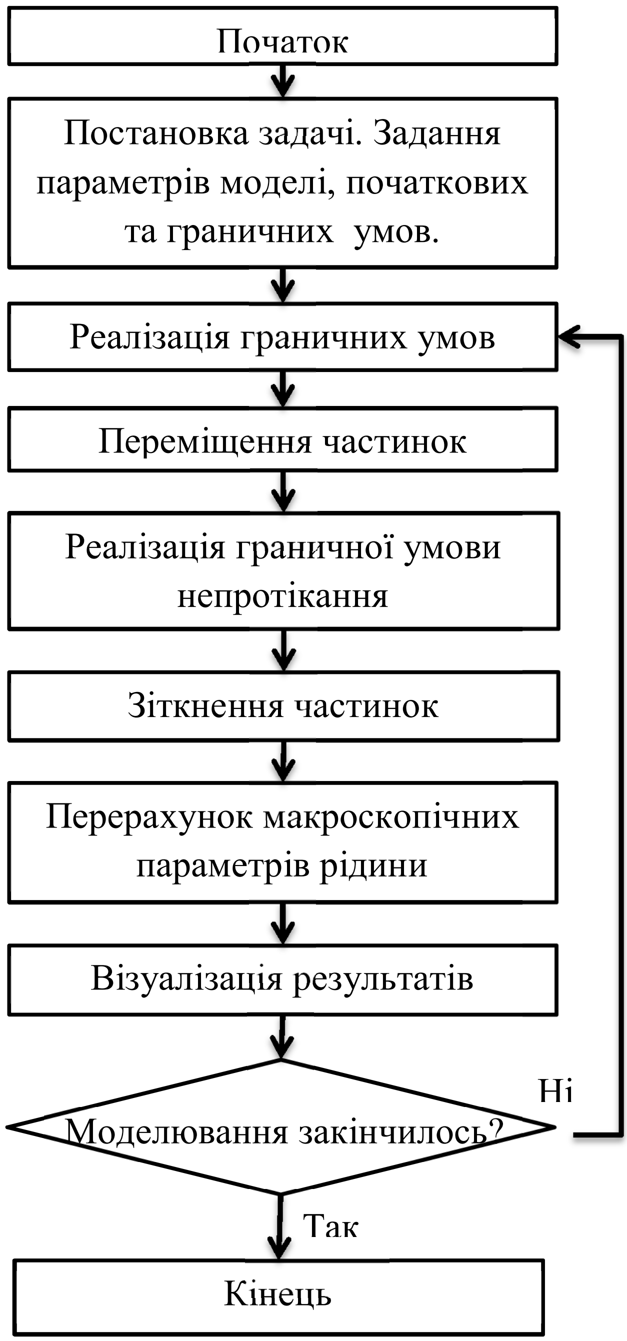


Рис. 2.5. Алгоритм моделювання

$$\tilde{f}_k(\vec{r},t) = f_k(\vec{r},t) - \frac{1}{\tau}[f_k(\vec{r},t) - f_k^{eq}(\vec{r},t)], \qquad t = t_0 + \Delta t \tag{2.20}$$

Третій етап: перехід від мікроскопічного рівня, що описується функцією розподілу частинок $f_k(\vec{r},t)$ до таких макроскопічних параметрів рідини як густина ρ, швидкість $\vec{u}$ і тиск p за формулами [35, 37, 38]:

$$\rho\left(\vec{r},t\right) = \sum_{k=0}^{8} f_k\left(\vec{r},t\right); \quad \vec{u}\left(\vec{r},t\right) = \frac{1}{\rho\left(\vec{r},t\right)} \sum_{k=0}^{8} \vec{V}_k f_k\left(\vec{r},t\right); \quad p\left(\vec{r},t\right) = c_s^2 \rho\left(\vec{r},t\right) \tag{2.21}$$

Для розрахунку коефіцієнтів лобового опору C_d та підйомної сили C_l методом граткових рівнянь Больцмана може бути застосований метод обміну імпульсом. Для цього другий закон Ньютона записується в імпульсній формі. Для граничної комірки обтічного тіла сила, що на нього діє, обчислюється за формулою [44, 46, 60, 67, 73, 89, 94]:

$$\vec{F} = \sum_{\Omega} \sum_{k=0}^{8} i \vec{V}_{\bar{k}} \left[f_k\left(\vec{x}_b, t\right) + f_{\bar{k}}\left(\vec{x}_b + \vec{e}_{\bar{k}} d, t\right) \right] \tag{2.22}$$

де Ω – граничний шар комірок обтічного тіла,

$\vec{x}_b$ – гранична комірка обтічного тіла ($\vec{x}_b = (x, y) \in \Omega$),

i – індикатор, який дорівнює одиниці i = 1, якщо комірка $\vec{x}_b + \vec{e}_k$ знаходиться всередині обтічного тіла і i = 0, якщо зовні тіла,

$\vec{V}_{\bar{k}}$ – швидкість частинок, що рухаються у протилежному по відношенню до $\vec{e}_k$ напрямку.

У результаті гідродинамічні коефіцієнти обчислюються за формулами:

$$C_d = \frac{|F_x|}{\frac{1}{2}\rho D}; \; C_l = \frac{F_y}{\frac{1}{2}\rho D}; \tag{2.23}$$

де F_x – x - компонента повної сили, що діє на обтічне тіло,

F_y – y - компонента повної сили,

U_{in} – швидкість рідини на вході,

D – діаметр обтічного тіла.

2.6 Перехід від рівняння Больцмана до рівняння Нав'є - Стокса.

Обґрунтуванням застосуванню методу граткових рівнянь Больцмана для моделювання гідродинамічних систем є той факт, що з граткового рівняння Больцмана можна вивести систему рівнянь Нав'є - Стокса, як це було вперше показано в роботі [38]. Для цього необхідно застосувати розклад Чепмена - Енського за малим параметром ε, в якості якого береться крок за часом (тобто $\varepsilon = \Delta t$). У результаті застосування до граткового рівняння (2.15) розкладу Чепмена - Енського виходить наступна система [38, 43, 87, 97]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \nabla\right)\vec{u} = -\nabla p + \nu\Delta\vec{u} + o(\Delta t) + o(M_p^2), \\ &\nabla\vec{u} = 0 + o(\Delta t) + o(M_p). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Система (2.24) відрізняється від рівнянь Нав'є - Стокса і нерозривності для нестисливої рідини на величину першого порядку малості за кроком у часі Δt і на величину першого порядку малості за гратковим числом Маха M_p.

Ґрунтуючись на формулі обчислення числа Маха для суцільного середовища M (2.7), граткове число Маха M_p розраховується за формулою [33, 38]:

$$M_p = \frac{U_{\max}}{c_s}, \tag{2.25}$$

де $U_{\max}$ – максимальне значення швидкості рідини в обчислювальній області;

Виходячи з рівняння (2.24), видно, що величина граткового числа Маха безпосередньо визначає збіжність методу при моделюванні гідродинамічних систем.

2.7 Стійкість методу

Стійкість чисельної схеми методу LBM досліджувалась аналітично Scordos P. [33], He X. [19], L. Luo [43], D. Wolf-Gladrow [18], А. Л. Куперштох [49] та іншими. В цих роботах доведено, що метод є умовно стійким за параметром релаксації та значеннями швидкості, та збігається до рівнянь Нав'є-Стокса та нерозривності при малих величинах кроку по часу та граткового числа Маха. Нестійкість чисельного розв'язку може бути викликана одним із факторів:

1. збільшення граткового числа Маха. Кінетичне рівняння Больцмана апроксимує рівняння Нав'є-Стокса тільки за малими числами Маха $M_p < 0,3$ (згідно з рівнянь 2.24);

2. зменшення параметра релаксації. «Безпечним» значенням (за S. Sucop [51]) є $\tau = 1$. Зменшення τ викликає нестійкість: частинки скупчуються у деяких комірках, що приводить до виникнення пульсацій у полі швидкостей (рис. 2.6);

3. збільшення швидкості. Чисельна модель передбачає моделювання нестисливих течій із малими швидкостями (меншими за граткову швидкість звуку) $U_{\max} < c_s$.

4. зростання числа Рейнольдса. Із збільшенням числа Рейнольдса $\mathrm{Re} > 10^3$ течії стають турбулентними (згідно досліджень Г. Шліхтинга, Л. Г. Лойцянського).

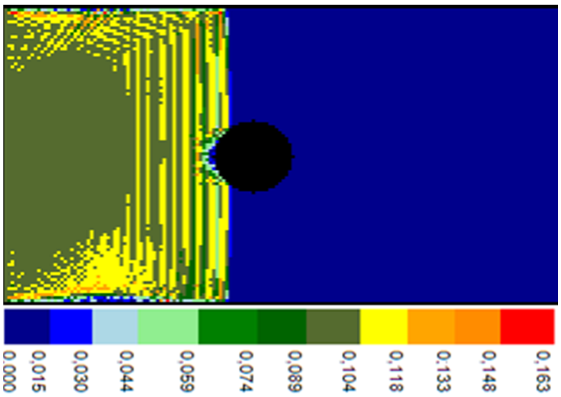


Рис. 2.6. Пульсації у полі швидкостей при Re = 1000

Для подолання нестійкості чисельного розв’язку, крім подрібнення розрахункової сітки, на практиці використовують схеми з декількома параметрами релаксації [87, 93] або застосовують неявні варіанти LBM [87]. На жаль, ці підходи призводять до значного збільшення часу моделювання. Причому, при використанні неявних схем виникають певні складнощі із застосуванням технологій паралельних обчислень, що нівелює одну із переваг методу.

2.8 Програмна реалізація

Однією з переваг методу граткових рівнянь Больцмана є легкість в програмуванні, оскільки всі етапи методу описуються простими лінійними рівняннями і розв’язуються за допомогою явних схем.

Алгоритм методу полягає в наступній послідовності кроків:

1. Вибір задачі. Задання параметрів рідини, а саме кінематичної в’язкості, швидкості течії. Задання параметрів розрахункової області: розміри домену, розмірність розрахункової сітки.
2. Задання початкових умов.
3. Візуалізація проміжних результатів.
4. Зіткнення псевдочастинок – зміна значень функцій розподілу частинок за рахунок дії оператора зіткнень.

5. Задання граничних умов.
6. Етап перенесення частинок: перенесення значень функцій розподілу у відповідних напрямках.
7. Виконання умови непротікання.
8. Обчислення нових макроскопічних характеристик рідини (густини, компонент швидкості, тиску) відповідно до змінених значень функцій розподілу.
9. Обчислення повної сили, що діє на обтічне тіло.
10. Якщо результат моделювання досягнутий, то переходять до кроку 11. Якщо результат не досягнутий, то процедуру розрахунку (кроки 4-9) повторюють знову.
11. Відображення результатів моделювання.

Особливістю методу LBM є оперування функцією розподілу частинок, яка відображає вірогідність частинок мати одну із швидкостей із дискретного набору швидкостей у деякому малому об'ємі. Якщо розбити розрахункову область сіткою розмірності $M \times N$, то кожна комірка буде містити дев'ять значень функції розподілу $f_k, k = 0,8$ (рис. 2.7). Кожне значення функції розподілу є тією частиною частинок, які мають одну із швидкостей $\overrightarrow{V_k}$ і будуть переміщуватися у відповідному напрямку $\overrightarrow{e_k}$ (рис. 2.4). Виходить, що програмування можливості частинки переміщуватися в одному з дев'яти напрямків призводить до трансформації плоскої розрахункової сітки розмірності $M \times N$ у розрахунковий куб розмірності $M \times N \times 9$, як це показано на рис. 2.7.

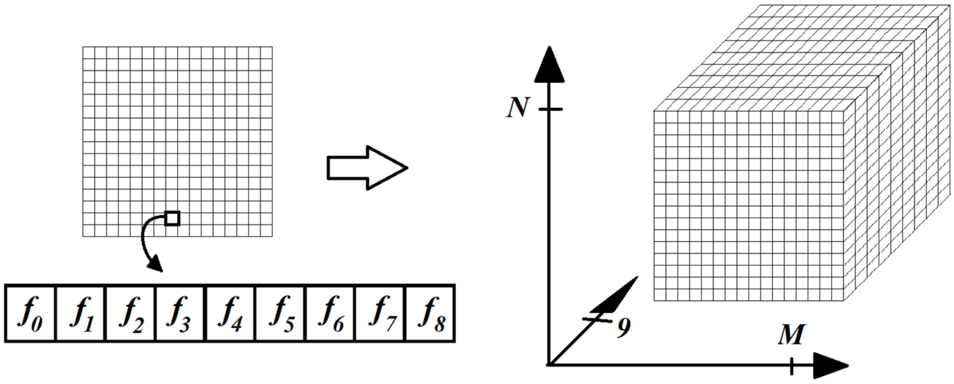


Рис. 2.7. Розрахунковий куб у моделі D2Q9

Кожен із дев'яти шарів куба відповідає одному з напрямків переміщення частинок $\vec{e_k}, k = \overline{0,8}$. Тому значення функції розподілу на кожному шарі зміщуються в напрямку $\vec{e_k}$, де k – індекс шару розрахункового куба, як показано на рис. 2.8.

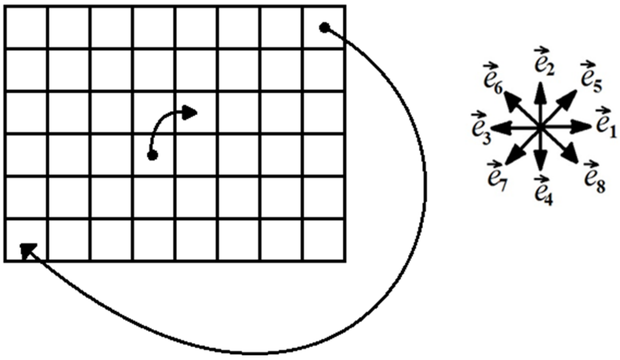


Рис. 2.8. Зміщення значень функції розподілу в напрямку $\vec{e_5}$ на п'ятому шарі розрахункового куба

Очевидно, що при великій кількості комірок розрахункової сітки процес перезапису значень функції розподілу займає значну частину часу. Для сітки $M \times N = \ell_x N_\ell \times \ell_y N_\ell = \left(\ell_x \times \ell_y\right) N_\ell^2$, де $\ell_x \times \ell_y$ – фізична розмірність розрахункової області, а N_ℓ – кількість комірок на одиницю довжини, вимагає провести $8\left(\ell_x \times \ell_y\right) N_\ell^2$ таких операцій (значення в нульовому шарі не переміщаються). Для зменшення часу розрахунку в даній роботі пропонується перетворити розрахункову сітку в сферу даних – абстрактний тип даних, у якому немає граничних комірок (рис. 2.9). Визначення індексу комірки відбувається відносно початкової точки відліку, а зсув всіх даних в сфері – за рахунок зміщення однієї лише точки відліку. Виходить, що кількість операцій на кроці поширення частинок не буде залежати від квадрата кількості комірок, а буде фіксованим. Замість $8\left(\ell_x \times \ell_y\right) N_\ell^2$ операцій перезапису необхідно виконати лише 16 – по два значення для кожної сфери (дані в нульовий сфері не зміщуються). Так, для сітки 900×300 необхідно провести лише 16 операцій замість $900 \cdot 300 \cdot 8 = 2160000$.

Виходить, що замість тривимірного куба, що складається з дев'яти шарів розрахункової області, будемо розглядати дев'ять сфер даних, що дозволить нам істотно скоротити час моделювання.

Таким чином, оптимізовано чисельний алгоритм на етапі переміщення частинок шляхом трансформації розрахункової сітки у сферу даних.

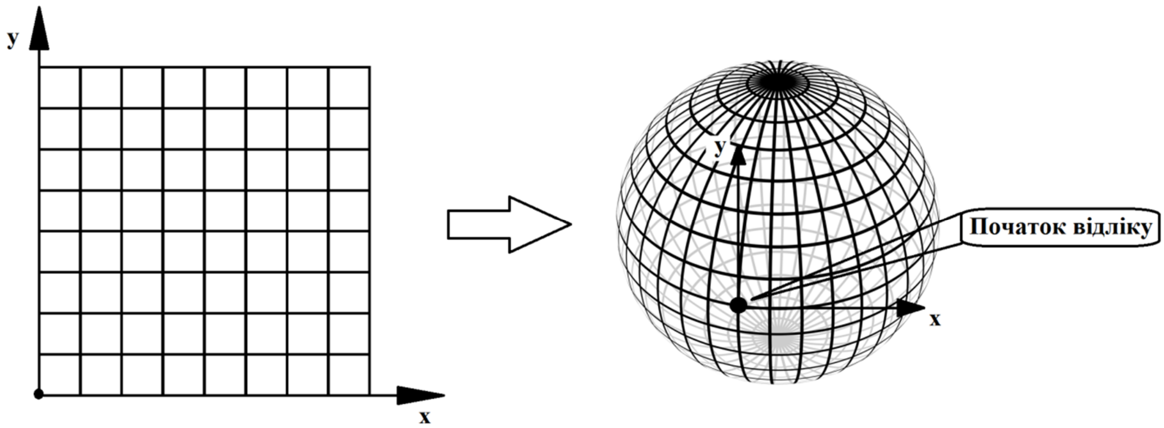


Рис. 2.9. Сфера з даними

Алгоритм методу LBM складається з ряду локальних операцій у комірках розрахункової сітки за винятком процесу перенесення частинок, що дозволяє ефективно його розпаралелити як на CPU, використовуючи технологію OpenMP, так і на GPU за допомогою технології CUDA. Застосування паралельних обчислень є однією з головних переваг методу. Очевидно, що ефективність розпаралелювання визначається технологією і характеристиками процесора або відеокарти. В цілому, дослідження, опубліковані в роботах [68, 76, 83, 84] показують, що використання технології CUDA може збільшити швидкість обчислень приблизно в 50-90 разів.

Висновки за розділом 2

У цьому розділі докладно описується досліджуваний метод: його стан і можливості, чисельні схеми, стійкість, обґрунтування та програмна реалізація. Основні результати розділу можна сформулювати наступним чином:

1. Метод граткових рівнянь Больцмана працює на мезоскопічному рівні абстракції при описі суцільного середовища. Динаміка суцільного середовища розглядається як динаміка крупних частинок (псевдочастинок). Самі псевдочастинки описуються дискретною функцією розподілу, яка є розв'язком кінетичного рівняння Больцмана.

2. Псевдочастинки переміщуються у гратковому просторі і вступають у взаємодію одна з одною. Зіткнення частинок описується моделлю зіткнень Бхатнагара-Гроса-Крука, що представляє собою лінійне наближення до локальної рівноваги Максвелла-Больцмана.

3. Застосовуючи процедуру розкладу Чепмена-Енського до граткового рівнянням Больцмана можна отримати систему рівнянь Нав'є-Стокса та нерозривності з точністю до величин першого порядку малості: кроку по часу і граткового числа Маха. Таким чином доведено, що граткове рівняння Больцмана апроксимує рівняння в'язкої нестисливої рідини, що дозволяє використовувати даний метод до моделювання таких течій.

4. Метод є умовно стійким. На його стійкість впливають: граткове число Маха, параметр релаксації та швидкість рідини.

5. В'язкістю рідини в класичних схемах методу керує параметр релаксації оператора зіткнення частинок. У цій главі розвинута чисельна схема, заснована на змінному значенні швидкості звуку в комірці і змінному

значенні параметра релаксації. Запропонована схема дозволяє більш ефективно розв’язувати задачі гідродинаміки керуючи одночасно в’язкістю рідини, точністю та швидкістю розрахунків.

6. Алгоритм методу включає в себе два основні етапи: зіткнення і перенесення частинок. Оптимізовано чисельний алгоритм на етапі переміщення частинок шляхом трансформації розрахункової сітки у сферу даних – абстрактний тип даних, в якому немає граничних комірок. Визначення індексу комірки відбувається відносно початкової точки відліку, а зсув усіх даних у сфері реалізується лише за рахунок зміщення однієї точки відліку.

7. До алгоритму методу можуть буди застосовані технології паралельних обчислень OpenMP (для центрального процесора) та CUDA (для відеокарти).

РОЗДІЛ 3. ПОЧАТКОВІ ТА ГРАНИЧНІ УМОВИ

3.1 Особливості задання граничних умов

Коректне задання граничних умов є не менш важливою задачею, ніж сам алгоритм обчислень, оскільки граничні умови впливають на точність і збіжність чисельного розв'язку [10, 40, 112-113]. У методі граткових рівнянь Больцмана існують різні способи задання граничних умов (ГУ) [37, 40]. Як стверджують багато авторів, задання граничних умов у методі LBM не є складною задачею через застосування кінетичного підходу. Однак вибір способу їх задання залежить від розв'язуваної задачі і вимагає особливої уваги, оскільки може привести до великих обчислювальних похибок або нестійкості розв'язку.

У дисертаційній роботі будемо використовувати лише регулярну розрахункову сітку в декартовій системі координат. Регулярною або структурованою сіткою будемо називати таку розрахункову сітку, яка має постійний крок У кожному з просторових напрямків.

Для побудови тіл обтікання на розрахунковій сітці використовуються два основні класи границь: елементарні та складні [40]. Під елементарними ми будемо розуміти такі границі, що будуються по межах комірок розрахункової сітки (рис. 3.1). Елементарні границі не обов'язково повинні бути тільки прямими, вони можуть бути східчастими і апроксимувати більш складні фігури. Їх відмінною рисою є те, що вони не перетинають комірки.

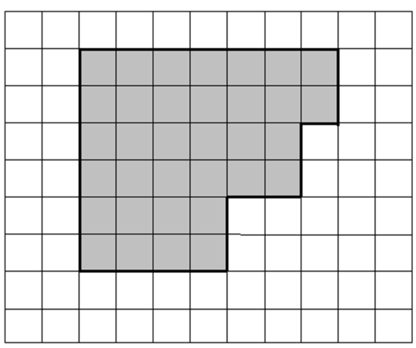


Рис. 3.1. Приклад елементарної границі

Складні границі, навпаки, можуть перетинати комірки, тому вони більш точно описують складні фігури (рис. 3.2). Очевидно, що складні границі складніше програмуються, але виправданість таких зусиль залежить тільки від конкретної практичної інженерної задачі. Відносно застосування складних границь метод LBM все ще розвивається, і лідируючу позицію займають комерційні пакети.

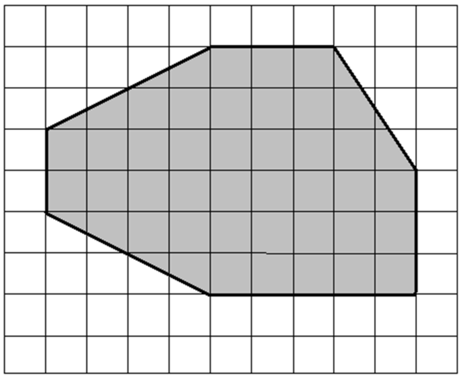


Рис. 3.2. Приклад складної границі

У цьому розділі розглянуті циклічні граничні умови, умова непротікання, умова рухомої стінки, граничні умови витоку і стоку рідини, умова обертання для кругового циліндра. Всі розглянуті далі методи задання початкових і граничних умов справедливі для моделі D2Q9 методу граткових рівнянь Больцмана, викладеного в п. 2.5 та реалізованого на регулярній розрахунковій сітці.

3.2 Початкові умови

Задання початкових умов полягає в заданні швидкості рідини всередині розрахункової області в початковий момент часу. Для задання швидкості $\vec{u}$ в початковий момент часу задаються її компоненти u_x, u_y у кожній комірці розрахункової сітки. Для цього необхідно задати всі дев’ять значень дискретної функції розподілу частинок f_k за швидкостями [40]. Скориставшись формулою локальної рівноважної функції розподілу (2.17) і, з урахуванням значень векторів (2.13) і вагових коефіцієнтів (2.18) отримаємо наступні формули для обчислення функцій розподілу f_k на основі компонент швидкості u_x, u_y:

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \frac{4}{9}\left(1 - \frac{3}{2c^2}u_x^{\,2} - \frac{3}{2c^2}u_y^{\,2}\right),\\
f_1 &= \frac{1}{9}\left(1 + \frac{3}{c}u_x + \frac{3}{c^2}u_x^{\,2} - \frac{3}{2c^2}u_y^{\,2}\right),\\
f_2 &= \frac{1}{9}\left(1 + \frac{3}{c}u_y + \frac{3}{c^2}u_y^{\,2} - \frac{3}{2c^2}u_x^{\,2}\right),\\
f_3 &= \frac{1}{9}\left(1 - \frac{3}{c}u_x + \frac{3}{c^2}u_x^{\,2} - \frac{3}{2c^2}u_y^{\,2}\right),\\
f_4 &= \frac{1}{9}\left(1 - \frac{3}{c}u_y + \frac{3}{c^2}u_y^{\,2} - \frac{3}{2c^2}u_x^{\,2}\right),\\
f_5 &= \frac{1}{36}\left(1 + \frac{3}{c}u_x + \frac{3}{c}u_y + \frac{3}{c^2}u_x^{\,2} + \frac{3}{c^2}u_y^{\,2} + \frac{9}{c^2}u_x u_y\right),\\
f_6 &= \frac{1}{36}\left(1 - \frac{3}{c}u_x + \frac{3}{c}u_y + \frac{3}{c^2}u_x^{\,2} + \frac{3}{c^2}u_y^{\,2} - \frac{9}{c^2}u_x u_y\right),\\
f_7 &= \frac{1}{36}\left(1 - \frac{3}{c}u_x - \frac{3}{c}u_y + \frac{3}{c^2}u_x^{\,2} + \frac{3}{c^2}u_y^{\,2} + \frac{9}{c^2}u_x u_y\right),\\
f_8 &= \frac{1}{36}\left(1 + \frac{3}{c}u_x - \frac{3}{c}u_y + \frac{3}{c^2}u_x^{\,2} + \frac{3}{c^2}u_y^{\,2} - \frac{9}{c^2}u_x u_y\right),
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

3.3 Циклічні граничні умови

Циклічні граничні умови є найпростішими граничними умовами. Вони зазвичай, призначені для того, щоб виключити вплив границь реальної фізичної системи. Отже, вони є достатніми для фізичних явищ, де поверхневі ефекти відіграють незначну роль. При заданні умови циклічності частинки, що рухаються за межі області, не відбиваються від неї, а переміщуються на протилежну границю, не змінюючи напрямку свого руху [40]. Схема руху таких частинок показана на рисунку 3.3 на прикладі застосування циклічних граничних умов до бічних границь.

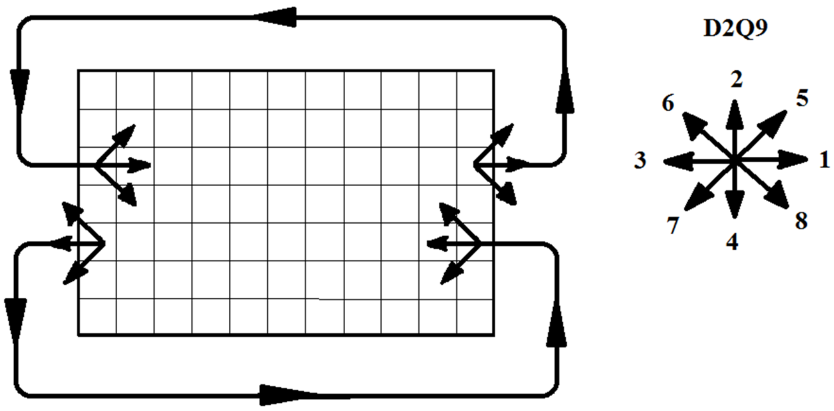


Рис. 3.3. Схема переміщення частинок. До бічних границь застосовані циклічні граничні умови

Математично, для випадку, зображеного на рис. 3.3, схема задання циклічних граничних умов має вигляд:

$$\begin{aligned} f_k(x,0,t) &= f_k(x,M-1,t), k=1,5,8; \\ f_k(x,M-1,t) &= f_k(x,0,t), k=3,6,7; \end{aligned} \tag{3.2}$$

де M – кількість комірок уздовж осі x.

Слід зазначити, що при використанні сфери даних, запропонованої в п. 2.9, потреба задавати такі граничні умови відпадає, оскільки вони передбачені за замовчуванням.

3.4 Гранична умова непротікання

У методі граткових рівнянь Больцмана розрізняють два типи граничних умов. Тип граничних умов залежить від того, чи містять граничні комірки рідину чи ні. Якщо граничні комірки містять рідину, то такі граничні умови називаються «мокрими» (рис. 3.4 *а*), інакше – «сухими» (рис. 3.4 *б*) [37].

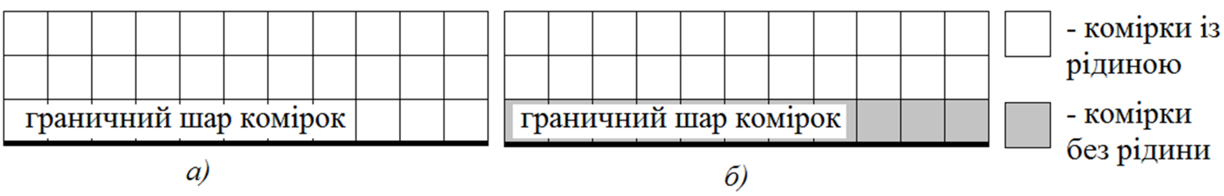


Рис. 3.4. Типи граничних умов

Якщо граничні комірки містять рідину, то сукупність частинок у цих комірках задовольняють результатам розкладу Чепмена - Енського. Вони можуть бути розкладені на рівноважні і нерівноважні складові і пов'язані з макроскопічними змінними потоку. Якщо ж граничні комірки не містять рідину, то для них неможливо обчислити значення макроскопічних змінних.

При моделюванні в'язкої рідини на твердих нерухомих границях задається умова прилипання рідини у вигляді [112]:

$$\vec{u} = 0 \tag{3.3}$$

Умова прилипання відображає факт існування сили молекулярного зчеплення між поверхнею твердого тіла і в'язкою рідиною.

3.4.1 Класична умова відображення частинок на границі твердого тіла

Найпростішою реалізацією умови непротікання і прилипання в методі LBM є задання умови зворотного відображення [37, 40, 41, 59, 60]. У цьому випадку частинки, що рухаються за границю розділу твердого і рідкого середовища, відбиваються від неї в протилежному напрямку і на наступному кроці повертаються назад у потік (рис. 3.5). Математично схема відображення має вигляд:

$$f_{\bar{k}}(\vec{r},t) = f_k(\vec{r},t), \vec{r} \in \Omega \tag{3.4}$$

де Ω – область, яка не містить рідини,

$\overline{k}$ – протилежний до k напрямок вектора.

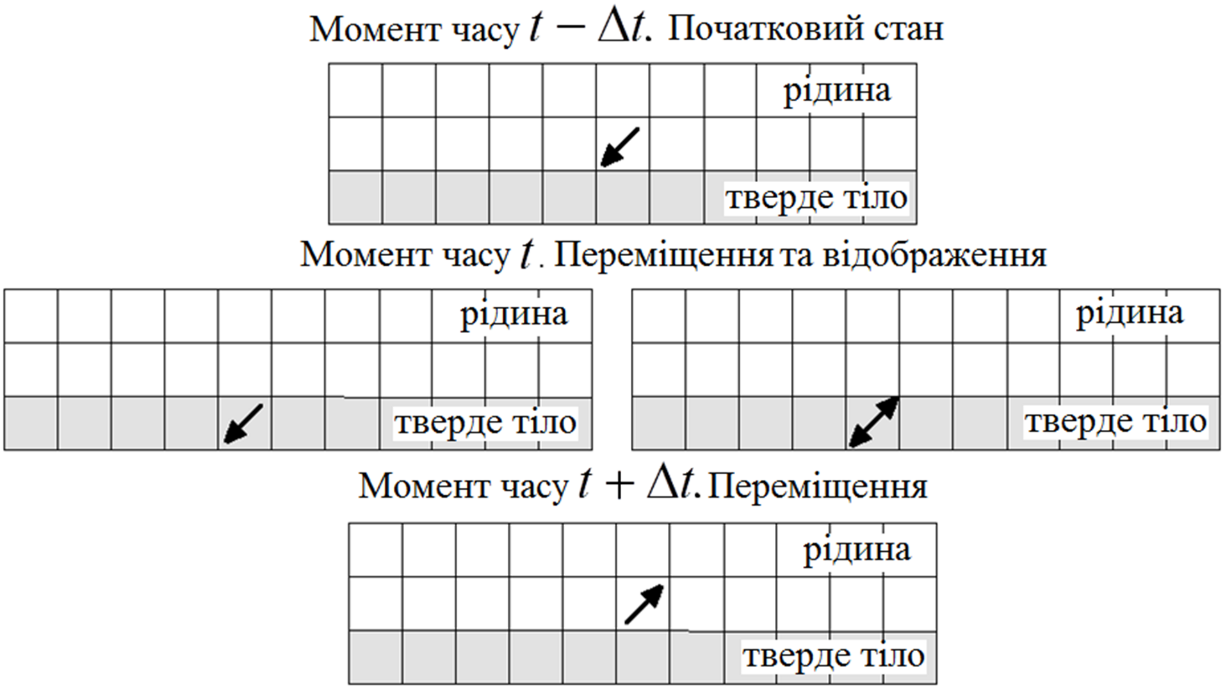


Рис. 3.5. Ілюстрація схеми зворотного відображення частинок

У підході зворотного відображення при перенесенні функції розподілу частинок за границю розділу середовищ, значення функції для кожного напрямку копіюється в значення протилежного напрямку, як це показано на рисунку 3.5 на прикладі нижньої границі області. На наступному кроці ці частинки повертаються назад у потік з протилежним напрямком переміщення.

Умова відображення (3.4) для D2Q9 моделі решітки має вигляд:

$$f_1 = f_3; f_2 = f_4; f_5 = f_7; f_6 = f_8. \tag{3.5}$$

Враховуючи формулу обчислення швидкостей (2.21) для D2Q9 моделі отримаємо наступні формули:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{c}{\rho}\left(f_1 + f_5 + f_8 - f_3 - f_6 - f_7\right), \\ u_y &= \frac{c}{\rho}\left(f_4 + f_7 + f_8 - f_2 - f_5 - f_6\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Підставляючи (3.5) в (3.6), отримаємо $u_x = 0; u_y = 0$, тобто умову прилипання (3.3). Таким чином, схема відображення (3.4) є достатньою умовою для задання граничної умови прилипання. Недоліком такого підходу є поява флуктуацій – коливання швидкостей близько границі обтічного тіла. Для усунення цього недоліку схема зворотного відображення була розвинута.

3.4.2 Схема дзеркального відображення частинок

Доповнимо схему зворотного відображення частинок схемою миттєвого дзеркального відображення. При цьому, по-перше, частинки, що рухаються за границю розділу середовищ, миттєво від неї відображаються, а, по-друге, в комірках твердого тіла реалізується умова прилипання. Схема відображення частинок показана на рис. 3.6 на прикладі відображення від правої границі.

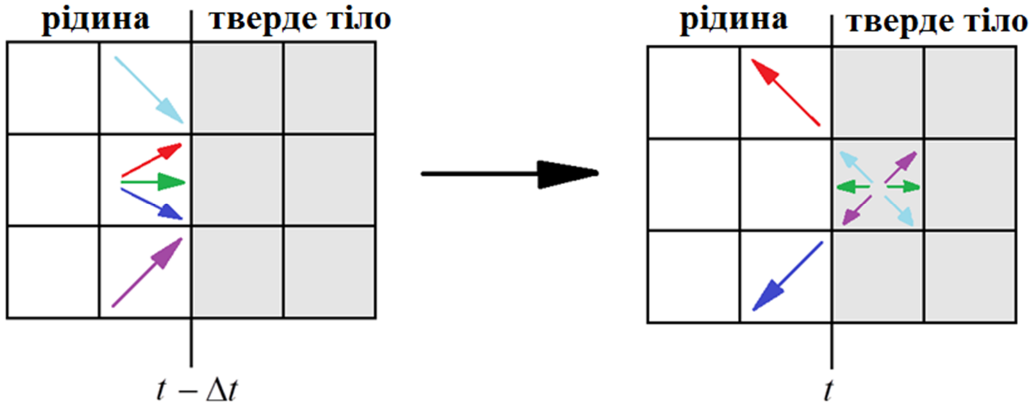


Рис. 3.6. Схема дзеркального відображення функції розподілу від границі тіла

При використанні такої схеми відбувається плавна зміна швидкості від її значення біля тіла обтікання і до нуля на стінках тіла. Частинки в граничному шарі неперервно рухаються і повертаються в потік на тому ж часовому кроці. Описана схема дозволяє виконати моделювання обтікання тіл більш м’яко, тобто усунути коливання швидкостей біля обтічного тіла.

3.5 Гранична умова рухомої стінки

Умова рухомої стінки використовується в тих випадках, коли течія рідини паралельна стінці, тобто нормальна швидкість дорівнює нулю $u_n = 0$, а задається лише дотична швидкість u_τ. При заданні умови рухомої стінки труднощі виникають через те, що відома тільки макроскопічна інформація на границі розрахункової області, а саме компоненти швидкості. Для реалізації цих граничних умов необхідно перевести цю макроскопічну інформацію у відповідну мікроскопічну функцію розподілу частинок. Допоки це не буде зроблено, етап зіткнення частинок неможливо виконати на границях області, оскільки в граничних комірках відсутні всі дев'ять значень функції розподілу. Це показано на рис. 3.7 для верхньої границі розрахункової сітки моделі D2Q9. Заштрихована область знаходиться за межами сітки і не приймає участі в моделюванні. Невідомі вектори обведені.

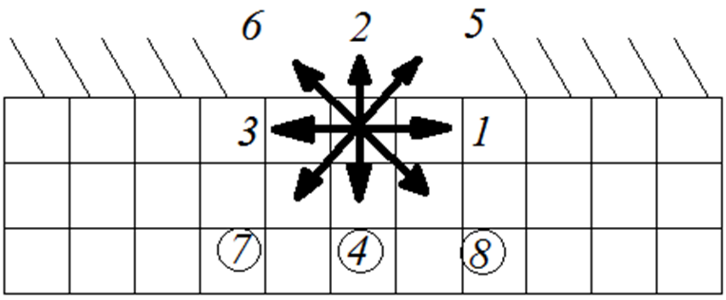


Рис. 3.7. Верхня границя розрахункової області

Роль граничних умов полягає в тому, щоб знайти невідомі значення функції розподілу відповідно до динаміки моделі і створити необхідну макроскопічну поведінку частинок на границі області. Після задання граничних умов і знаходження невідомих значень функцій розподілу можна переходити до етапів зіткнення і переміщення частинок.

У 1997 році був запропонований спосіб задання значень швидкості і тиску на «мокрих» границях [37]. Розглянемо докладно принцип задання значень швидкості з компонентами u_x, u_y для верхньої границі прямокутної розрахункової області. Після задання початкових умов нам відомі значення функції розподілу $f_0, f_1, f_2, f_3, f_5, f_6$. Необхідно визначити значення густини ρ на границі і невідомі значення функції розподілу f_4, f_7, f_8, які відповідають частинкам, що рухається всередину розрахункової області.

3.5.1 Розрахунок густини на границі

На прикладі верхньої границі (рис. 3.7) видно, що густину ρ в граничних комірках можна розділити на три складові [37, 40]. Перша ρ_- є сумою всіх невідомих значень функцій розподілу (f_4, f_7, f_8 на рис. 3.7). Друга ρ_+ є сумою функцій розподілу, що мають протилежний напрямок переміщення частинок відносно невідомих функцій розподілу (f_2, f_5, f_6 на рис. 3.7). І третя ρ_0, складається з суми функцій розподілу, розташованих на границі розділу середовищ (f_0, f_1, f_3 на рис. 3.7). Нехай $u_\perp$ - компонента швидкості у комірці у напрямку, перпендикулярному границі поділу середовищ. Тоді, густина у комірці визначається системою [37]:

$$\begin{cases} \rho = \rho_- + \rho_+ + \rho_0, \\ \rho u_\perp = \rho_+ - \rho_-. \end{cases} \tag{3.7}$$

Із системи (3.7) отримаємо формулу, що не залежить від невідомої величини ρ_-:

$$\rho = \frac{1}{1+u_\perp}(2\rho_+ + \rho_0) \tag{3.8}$$

Для випадку, коли границя знаходиться зверху області (рис. 3.7), отримаємо наступні формули:

$$\begin{aligned} \rho_- &= f_7 + f_4 + f_8, \\ \rho_+ &= f_6 + f_2 + f_5, \\ \rho_0 &= f_3 + f_0 + f_1, \end{aligned} \tag{3.9}$$

Підставляючи (3.9) в (3.8), отримаємо загальну формулу знаходження густини на верхній границі розрахункової області, на основі відомих величин:

$$\rho = \frac{2(f_6 + f_2 + f_5) + f_3 + f_0 + f_1}{1 + u_y} \tag{3.10}$$

Цей метод, очевидно, може бути застосований лише до прямої границі. Для інших типів границь, наприклад, для кутових, інформації для визначення густини може виявитися недостатньо. У цьому випадку значення густини зазвичай екстраполюють за значеннями густини в сусідніх комірках.

3.5.2 Граничні умови Zou / He. Задання швидкості на границі рухомої стінки

Гранична умова, розроблена Q. Zou і X. He [37] для задання швидкості на границі, ґрунтується на застосуванні правила відображення функції розподілу від рівноважної функції.

Нехай функція розподілу з напрямком, протилежним до *k* має вигляд:

$$f_{\bar{k}} = f_k \tag{3.11}$$

Співвідношення (3.11) використовується для визначення невідомих функцій розподілу через відомі функції протилежного напрямку. Таким чином, для верхньої границі моделі D2Q9 справедлива формула:

$$f_2 - f_2^{eq} = f_4 - f_4^{eq} \tag{3.12}$$

Об’єднуючи в систему рівняння (2.21) і (3.12), можна отримати вирази для невідомих функцій розподілу. Для верхньої границі розрахункової області (рис. 3.7) система має вигляд:

$$\begin{cases} \rho\vec{u} = c\sum_{k=0}^{8}\vec{e}_k f_k, \\ f_2 - f_2^{eq} = f_4 - f_4^{eq}. \end{cases} \tag{3.13}$$

При заданні умови рухливої стінки вектор швидкості на верхній границі має вигляд: $\vec{u} = (u_x, 0)$. Розглядаючи перше рівняння системи (3.13), отримаємо систему із двох рівнянь:

$$\begin{cases} \rho u_x = cf_1 - cf_3 + cf_5 - cf_7 + cf_8 - cf_6 \\ 0 = cf_2 - cf_4 + cf_5 - cf_7 + cf_6 - cf_8 \end{cases} \tag{3.14}$$

Сумуючи рівняння системи (3.14), отримаємо:

$$\rho u_x = cf_1 + cf_2 - cf_3 - cf_4 + 2cf_5 - 2cf_7 \tag{3.15}$$

Далі, віднімаючи із першого рівняння системи (3.14) друге рівняння, отримаємо:

$$\rho u_x = cf_1 - cf_2 - cf_3 + cf_4 - 2cf_6 + 2cf_8 \tag{3.16}$$

Розглядаючи друге рівняння системи (3.13) і, користуючись формулою рівноважної функції розподілу (2.17), отримаємо:

$$\begin{aligned} f_4^{eq} &= \frac{1}{9}\rho\left(1 + \frac{3}{c}(-u_y) + \frac{9}{2c^2}u_y^2 - \frac{3}{2c^2}\vec{u}^{\,2}\right) \\ f_2^{eq} &= \frac{1}{9}\rho\left(1 + \frac{3}{c}u_y + \frac{9}{2c^2}u_y^2 - \frac{3}{2c^2}\vec{u}^{\,2}\right) \\ f_4^{eq} - f_2^{eq} &= \frac{1}{9}\rho\left(-\frac{6}{c}u_y\right) = -\frac{2}{3c}\rho u_y \\ f_4 &= f_2 + f_4^{eq} - f_2^{eq} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Невідоме значення f_4 розраховується за формулою:

$$f_4 = f_2 - \frac{2}{3c}\rho u_y \tag{3.18}$$

Підставляючи (3.18) в (3.15) і (3.16), отримаємо систему:

$$f_4(\vec{r},t) = f_2(\vec{r},t) - \frac{2}{3c}\rho(\vec{r},t)u_y(\vec{r},t),$$
$$f_7(\vec{r},t) = f_5(\vec{r},t) + \frac{1}{2}(f_1(\vec{r},t) - f_3(\vec{r},t)) - \frac{1}{6c}\rho(\vec{r},t)u_y(\vec{r},t) - \frac{1}{2c}\rho(\vec{r},t)u_x(\vec{r},t), \quad (3.19)$$
$$f_8(\vec{r},t) = f_6(\vec{r},t) - \frac{1}{2}(f_1(\vec{r},t) - f_3(\vec{r},t)) - \frac{1}{6c}\rho(\vec{r},t)u_y(\vec{r},t) + \frac{1}{2c}\rho(\vec{r},t)u_x(\vec{r},t).$$

Рівняння (3.19) визначають невідомі значення функції розподілу на границі області при умові рухомої верхньої границі.

3.6 Гранична умова витоку рідини

Методика визначення витоку рідини на границі аналогічна методиці визначення швидкості для рухомої стінки, що викладена в п. 3.5.

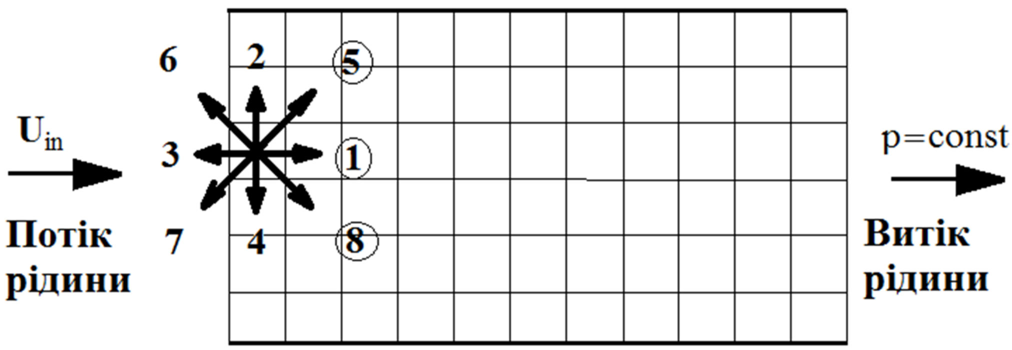


Рис. 3.8. Гранична умова витоку рідини

Для випадку, показаного на рис. 3.7, у якому швидкість на лівій границі має вигляд $\vec{u} = (u_x, 0)$ і $u_x = U_{in}$, вирази для невідомих значень функції розподілу визначаються наступним чином.

Скористаємося умовою Zou / He [37]: $f_1 - f_1^{eq} = f_3 - f_3^{eq}$ і рівноважним розкладом (2.17). Отримаємо:

$$f_1^{eq} = \frac{1}{9}\rho\left(1 + \frac{3}{c}u_x + \frac{9}{2c^2}u_x^2 - \frac{3}{2c^2}\vec{u}^2\right)$$

$$f_3^{eq} = \frac{1}{9}\rho\left(1 - \frac{3}{c}u_x + \frac{9}{2c^2}u_x^2 - \frac{3}{2c^2}\vec{u}^2\right)$$

$$f_1^{eq} - f_3^{eq} = \frac{1}{9}\rho\left(\frac{6}{c}u_x\right) = \frac{2}{3c}\rho u_x$$

$$f_1 = f_3 + \frac{2}{3c}\rho u_x \tag{3.20}$$

З формули (3.12) і (3.19) отримаємо:

$$f_5 = f_7 + \frac{1}{2}\left(f_4 - f_2\right) + \frac{1}{6c}\rho u_x \tag{3.21}$$

З формули (3.19) і (3.20) маємо:

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2}\left(f_2 - f_4\right) + \frac{1}{6c}\rho u_x \tag{3.22}$$

З формул (2.21) отримаємо:

$$\begin{cases} \rho u_x = cf_1 - cf_3 + cf_5 - cf_7 + cf_8 - cf_6 \\ \rho = \sum_{k=0}^{8} f_k \end{cases} \quad (-)$$

$$\frac{1}{c}\rho u_x - \rho = -f_2 - 2f_3 - f_4 - 2f_6 - 2f_7 - f_0$$

Остаточно, локальна густина може бути порахована за формулою:

$$\rho = \frac{\left(f_0 + f_2 + f_4\right) + 2\left(f_3 + f_6 + f_7\right)}{1 - \frac{1}{c}u_x} \tag{3.23}$$

Таким чином, знаючи швидкість витоку на границі (рис. 3.8), густина на границі і невідомі функції розподілу можна розрахувати за формулами (3.20) - (3.23).

3.7 Гранична умова витоку рідини

Задання граничної умови стоку рідини є однією з найбільш цікавих задач. Потрібно якось знехтувати деталями течії вниз по течії, які не надто важливі і при цьому отримати розв'язок в області вверх по течії [113]. При цьому чисельні експерименти показують, що нестійкість, яка зароджується на виході, може розповсюдитись вверх по течії і дати недостовірний результат.

Для реалізації умови стоку рідини в методі граткових рівнянь Больцмана зазвичай використовується гранична умова сталого тиску [37, 40, 57, 59, 60]. Методика задання цієї умови аналогічна методиці задання швидкості рідини на вході, що викладена в п. 3.6. Однак, вона не може бути застосована до описаного в даній роботі алгоритму через введені зміни. Тому пропонується використовувати спосіб [110], що базується на ідеї Паріса і Уітекер [113]. Для задачі про течію рідини в плоскому каналі вони запропонували використовувати наступні граничні умови на виході:

$$
\begin{gathered}
-\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial u_y}{\partial y} = 0
\end{gathered}
\tag{3.24}
$$

Позначаючи M - кількість комірок розрахункової сітки вздовж осі x і j - номер комірки вздовж осі y, отримаємо наступні умови [113]:

$$
\begin{gathered}
u_x\left(M-2, j\right) = u_x\left(M-1, j\right) \\
u_y\left(M-2, j\right) = u_y\left(M-1, j\right)
\end{gathered}
\tag{3.25}
$$

Для течії в плоскому каналі введемо більш жорстку умову. Покладемо компоненту швидкості u_y рівною нулю:

$$
\begin{gathered}
u_x\left(M-2, j\right) = u_x\left(M-1, j\right) \\
u_y\left(M-2, j\right) = 0
\end{gathered}
\tag{3.26}
$$

Після визначення компонент швидкості за формулами (3.25, 3.26) всі дев'ять значень функції розподілу перераховуються за формулою рівноважної функції розподілу (2.17).

3.8 Гранична умова для обертання кругового циліндра

Для задання умови обертання циліндра застосовується наступна методика. Розглянемо круговий циліндр радіуса *R*, який обертається зі сталою лінійною швидкістю v_l. Коло, показане на рис. 3.9, відповідає граничному шару комірок рідини, які безпосередньо примикають до циліндра. Знаючи швидкість обертання циліндра, обчислимо значення компонент швидкості v_x, v_y в кожній комірці з рідиною, яка межує з циліндром. Для цього, знаючи, що вектор швидкості спрямований по дотичній, скористаємося властивістю перпендикулярності векторів:

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = 0 \qquad (3.27)$$

де $\vec{v} = (v_x, v_y)$ – вектор швидкості в будь-якій точці кола;

$\vec{r}$ – вектор від центра кола до довільної точки на ньому;

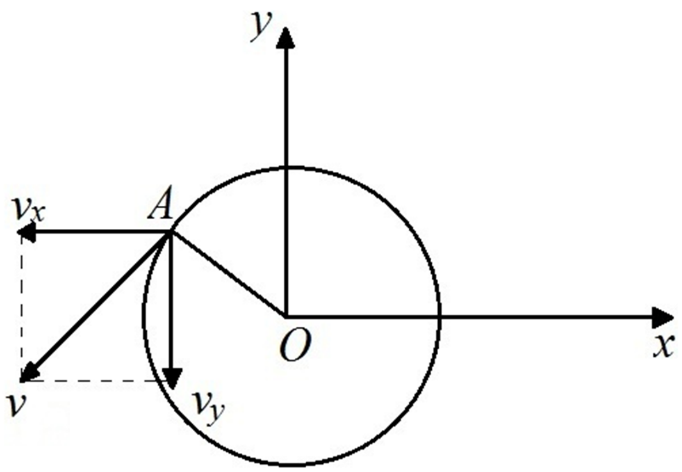


Рис. 3.9. Напрямок швидкості і її компонент в точці кола

Лінійна швидкість обертання v_l – модуль вектора швидкості $\bar{v}$

$$v_l = \left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{3.28}$$

Об’єднуючи рівняння (3.27) і (3.28) в систему, отримаємо систему нелінійних рівнянь для кожної комірки рідини, що відповідає колу на рис. 3.9:

$$\begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{r} = 0, \\ \left|\vec{v}\right|^2 = v_l^2. \end{cases} \tag{3.29}$$

Розв’язуючи систему (3.29) чисельно, отримаємо значення компонент швидкості $u_x = v_x, u_y = v_y$ в кожній комірці рідини. За цими значеннями, використовуючи формулу (2.17) для рівноважної функції розподілу Максвела, задамо всі дев’ять значень функції розподілу частинок у кожній комірці з рідиною, що межує з циліндром.

РОЗДІЛ 4. ПРОГРАМНО-МОДЕЛЮЮЧА СИСТЕМА НА ОСНОВІ МЕТОДУ ГРАТКОВИХ РІВНЯНЬ БОЛЬЦМАНА

На основі розвинутих чисельних схем, алгоритму та особливостей програмної реалізації та методів задання граничних умов методу граткових рівнянь Больцмана, що викладені у другому та третьому розділах, створена програмно-моделююча система у MS Visual Community 2015 на мові C++ із застосуванням технології паралельних обчислень на центральному процесорі OpenMP. Інтерфейс програми показаний на рис. 4.1.

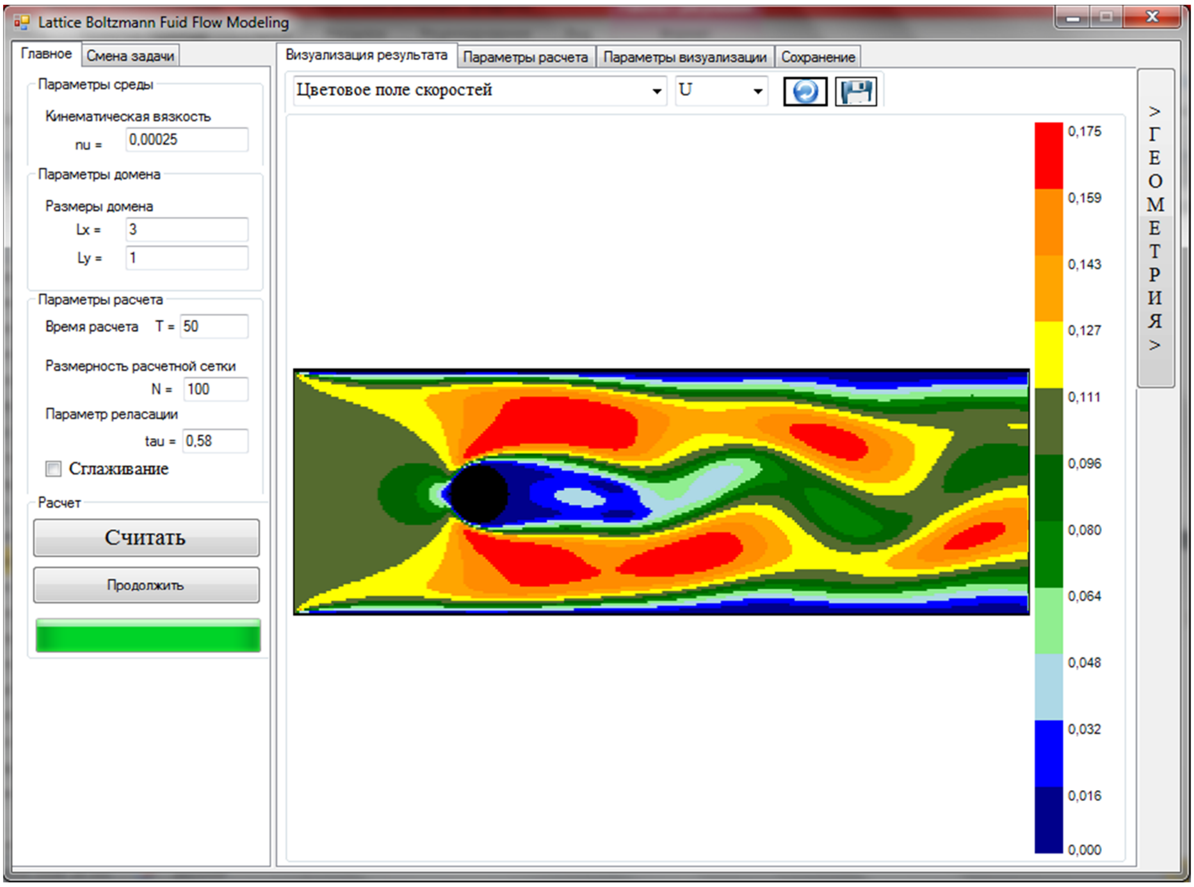


Рис. 4.1. Інтерфейс програми

Моделювання в’язких течій проводиться за розвинутим алгоритмом методу граткових рівнянь Больцмана. Функціонал програми включає в себе наступні можливості:

– задання параметрів течії: швидкості потоку рідини, коефіцієнту кінематичної в'язкості;

– задання параметрів моделювання: розміру розрахункової області, кількості комірок на одиницю довжини, параметра релаксації, часу моделювання;

– побудова стандартних або завантаження довільних геометрій;

– візуалізація результатів моделювання у вигляді діаграм розподілу модуля швидкості, компонент швидкості, тиску, ліній течії (лінії течії будуються за методом маркерів [114]) із різним заданим рівнем деталізації, епюр розподілу тиску;

– збереження результатів моделювання у вигляді табличних значень модуля швидкості, компонент швидкості та коефіцієнтів лобового опору, підйомної сили та тиску обтічних тіл;

– можливість дослідження течії в довільних перерізах.

4.1 Дослідження стійкості і точності розв'язків при моделюванні ламінарних течій у квадратній каверні

Розглядається задача про течію рідини в квадратній каверні. Для цієї задачі розглянуті наступні моделі каверн [115, 116]:

1. Закрита каверна з рухомою верхньою стінкою (рис. 4.2 *а*). У цій моделі рідина не надходить у каверну ззовні, а циркуляційна течія в каверні утворюється в результаті прилипання рідини до рухомої стінки.

2. Закрита каверна з частково рухомою верхньою стінкою (рис. 4.2 *б*).

3. Відкрита зверху каверна (рис. 4.2 *в*). Течія рідини в каверні збурена зовнішнім потоком при її обтіканні.

4. Відкрита з двох сторін каверна (рис. 4.2 *г*). Рідина в каверні приводиться в рух зовнішніми потоками з обох сторін каверни.

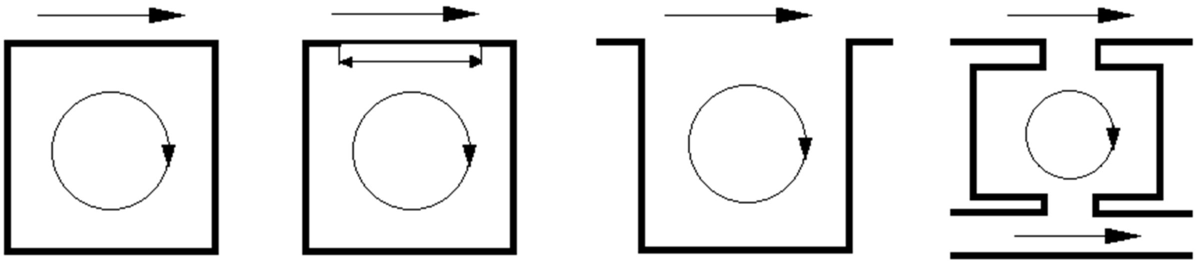


Рис. 4.2. Моделі каверн

Для течії рідини в каверні існує ряд аналітичних розв'язків, на основі побудованих аналітичних моделей нев'язкої рідини Ейлера [2], в'язкої рідини Стокса [117-119], моделі Чепмена [120], Денисона-Баума [121], Бюрграфа [122], лінеаризованих моделей пограничного шару [123] та інших. Крім того, подібні течії моделювалися методом скінченних різниць [124, 125], скінченних елементів [126], методом скінченних об'ємів [127], та іншими чисельними методами. У зв'язку з тим, що ця задача є відомою і добре вивченою, вона нерідко застосовується для верифікації та оцінки точності обчислювальних алгоритмів, як, наприклад, показано в роботах [128-131].

Крім того, дана задача є актуальною, оскільки подібні течії зустрічаються в багатьох областях науки і техніки (наприклад, в гідродинаміці [131, 132], машинобудуванні [133, 134], експлуатації машин і приладів [135]). Так, наявність каверн може істотно впливати на міцність матеріалів, характеристики різних приладів і машин, їх надійність і час експлуатації [132, 134, 135].

Фотографія течії в каверні, отримана експериментальним шляхом, показана на рис. 4.3 [136].

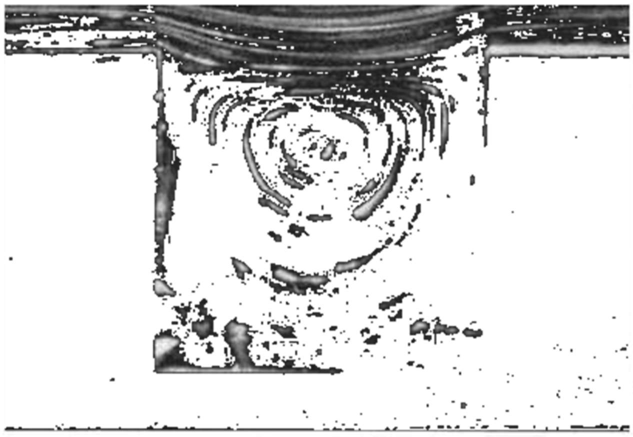


Рис. 4.3. Фотографія течії в квадратній каверні при $\mathrm{Re} = 0,01$

Рисунок 4.3 ілюструє течію при числі Рейнольдса $\mathrm{Re} = 0,01$. Число Рейнольдса – безрозмірний критерій подібності гідродинамічних систем, що обчислюється за формулою [137]:

$$\mathrm{Re} = \frac{U \cdot D}{\nu} \qquad (4.1)$$

де U – характерна швидкість течії;

D – характерний розмір обтічного тіла;

ν – коефіцієнт кінематичної в’язкості.

4.1.1 Постановка задачі

Розглянемо двовимірну задачу обтікання квадратної каверни зі стороною L течією в’язкої рідини, як показано на рис. 4.4 *а*. Для моделювання такої задачі розглянемо квадратну область зі стороною L = 1 в системі координат, що показана на рис. 4.4 *б*.

Задаються граничні умови непротікання (п. 3.4) на трьох сторонах каверни: бічних і нижній стороні і умова рухомої стінки (п. 3.5) на верхній границі. Рух верхньої стінки відповідає витоку рідини, що відбувається в додатньому напрямку осі x (рис. 4.4 *б*).

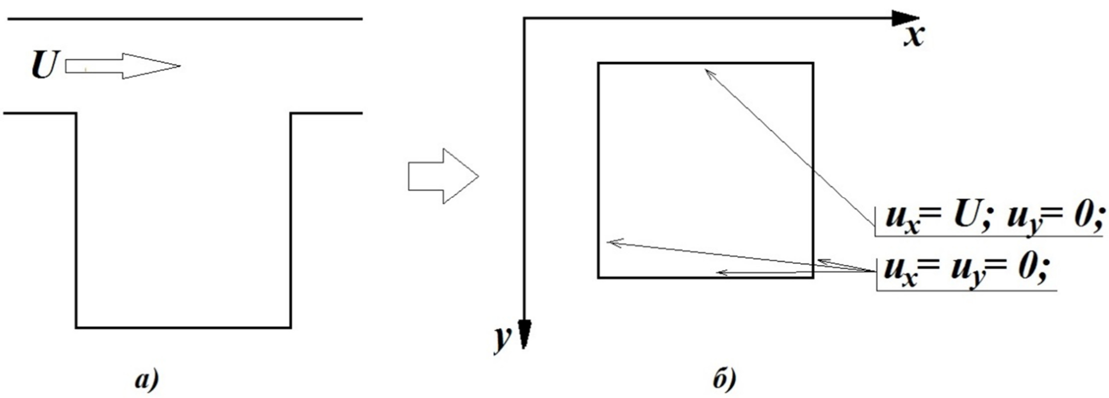
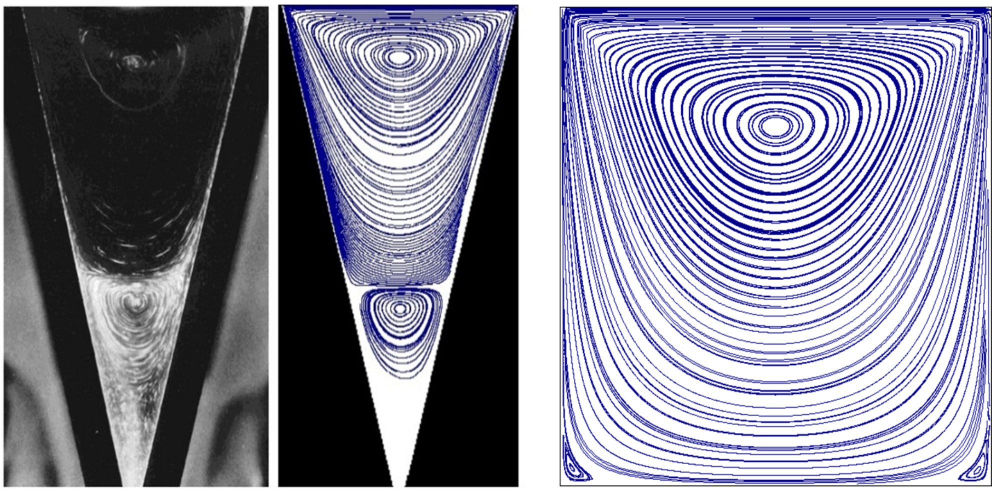


Рис. 4.4. Постановка задачі про течію рідини в каверні

а) схема обтікання каверни потоком рідини;

б) область моделювання і граничні умови.

Спершу, для тестування можливостей методу в областях малих чисел Рейнольдса, проведено моделювання течії в’язкої рідини у кавернах клиновидної та квадратної форм при малих числах Рейнольдса $\mathrm{Re} < 1$. В обох випадках виявлені перші два вихори із теоретично нескінченної послідовності вихорів Моффата (рис. 4.5). Отримані картини течії порівнювалися з результатами експерименту, представленому в альбомі Ван Дайка і свідчать про можливість моделювання тонких вихрових структур методом LBM.



а) *б)* *в)*

Рис. 4.5. Лінії течії у каверні при Re = 0,17

а) течія у клині – натурний експеримент M. Van Dyke б) течія у клині - моделювання LBM в) течія у квадратній каверні - моделювання LBM

Деякі результати моделювання течій у кавернах різних конфігурацій були отримані методом LBM у роботах [53, 78, 87]. Однак чисельне дослідження стійкості розв'язків, як в цих роботах, так і в інших за методом LBM проведено не було. Досліджується вплив граткового числа Маха M_p на точність отриманих результатів та вплив швидкості звуку в комірці c_s на стійкість. Для цього фіксується базова швидкість у комірці $c=1$ і параметр релаксації $\tau=1$. Тоді в'язкість рідини, згідно з формулою (2.11), обчислюється за формулою:

$$\nu = \frac{d}{6} \tag{4.2}$$

де d – розмір комірки розрахункової сітки.

Зафіксувавши сітку розміром 200×200 розмір комірки та в'язкість дорівнюють: $d=0,005$ і $\nu=8,33\cdot10^{-4}$. Розглядаючи різні значення швидкості витоку (руху верхньої стінки) $U=0,1;0,3;0,7$, отримані відповідні цим течіям числа Рейнольдса $\mathrm{Re}=120;360;840$ і, відповідні їм граткові числа Маха $M_p=0,057;0,17;0,4$.

Метод LBM залишається стійким при виконанні умови [15]:

$$c_s < \sqrt{1-U_{\max}^2}\,, \tag{4.3}$$

де c_s – швидкість звуку в комірці,

$U_{\max}$ – максимальне значення швидкості в розрахунковій області.

З урахуванням $c=1$ і $c_s=\frac{1}{\sqrt{3}}c$, має місце наступне обмеження для даної задачі:

$$U_{\max} < 0,81. \tag{4.4}$$

Крім того, для збіжності чисельних розв'язків повинна виконуватися нерівність: $M_p << 1$ [15].

Чисельні розв'язки, отримані методом граткових рівнянь Больцмана на сітці розмірності 200×200, порівнювалися з аналогічними результатами, отриманими в пакеті Comsol Multiphysics методом скінченних елементів (FEM) із сіткою «normal» за допомогою автоматичної тріангуляції розрахункової області на 1504 комірок.

4.1.2 Моделювання течії з числом Рейнольдса Re = 120

Розглядається течія в'язкої рідини в каверні зі швидкістю зовнішнього потоку $U = 0{,}1$. Цій течії відповідає число Рейнольдса $\mathrm{Re} = 120$ і граткове число Маха $M_p = 0{,}057$. За результатами моделювання були побудовані лінії рівня модуля швидкості для стаціонарної течії (рис. 4.6).

На рис. 4.6 видно, що виникає циркуляційна течія, що зароджується біля правої стінки каверни при русі зовнішнього потоку рідини зліва направо. Циркуляційна течія виражена слабо і не симетрична. Ядро течії зміщене до правої і верхньої стінок.

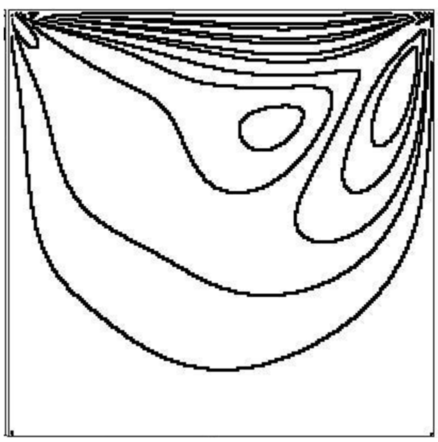


Рис. 4.6. Лінії рівня модуля швидкості, отримані методом LBM для течії з Re = 120

Для перевірки точності та фізичності отриманого розв'язку побудовані профілі швидкості в характерних вертикальних перерізах каверни. Ці профілі порівнювались із результатами чисельного розв'язку, отриманого методом скінчених елементів (FEM) в пакеті Comsol Multiphysics. На рисунку 4.7 представлені графіки модуля швидкості в характерних перерізах каверни $x = 0,25; 0,5; 0,75$. Суцільні лінії на графіку відповідають результатам, отриманим методом граткових рівнянь Больцмана (LBM), а точки – методом скінченних елементів (FEM). Вертикальна вісь відповідає значенням швидкості, а горизонтальна – y-координаті каверни.

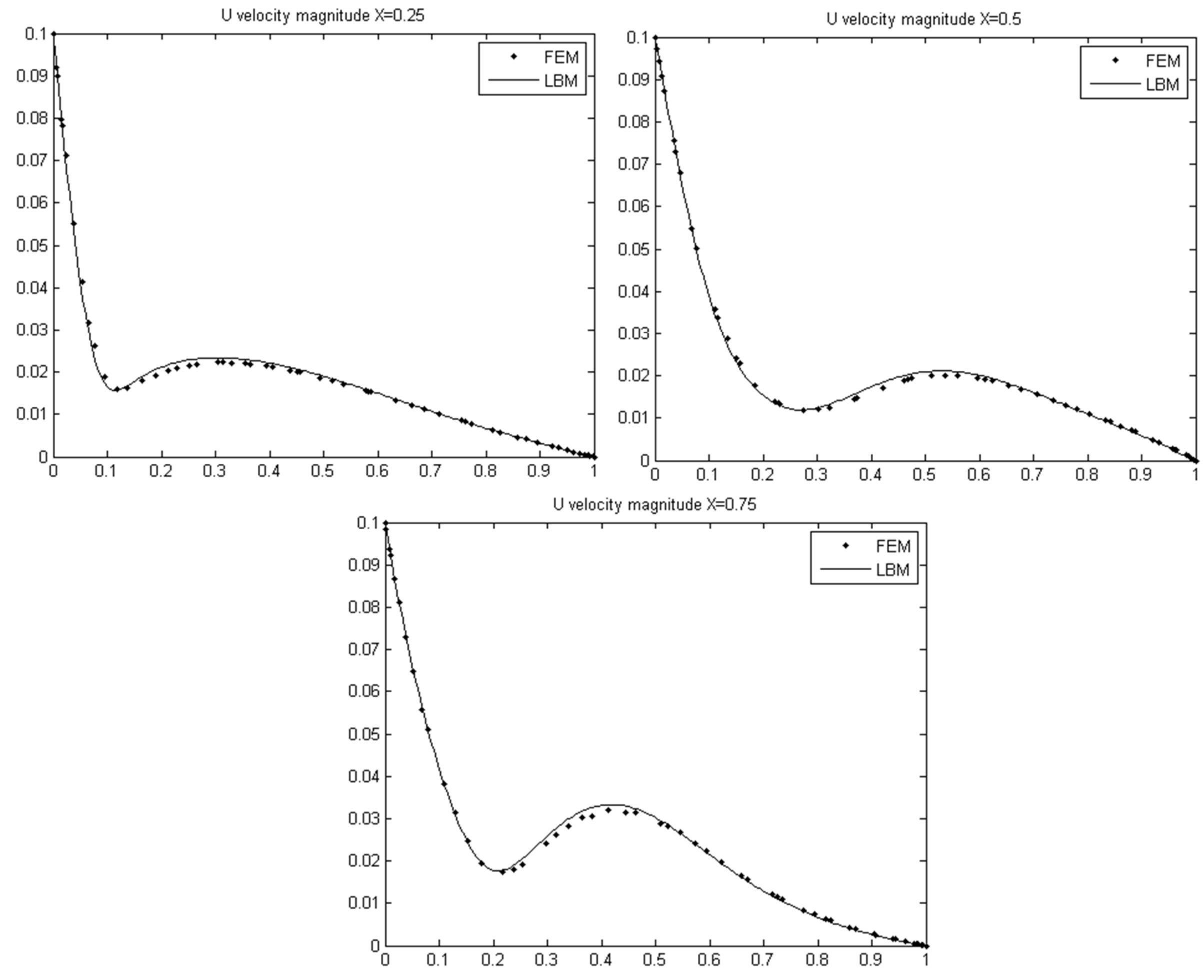


Рис. 4.7. Графіки розподілу модуля швидкості в перерізах каверни $x = 0,25; 0,5; 0,75,$ отримані методами LBM і FEM при Re = 120

На рис. 4.7 видно, що ядро циркуляційної течії зміщене до правої стінки каверни, оскільки стрибок швидкості з'являється близько перерізу x =0,75. У цій області спостерігається невелике відхилення значень швидкостей, які були отримані обома методами. Однак значення відносної похибки цих відхилень не перевищує 5%. В інших місцях маємо гарний збіг отриманих результатів. Тому можна говорити про хорошу точність чисельного розв'язку методом LBM для течії з Re = 120 і граткового числа Маха $M_p = 0,057$.

4.1.3 Моделювання течії з числом Рейнольдса Re = 360

Розглядається течія в'язкої рідини в каверні з параметрами: $U = 0,3; \mathrm{Re} = 360; M_p = 0,17$. Картина стаціонарної течії, що була отримана методом LBM, показана на рис. 4.8.

Картина течії, показана на рис. 4.8, ілюструє утворення внутрішнього ядра потоку. За результатами цього чисельного експерименту побудовані профілі швидкості у вертикальних перерізах каверни. На рисунку 4.9 представлені графіки модуля швидкості в характерних перерізах каверни $\left(x = 0,25; 0,5; 0,75\right)$ для методу LBM (суцільні лінії) і FEM (точки). По вертикальній осі відмічені значення швидкості, а по горизонтальній – y-координата каверни.

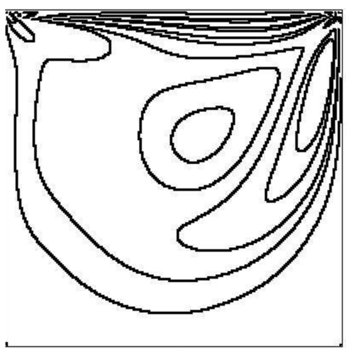


Рис. 4.8. Лінії рівня модуля швидкості, отримані методом LBM при Re = 360

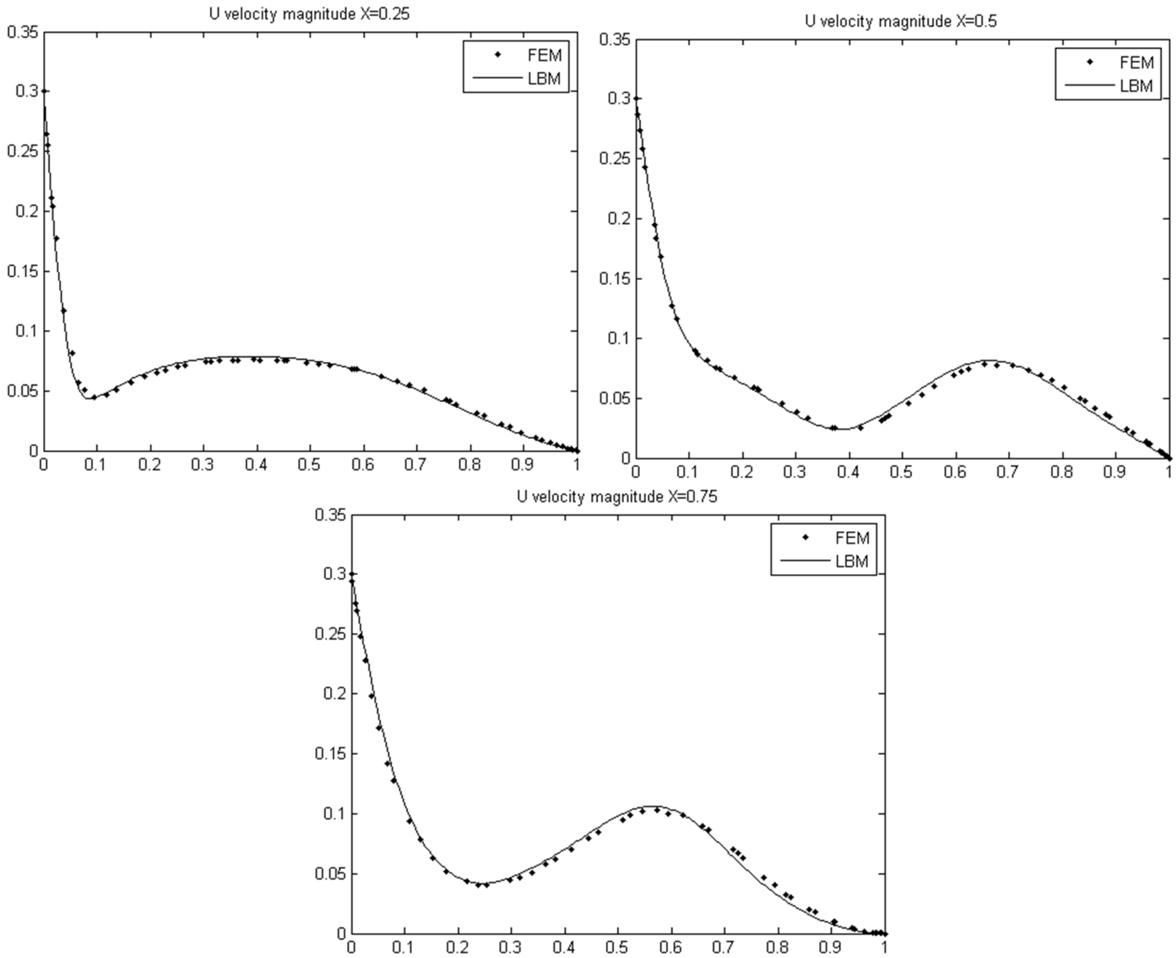


Рис. 4.9. Графіки модуля швидкості в перерізах каверни $x = 0,25; 0,5; 0,75$, отримані методами LBM і FEM при Re = 360

Результати, показані на рис. 4.8, 4.9 свідчать про зміщення ядра від краю правої стінки ближче до центру каверни для числа Рейнольдса Re = 360. Однак, профілі швидкості, отримані обома методами, практично збігаються з відносною похибкою не більше 5%.

Моделювання течії з числом Рейнольдса Re = 360 і гратковим числом Маха $M_p = 0,17$ показало високу точність отриманих результатів з відносною похибкою не більше 5% у порівнянні з чисельним експериментом, проведеним методом скінченних елементів.

4.1.4 Моделювання течії з числом Рейнольдса Re = 840

Швидкість потоку збільшена до $U = 0,7$ задля отримання течії рідини з числом Рейнольдса $\mathrm{Re} = 840$ і гратковим числом Маха $M_p = 0,4$. Схему стаціонарної течії в каверні показано на рис. 4.10.

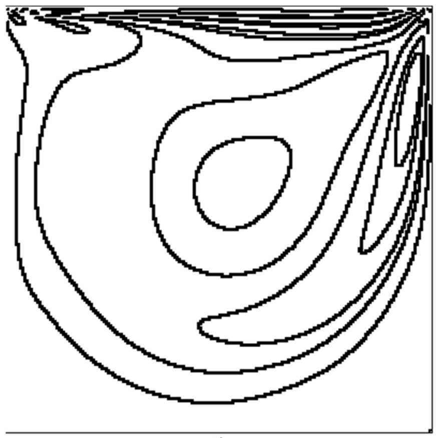


Рис. 4.10. Лінії рівня модуля швидкості, отримані методом LBM при Re = 840

На рис. 4.10 видно, що ядро циркуляційної течії змістилося ближче до центру каверни. Циркуляційна течія набуває симетричного характеру. Для аналізу отриманих результатів були побудовані графіки модуля швидкості в різних перерізах каверни (рис. 4.11).

На графіках 4.11 видно незначну відмінність результатів, отриману за обома чисельними методами.

З проведених досліджень, результати яких представлені на рис. 4.7, 4.9, 4.11 видно, що є незначна розбіжність між собою чисельних розв’язків зі зростанням числа Рейнольдса і граткового числа Маха (від 0,057 до 0,4), яке теж збільшується зі зростанням швидкості. Це пов’язано з тим, що дискретне наближення локальної рівноважної функції Максвелла-Больцмана (2.17) справедливе лише для малих чисел Маха. На практиці рекомендують використовувати значення числа Маха менше 0,3 $\left(M_p < 0,3\right)$ [17].

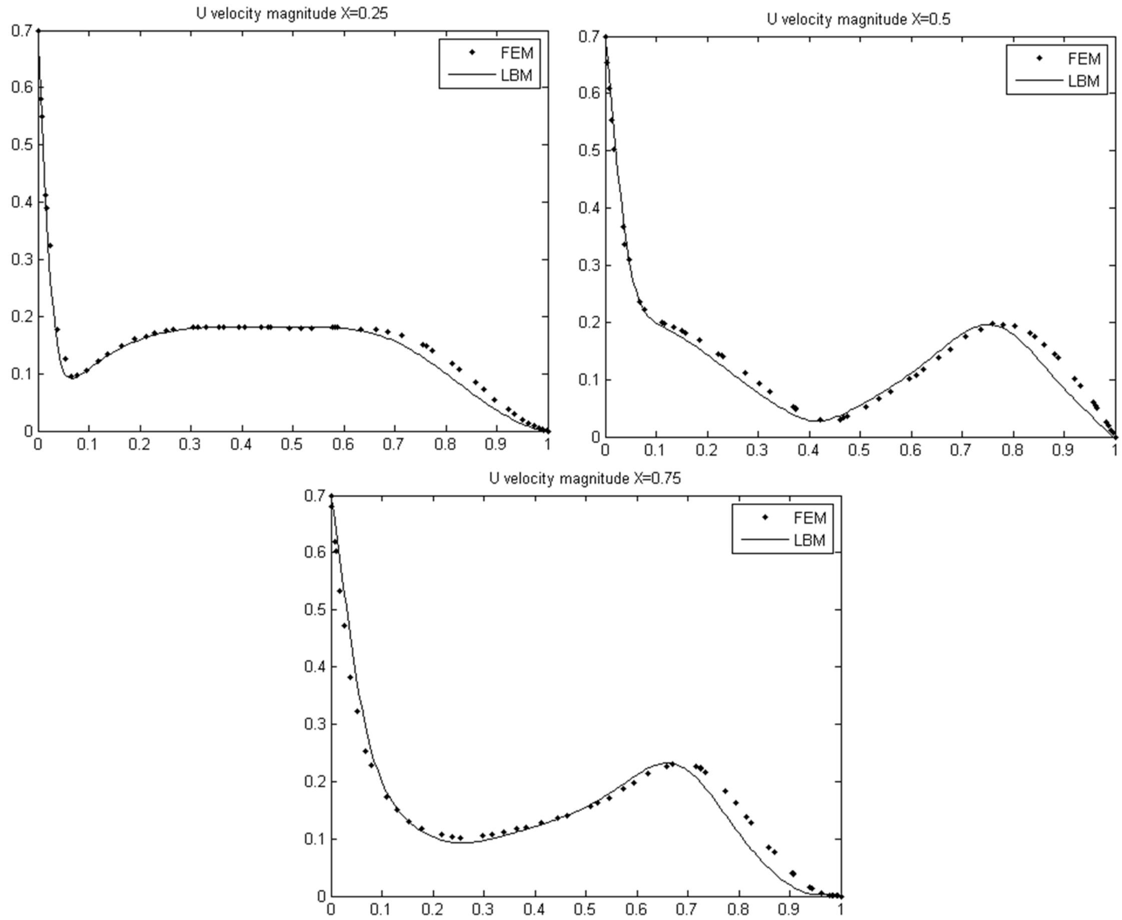


Рис. 4.10. Графіки модуля швидкості в перерізах каверни $x = 0,25; 0,5; 0,75$, отримані методами LBM і FEM при Re = 840

Інша проблема пов’язана з нестійкістю чисельного методу і обумовлена обмеженням на максимально можливе значення швидкості в обчислювальній області. Розв’язок, отриманий методом LBM на сітці 200×200, повністю розходиться при $U \geq 0.72$ (рис. 4.12), як і передбачалося із теоретичних міркувань (4.4).

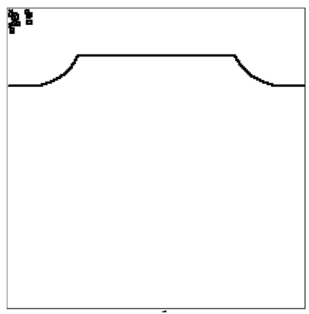


Рис. 4.12. Лінії рівня модуля швидкості, отримані методом LBM при Re = 864

Максимальне число Рейнольдса, при якому розв’язок залишається стійким на сітці 200×200, становить $\mathrm{Re} = 840$. Таким чином, $\mathrm{Re} = 840$ є критичним для поставленої задачі на сітці 200×200. Для моделювання течій при $\mathrm{Re} > 840$ необхідно подрібнювати розрахункову сітку.

4.1.5 Моделювання течії в каверні при числі Рейнольдса Re = 2160

Було проведено моделювання течії в каверні методом LBM із сіткою розмірності 600×600. Відповідно до формули (4.2) отримано $\nu = 2{,}78 \cdot 10^{-4}$. Зафіксувавши швидкість потоку $U = 0{,}6$, маємо $\mathrm{Re} = 2160,\ M_p = 0{,}35$. Лінії рівня швидкості для стаціонарної течії в каверні представлені на рис. 4.13.

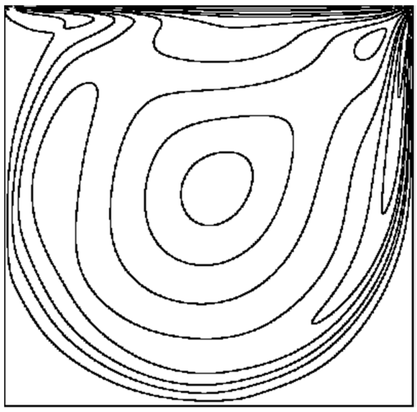


Рис. 4.13. Лінії рівня модуля швидкості в каверні, отримані методом LBM при Re = 2160

Видно, що циркуляційна течія стала більш виражена і практично симетрична. Ядро течії змістилося ближче до центру каверни і знаходиться в серединному вертикальному перерізі.

Порівняння чисельних розв’язків проілюструємо профілями швидкості для характерних перерізів каверни, показаних на рис. 4.14.

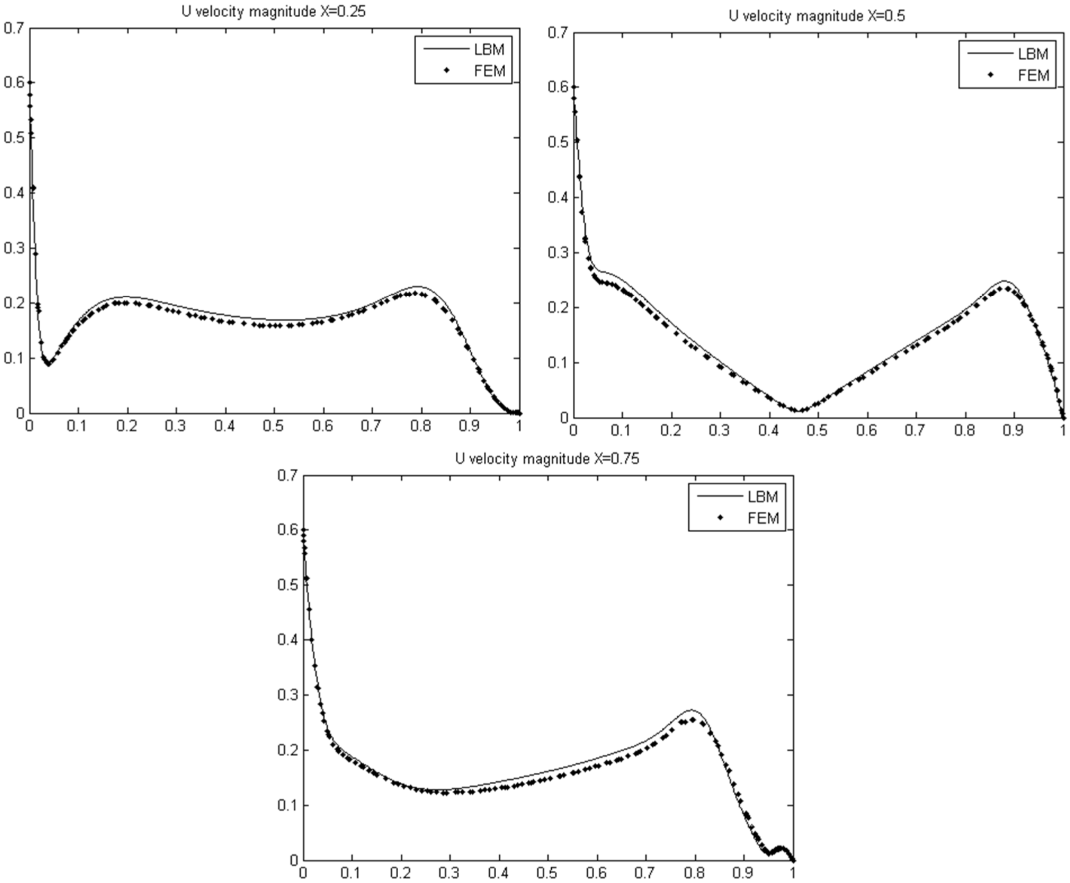


Рис. 4.14. Графіки модуля швидкості в перерізах каверни $x = 0,25; 0,5; 0,75$, отримані методами LBM і FEM при Re = 2160

Таким чином, проведені дослідження показують, що максимальне число Рейнольдса, при якому розв'язок залишається стійким, залежить від розміру комірок розрахункової сітки (рис. 4.15) для випадку, коли значення кінематичної в'язкості визначається через розмір комірок розрахункової сітки.

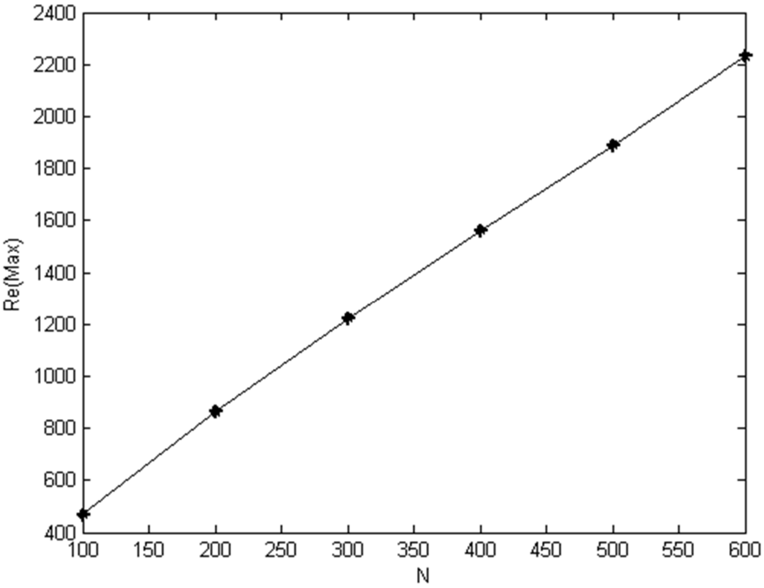


Рис. 4.15. Графік залежності критичного числа Рейнольдса від розміру комірок розрахункової сітки для каверни

Число Рейнольдса Re = 2160, що відповідає течії на рис. 4.13, є критичним для сітки 600×600, але не є граничним для LBM. Подрібнивши розрахункову сітку, можна моделювати течії з більшими числами Рейнольдса. Очевидно, що такий підхід призведе до збільшення часу розрахунку. Однак цього недоліку можна уникнути, якщо проводити розрахунки на потужних багатоядерних процесорах, при застосуванні технологій паралельних обчислень або використовуючи сервіси хмарних обчислень.

4.2 Дослідження впливу граткового числа Маха на точність розв’язків при моделюванні ламінарної течії в плоскому каналі

Алгоритм методу граткових рівнянь Больцмана було також протестовано на одній із найбільш поширених тестових задач обчислювальної гідродинаміки – задачі про течію в’язкої рідини в плоскому каналі. Така течія називається течією Пуазейля і характеризується параболічним профілем швидкості в діаметральному перерізі каналу (рис. 4.16) [138, 139]. Оскільки ця задача добре вивчена як теоретично, так і практично, використаємо її в якості тесту для перевірки адекватності чисельного алгоритму і способів задання граничних умов. Зауважимо, що ця задача вже розв’язувалася методом LBM в роботах [76, 78], але із застосуванням спрощеного алгоритму і з використанням іншого способу задання граничної умови на виході рідини з каналу. Крім того, вплив граткового числа Маха M_p на точність отриманих розв’язків не було розглянуто.

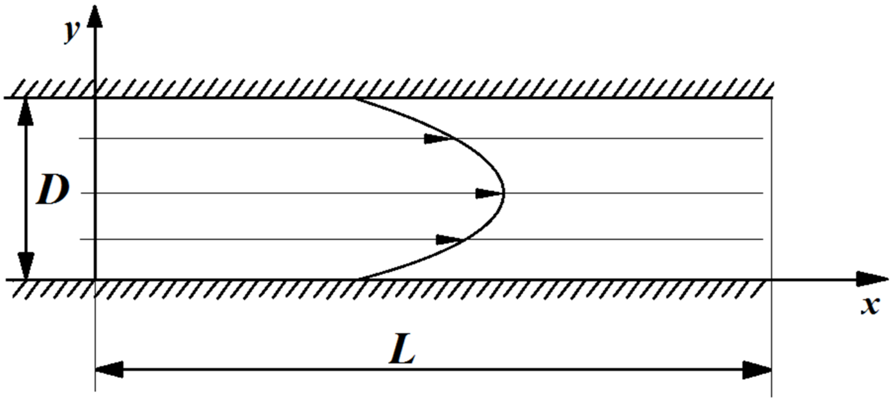


Рис. 4.16. Схема течії в плоскому каналі

Розглядається прямокутна розрахункова область з висотою D = 1 і довжиною L = 3. Зверху і знизу задамо граничну умову непротікання, зліва умову витоку рідини, а праворуч – стоку рідини. Моделюються стаціонарні ламінарні течії з числами Рейнольдса $\mathrm{Re} = 10, 100, 200$.

Отримані методом граткових рівнянь Больцмана (LBM) результати, а саме профілі швидкості на виході рідини з каналу, порівнювались із результатами, одержані методом скінченних елементів (або FEM, від англ. Finite Element Method) в пакеті Comsol Multiphysics. При моделюванні течій в пакеті Comsol Multiphysics використовувалася фізика ламінарних течій (*laminar flow spf*), в якій задавалися такі ж початкові і граничні умови, які описані вище. У розділі *materials* задавалася в’язкість рідини, значення якої змінювалось, щоб досягнути необхідного числа Рейнольдса. Розрахункова сітка була побудована вручну шляхом вибору параметра *user-controlled mesh*. При моделюванні обома методами використовувалися однакові рівномірні розрахункові сітки: $150\times450, 200\times600, 250\times750$. Розглядався вплив розмірності розрахункової сітки на значення граткового числа Маха M_p і точність отриманих результатів. Для D2Q9 моделі методу LBM, згрупувавши формули (2.9), (2.10), (2.12), (2.27), маємо наступний ланцюжок:

$$M_p = \frac{U_{\max}}{c_s} = \frac{\sqrt{3}\cdot U_{\max}}{c} = \sqrt{3}\cdot U_{\max}\frac{\Delta t}{d} = \frac{\sqrt{3}}{3}U_{\max}\frac{d}{\nu}\left(\tau - \frac{1}{2}\right)$$

де $U_{\max}$ – максимальне значення швидкості в розрахунковій області;

c_s – швидкість звуку в комірці;

c – базова швидкість в комірці;

Δt – крок за часом;

d – розмір комірки розрахункової сітки;

ν – кінематична в’язкість рідини;

τ – параметр релаксації.

Поклавши параметр релаксації $\tau = 1$ і, скориставшись формулою для розрахунку числа Рейнольдса (4.1), отримано наступну залежність граткового числа Маха M_p від розміру комірки розрахункової сітки d для поставленої задачі:

$$M_p = \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{Re}\cdot d \tag{4.5}$$

Подрібнення розрахункової сітки дозволяє зменшити граткове число Маха. Однак із формули (4.5) видно, що при збільшенні числа Рейнольдса в n раз, для збереження значення граткового числа Маха, слід подрібнити розрахункову сітку в n раз, що може негативно позначитися на швидкості обчислень.

У результаті моделювання стаціонарної течії з числом Рейнольдса $\mathrm{Re} = 10$ методом LBM була отримана картина течії, представлена на рис. 4.17.

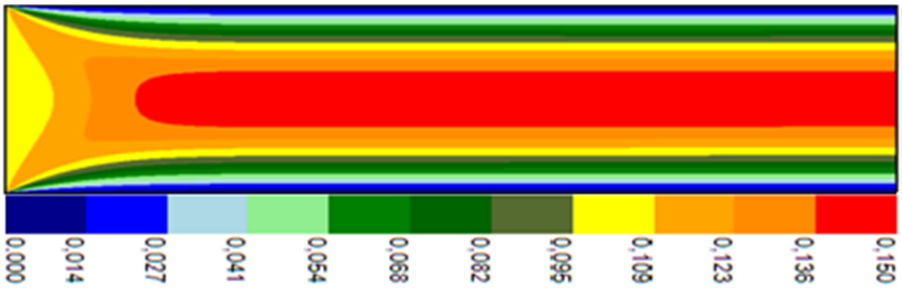


Рис. 4.17. Діаграма модуля швидкості для течії в каналі з $\mathrm{Re} = 10$ (швидкість потоку на вході $U_{in} = 0{,}1$)

За даними чисельного експерименту, проведеного методами LBM і FEM на різних сітках, отримані профілі швидкості на виході з каналу для різних граткових чисел Маха. Ці результати проілюстровано на рис. 4.18.

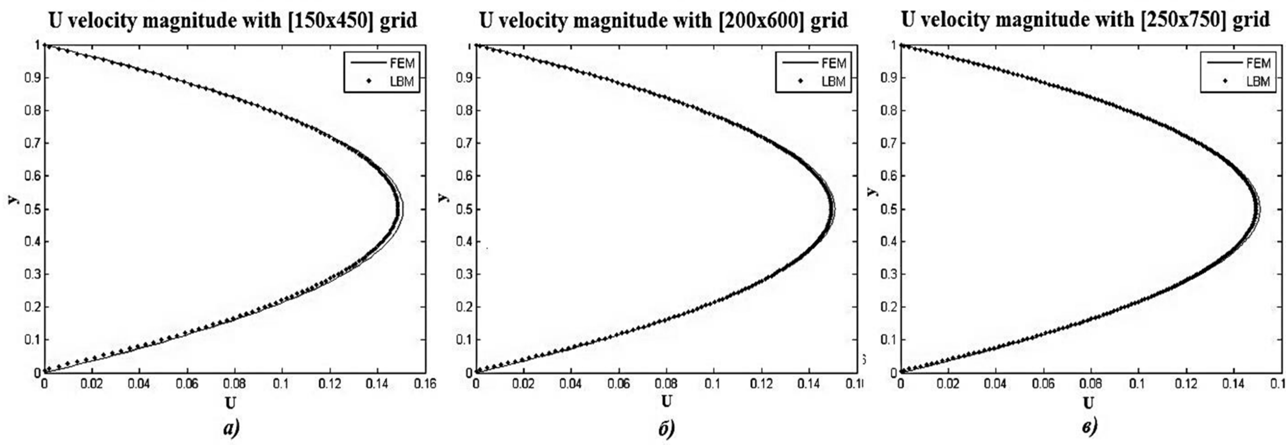


Рис. 4.18. Профілі модуля швидкості, отримані методами LBM і FEM: (*а*) сітка 150 × 450, M_p = 0,019, Re = 10; (*б*) сітка 200 × 600, M_p = 0,014, Re = 10; (*в*) сітка 250 × 750, M_p = 0,012, Re = 10.

На рис. 4.18 видно добру відповідність отриманих розв’язків. За цими даними побудовані графіки відносної похибки обчислень, отриманих методом LBM у порівнянні з результатами, отриманими методом FEM (рис. 4.19).

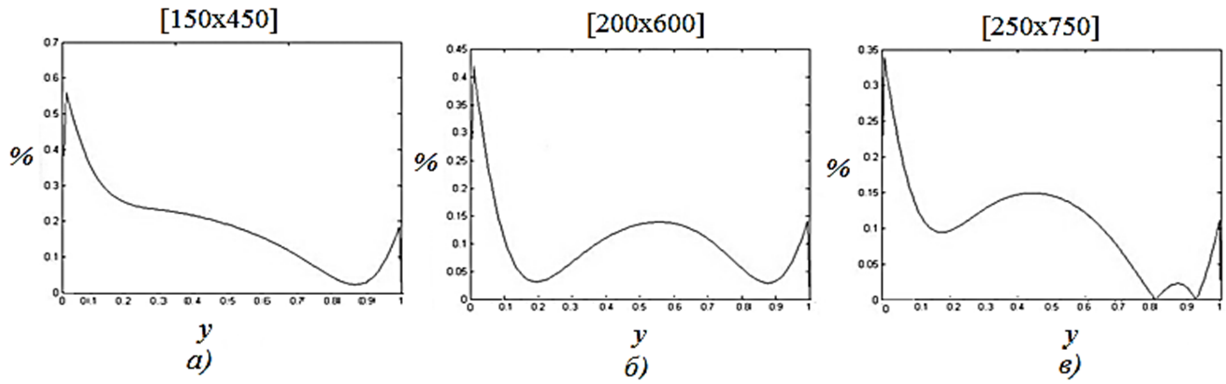


Рис. 4.19. Графіки відносної похибки LBM:

(*а*) сітка 150 × 450, M_p = 0,019, Re = 10; (*б*) сітка 200 × 600, M_p = 0,014, Re = 10; (*в*) сітка 250 × 750, M_p = 0,012, Re = 10.

Як видно з рис. 4.19, точність отриманих методом LBM розв'язків залежить від граткового числа Маха. Так, на сітці 150 × 450 при M_p = 0,019 відносна похибка обчислень не перевищує 0,6%, що говорить про достатню точність отриманих результатів.

Проведено моделювання стаціонарної течії в каналі на різних розрахункових сітках методами LBM і FEM із числом Рейнольдса до $\mathrm{Re}=100$. Результати чисельного моделювання зображені на рис. 4.20 у вигляді профілів швидкості на виході рідини із області.

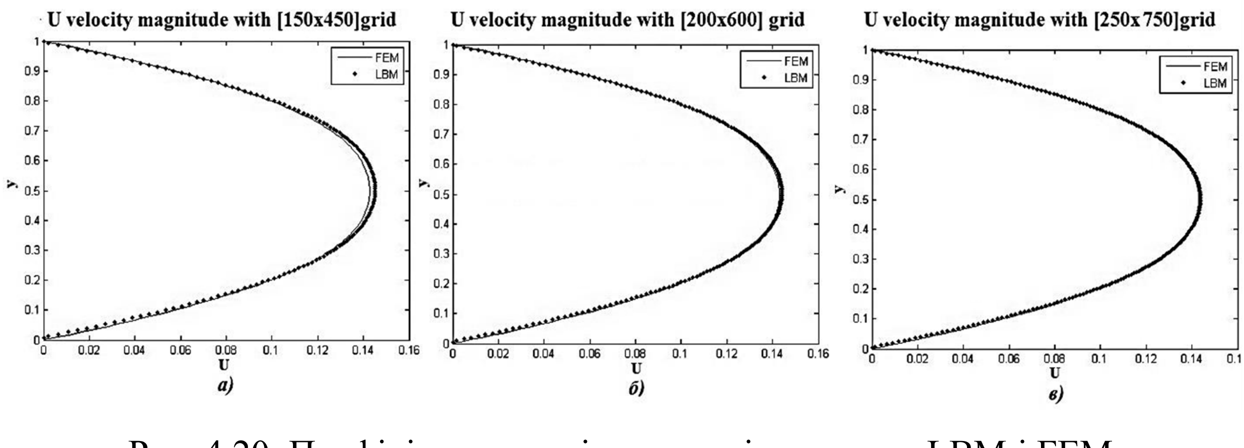


Рис. 4.20. Профілі швидкості, отримані методами LBM і FEM:

(*а*) сітка 150 × 450, M_p = 0,19, Re = 100; (*б*) сітка 200 × 600, M_p = 0,14, Re = 100; (*в*) сітка 250 × 750, M_p = 0,11, Re = 100.

За даними чисельних експериментів при Re = 100 розраховано відносну похибку чисельного розв'язку методом LBM. Результати представлені на графіках 4.21.

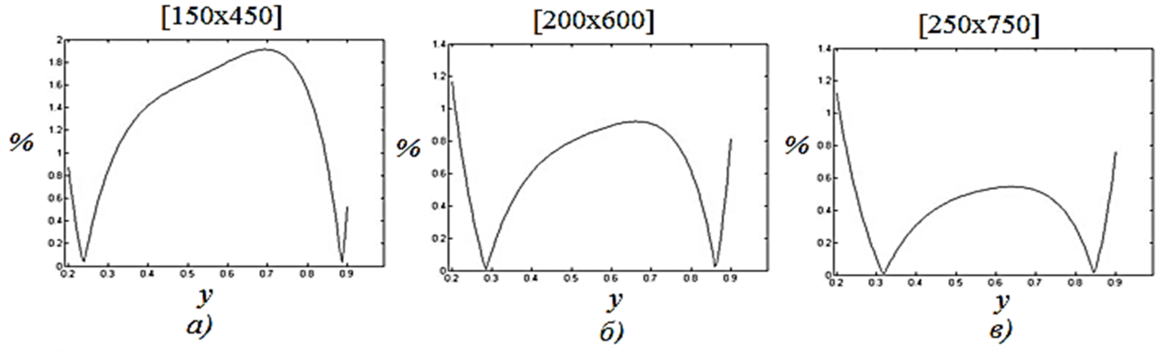


Рис. 4.21. Графіки відносної похибки LBM:

(a) сітка 150 × 450, M_p = 0,19, Re = 100; ($б$) сітка 200 × 600, M_p = 0,14, Re = 100; ($в$) сітка 250 × 750, M_p = 0,11, Re = 100.

Результати, представлені на рис. 4.21, відображають відносну похибку обчислень при моделюванні з гратковим числом Маха M_p = 0,19, що не перевищує 0,7%.

Аналогічна серія обчислень була проведена для течії з числом Рейнольдса $\mathrm{Re} = 200$. Профілі швидкості рідини на виході з каналу зображені на рис. 4.22.

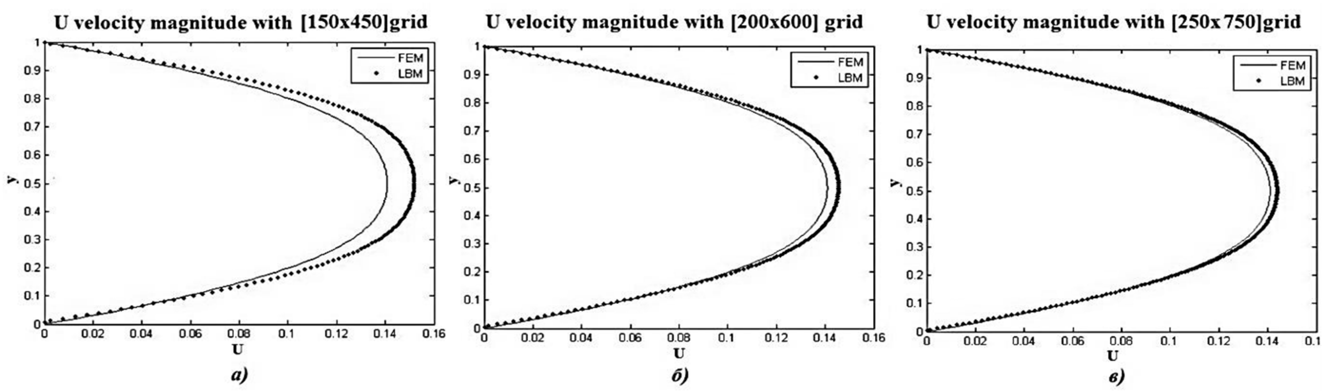


Рис. 4.22. Профілі швидкості, отримані методами LBM і FEM:

(a) сітка 150 × 450, M_p = 0,38, Re = 200; ($б$) сітка 200 × 600, M_p = 0,29, Re = 200; ($в$) сітка 250 × 750, M_p = 0,23, Re = 200.

Результати, представлені на рис. 4.22 свідчать про залежність точності розв'язку від граткового числа Маха, а також про вплив числа Рейнольдса і розмірності розрахункової сітки на граткове число Маха, розраховане за формулою (4.5). Для більш точного аналізу досліджувалися відповідні графіки відносної похибки (рис. 4.23).

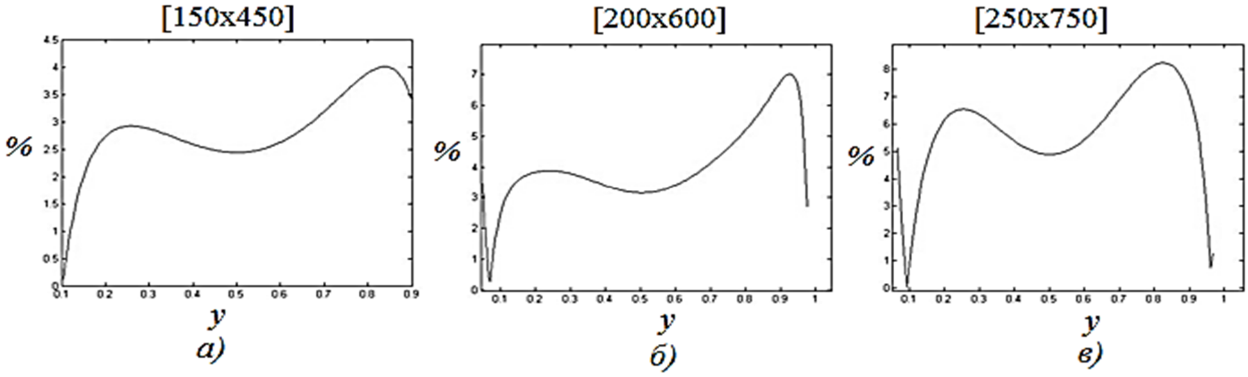


Рис. 4.23. Графіки відносної похибки LBM:
(*а*) сітка 150 × 450, M_p = 0,38, Re = 200; (*б*) сітка 200 × 600, M_p = 0,29, Re = 200; (*в*) сітка 250 × 750, M_p = 0,23, Re = 200.

Із рис. 4.18-4.23 видно, що розвинутий алгоритм методу LBM дозволяє отримати результати з високою точністю (похибка не перевищує 10%), якщо граткове число Маха $M_p < 0{,}3$. Причому зменшення граткового числа Маха призводить до збільшення точності отриманих розв'язків. Ці висновки були зроблені також у роботі [109] і відповідають теоретичним міркуванням, викладеним у роботі [17], що свідчить про адекватність описаного алгоритму і способу задання відповідних граничних умов.

4.3 Верифікація програми при моделюванні обтікання кругового циліндра в плоскому каналі при помірних числах Рейнольдса

Було проведено дослідження коректності моделювання методом LBM обтікання тіла потоком в'язкої рідини. У канал розміщувався круговий циліндр радіуса $R = 0{,}1$, як показано на рис. 4.24.

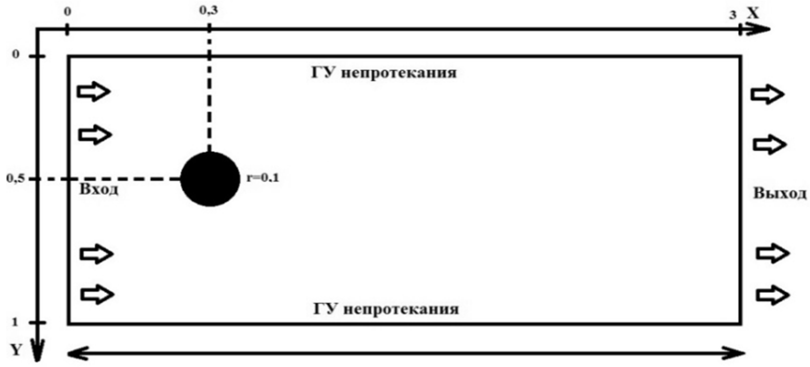


Рис. 4.24. Постановка задачі про обтікання циліндра в каналі

Моделювання було проведено для чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} = 10, 60, 100$. Отримані результати порівнювалися із існуючими теоретичними дослідженнями [142], натурними експериментами [140] і результатами чисельних експериментів [141, 143-145]. Згідно з дослідженнями [140, 141, 142-146], характер течії при обтіканні циліндра визначається числом Рейнольдса (рис. 4.25), а саме:

- при $\mathrm{Re} < 5$ течія повністю симетрична;
- при $5 < \mathrm{Re} < 40$ позаду циліндра утворюються два симетричних вихора за рахунок відриву пограничного шару, утвореного на передній частині циліндра;
- при $40 < \mathrm{Re} < 10^3$, у результаті відриву вихорів від циліндра, утворюється вихрова доріжка Кармана. Причому з ростом числа Рейнольдса зростає і частота відриву вихорів;
- при $10^3 < \mathrm{Re} < 10^5$ частота відриву вихорів стає сталою величиною;
- при $\mathrm{Re} > 10^5$ регулярність відриву порушується, і течія стає повністю турбулентною.

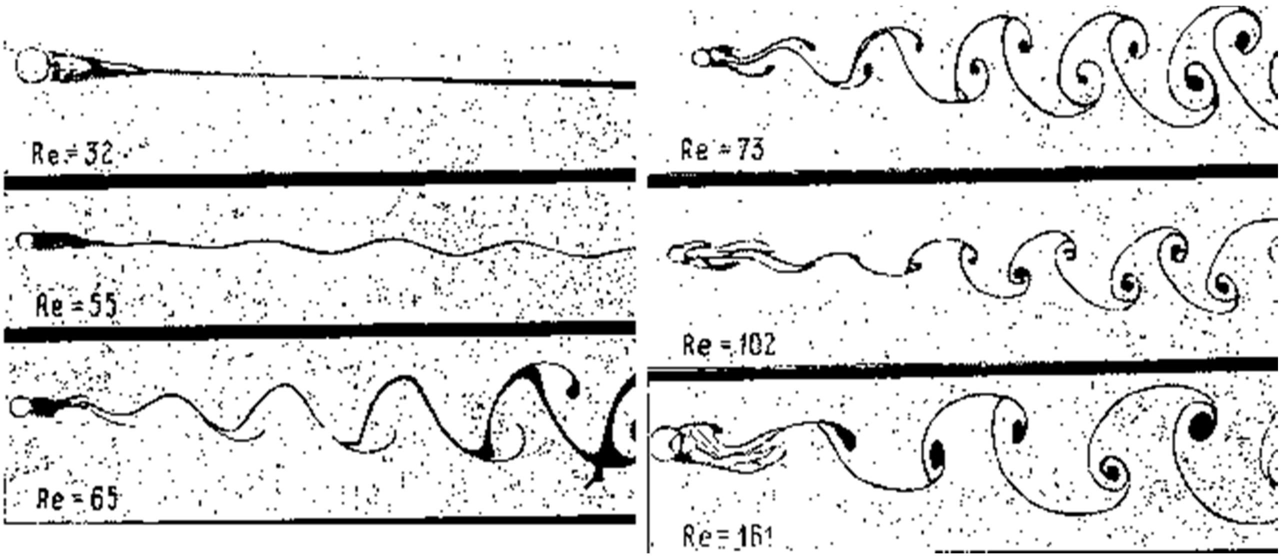


Рис. 4.25. Характер течії при обтіканні кругового циліндра із різними числами Рейнольдса

Результати чисельного розв’язку поставленої задачі методом граткових рівнянь Больцмана, представлені на рис. 4.26. На даному рисунку зображені діаграми x і y- компонент швидкості і модуля швидкості для течій із числами Рейнольдса $\mathrm{Re} = 10, 60, 100$. Як видно з рис. 4.26, при обтіканні циліндра при числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = 60, 100$ за циліндром з’являється вихрова доріжка Кармана. Причому поява вихорів відбувається при $\mathrm{Re} > 40$, що відповідає результатам робіт [142, 143].

Оцінювалась адекватність отриманих розв’язків для нестаціонарної вихрової течії з числом Рейнольдса $\mathrm{Re} > 40$. Для течій з $\mathrm{Re} = 60{,}100$ розраховувалось число Струхаля і отримані значення порівнюються з результатами, представленими в роботі [120]. Оскільки числа Рейнольдса невеликі (Re = 60, 100) і вихори сходять рівномірно, то застосуємо наступну методику розрахунку числа Струхаля.

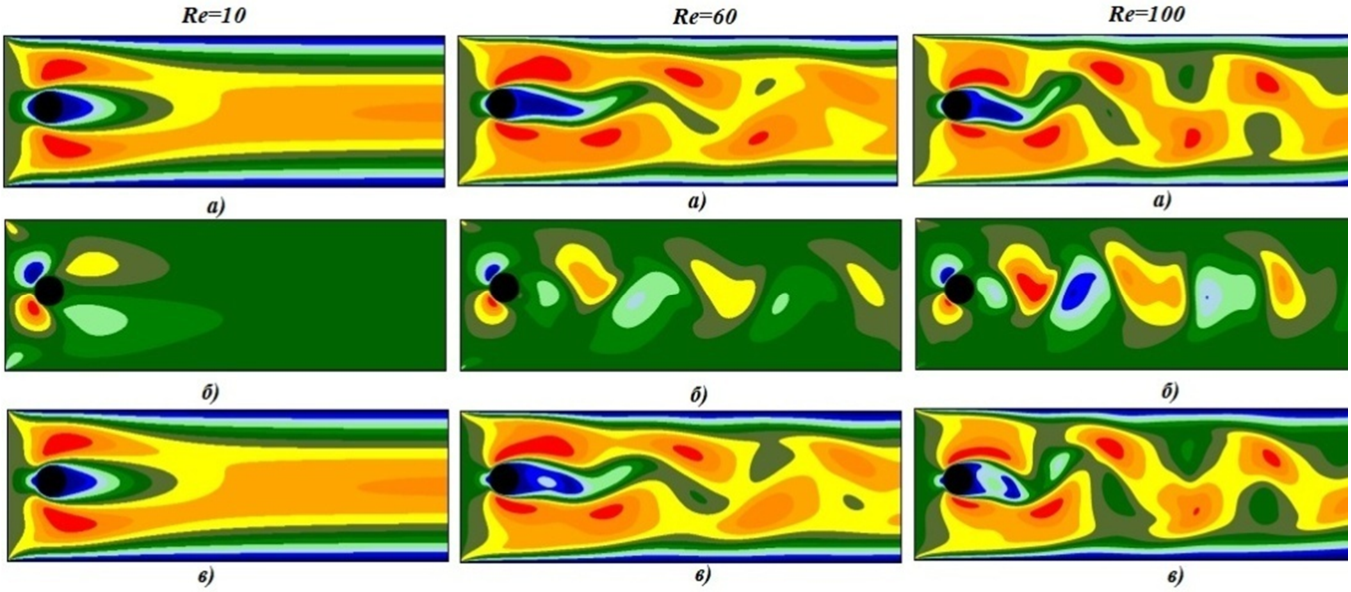


Рис. 4.26. Обтікання циліндра методом LBM для різних чисел Рейнольдса: (*а*) діаграма *x*-компоненти швидкості; (*б*) діаграма *y*-компоненти швидкості; (*в*) діаграма модуля швидкості.

Як показано в роботі [147], число Струхаля можна обчислити за формулою:

$$Sh = 0{,}809\frac{D}{l} \tag{4.6}$$

де D – діаметр кругового циліндра;

l – горизонтальна відстань між вихорами (рис. 4.27).

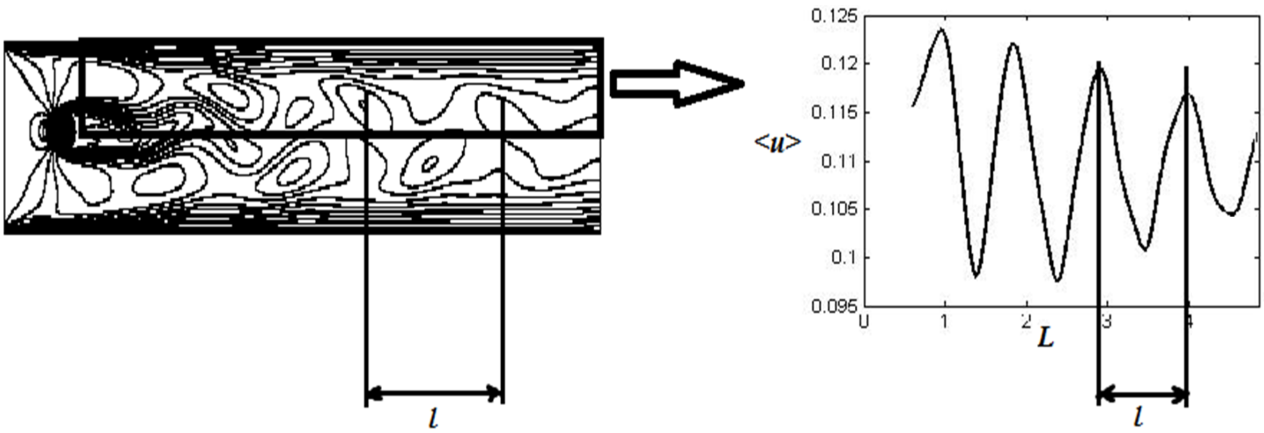


Рис. 4.27. Схема обчислення числа Струхаля по вихровій доріжці Кармана

Для обчислення горизонтальної відстань між вихорами ділимо область за циліндром прямою, що проходить через центр обтічного тіла так, щоб вихори, що чергуються, виявилися по обидві сторони від прямої. Обчисливши середнє значення швидкості $\langle u \rangle$ вздовж каналу в даній області, отримаємо криву, зображену на рис. 4.26. За даними отриманої кривої, піки якої відповідають центрам вихорів, знайдемо горизонтальну відстань між вихорами ℓ і розрахуємо число Струхаля. Проведемо чисельні розрахунки для граткових чисел Маха $M_p = 0,29; M_p = 0,21$. Ці значення відповідають розмірностям сітки з кількістю комірок на одиницю довжини N = 300 і $N = 400$ відповідно. Отримані результати порівнюються із теоретичними даними і відображені в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Результати розрахунку числа Струхаля, отримані LBM з різними числами Маха M_p і Re = 60

-	N= 300 M_p = 0,29	N= 400 M_p = 0,21
Sh методом LBM	0,1480	0,1464
Відносна похибка, %	8,0%	6,8%

Видно, що подрібнення розрахункової сітки для Re = 60 не дає істотного збільшення точності обчислення і навіть для величини M_p = 0,29 відносна похибка становить 8,0%.

Аналогічні розрахунки були проведені для течії з Re = 100. Число Струхаля дорівнює $Sh = 0{,}1671$, що узгоджується з роботою [120]. Порівняємо це значення з даними чисельного експерименту і запишемо результати в таблицю 4.2.

Таблиця 4.2.

Результати розрахунку числа Струхаля *Sh*, отримані LBM з різними числами Маха M_p і Re = 100

-	N= 500 $M_p = 0{,}34$	N= 700 $M_p = 0{,}21$
Sh за методом LBM	0,1721	0,1651
Відносна похибка, %	3,0%	1,2%

Таким чином, отримані результати повністю відповідають теоретичним і експериментальним даним. За результатами теоретичних досліджень [17], чисельних експериментів [109], і даних, представлених у цьому розділі, можна зробити висновок, що для отримання результатів з відносною похибкою менш 10% граткове число Маха має бути $M_p < 0{,}3$.

4.4 Обчислення коефіцієнтів лобового опору

Проводилось обчислення коефіцієнта лобового опору при ламінарному обтіканні кругового, квадратного і прямокутного циліндрів потоком в'язкої рідини [148]. Обмежимося лише обчисленням коефіцієнта лобового опору, оскільки для помірних чисел Рейнольдса коефіцієнт підйомної сили мало змінюється і, в основному, коливається біля нуля [94, 141].

Розрахункова область розглядається у вигляді квадрата з довжиною сторони H, у центрі якого знаходиться циліндр діаметра D = 0,125 (рис. 4.27). Причому, якщо циліндр квадратний, то в якості діаметра будемо брати довжину сторони квадрата, а якщо прямокутний – то висоту. Коефіцієнт перешкоди течії $B = H / D$ фіксований для всіх обчислень (B = 8), що відповідає значенню найбільш поширених чисельних експериментів [73, 94, 141, 144-146].

На верхній і нижній границях області (рис. 4.28) та на границях циліндра задається умова непротікання рідини. На лівій границі області –

умова витоку рідини, на правій – умова стоку рідини. Швидкість витоку рідини фіксована $U_{in} = 0,1$. Моделюються течії з числами Рейнольдса $10 \le \mathrm{Re} \le 100$. Значення числа Рейнольдса Re варіюється зміною кінематичної в'язкості рідини ν.

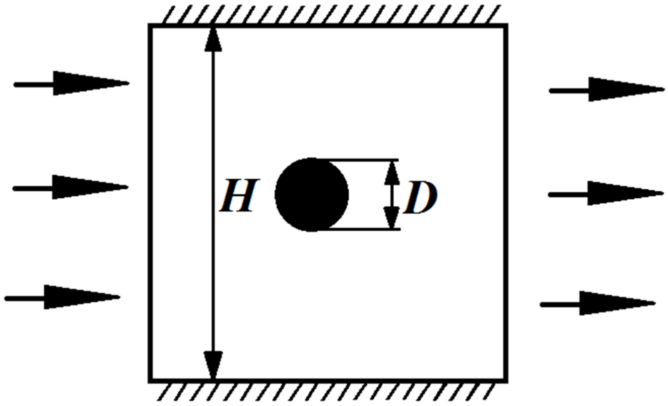


Рис. 4.28. Розрахункова область

4.4.1 Обтікання кругового циліндра

Результати обчислення коефіцієнта лобового опору для кругового циліндра з коефіцієнтом перешкоди течії B = 8 представлені як в експериментальних дослідженнях [140], так і в чисельних розрахунках [141, 144-146]. Тому отримані результати чисельного розв'язку методами FEM і LBM будемо порівнювати з цими даними.

Розглядались стаціонарні течії при обтіканні кругового циліндра. Таким течіям відповідають течії з числами Рейнольдса Re ≤ 40. Для стаціонарних течій з числами Рейнольдса Re = 10, 20, 30, 40 був виконаний чисельний розрахунок методом LBM на різних сітках так, щоб виконувалася умова $M_p \le 0,15$. Розрахунки методом FEM проведені на автоматично створеній у результаті тріангуляції розрахунковій сітці (the finest physics-controlled mesh) з кількістю комірок 12798 (рис. 4.29).

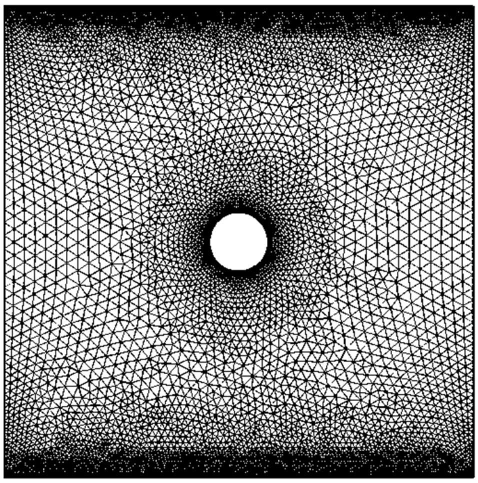


Рис. 4.29. Автоматична сітка (the finest physics-controlled mesh) в пакеті Comsol Multiphysics

Ґрунтуючись на відомих експериментальних даних і результатах чисельних експериментів, проведених методами LBM і FEM, була складена таблиця 4.3.

Таблиця 4.3

Порівняння коефіцієнтів лобового опору кругового циліндра для різних чисел Рейнольдса

	Re = 10	Re = 20	Re = 30	Re = 40
Експеримент (Tritton [140])	-	2,22	-	1,48
Моделювання (Calhoun [141])	-	2,19	-	1,62
Моделювання (Dennis and Chang [145])	-	2,05	-	1,52
Моделювання (Fornberg [146])	-	2,00	-	1,50
Моделювання (Perumal [94])	3,21	2,25	1,74	1,50
Розрахунки методом FEM	2,98	2,11	1,77	1,59
Розрахунки методом LBM	2,95	1,96	1,74	1,47

Як видно з таблиці 4.3 результати, отримані для граткових чисел Маха $M_p \leq 0{,}15$, дають гарну точність з відносною похибкою менше 10%.

Були також розглянуті нестаціонарні течії, що відповідають числам Рейнольдса $\mathrm{Re} > 40$ (рис. 4.30).

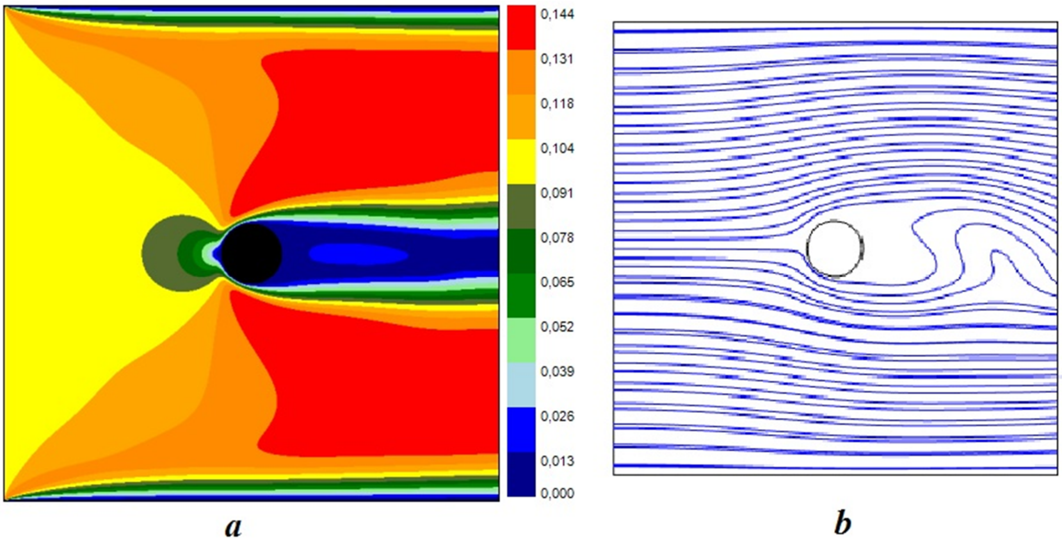


Рис. 4.30. Нестаціонарна течія біля кругового циліндра з Re = 60

a) діаграма модуля швидкості *b*) лінії течії

Для числа Рейнольдса Re = 60 коефіцієнт лобового опору дорівнює $C_d = 1{,}40$ (робота [94]) і $C_d = 1{,}37$ згідно результатів чисельного розв'язку методом FEM. Таблиця 4.4 показує відносну похибку чисельних результатів при Re = 60.

Таблиця 4.4

Порівняння коефіцієнта лобового опору при Re = 60.

	N= 500 M = 0,23	*N*= 600 M = 0,19
C_d , методом LBM	1,3499	1,3325
Відносна похибка,% [94]	3,6	4,8
Відносна похибка,% (FEM)	1,5	2,7

Результати, представлені в таблиці 4.4, свідчать про гарну точності отриманих чисельних розв'язків для нестаціонарної течії. Відносна похибка становить менше 5% для граткового числа Маха менше 0,25.

4.4.2 Обтікання квадратного циліндра

Розглянемо коефіцієнт лобового опору C_d при обтіканні квадратного циліндра. Аналогічно п. 4.4.1 розрахунки будемо виконувати методами LBM і FEM. Розглянемо стаціонарні течії з $\mathrm{Re} < 40$. У таблиці 4.5 представлено порівняння отриманих значень коефіцієнта лобового опору для чисел Рейнольдса Re = 10, 20, 30. Розрахунки методом LBM виконувалися на різних сітках (з різною кількістю комірок на одиницю довжини N) і, відповідно, з різними гратковими числами Маха M_p. В таблиці представлена також відносна похибка отриманих розв'язків ε.

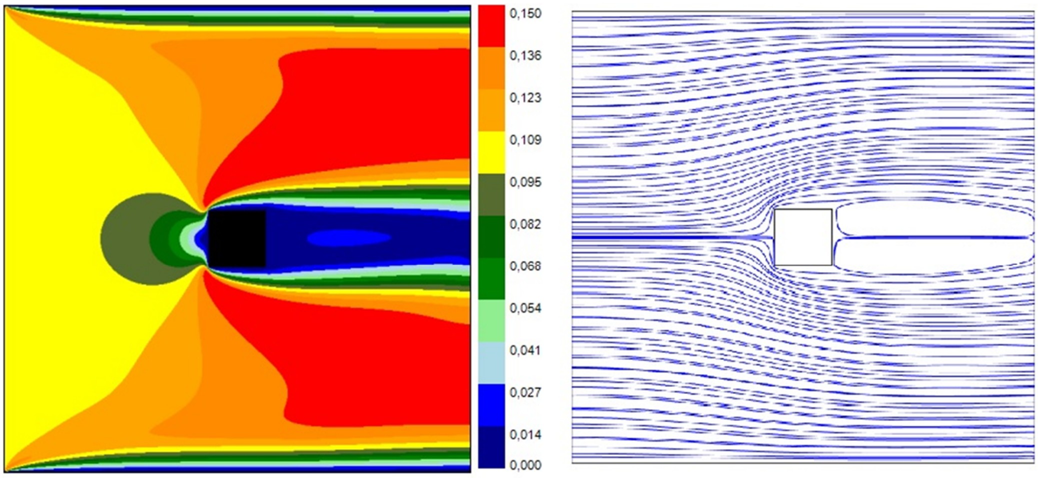
Таблиця 4.5

Порівняння коефіцієнтів лобового опору для Re = 10, 20, 30 на різних сітках

Re	10			20			30		
C_d, FEM	3,3885			2,3854			1,9866		
N M	100 0,22	150 0,14	250 0,09	200 0,21	300 0,13	400 0,1	300 0,20	400 0,15	500 0,11
C_d, LBM	3,86	3,54	3,4	2,47	2,30	2,38	1,99	1,97	1,92
ε,%	14,0	4,5	2,3	3,7	3,5	0,3	0,6	0,5	3,6

Результати, представлені в табл. 4.5, свідчать про високу точність отриманих чисельних розв'язків для стаціонарної течії при обтіканні квадратного циліндра.

Результати чисельних розрахунків для нестаціонарної течії при Re = 60, проілюстровані на рис. 4.31 і представлені в таблиці 4.6.



a **b**

Рис. 4.31. Нестаціонарна течія біля квадратного циліндра при Re = 60

a) діаграма модуля швидкості *b*) лінії течії

Обчислений коефіцієнт лобового опору в роботі [73] має значення $C_d = 1,42$, в той час як чисельний експеримент методом скінчених елементів дає $C_d = 1,5657$.

Таблиця 4.6

Порівняння коефіцієнтів лобового опору для Re = 60 на різних сітках та з різними гратковими числами Маха M_p.

	N= 500 M_p = 0,24	*N* =600 M_p = 0,19
C_d, LBM	1,5726	1,4640
Відносна похибка,%, [73]	10,7	3,1
Відносна похибка,%, FEM	0,4	6,5

Всі чисельні результати, отримані методом LBM для чисел Рейнольдса з діапазону $10 \le \mathrm{Re} \le 60$, показали відповідність експериментальним даним і результатам інших чисельних експериментів (табл. 4.3-4.6). Більш того, точність обчислень зростає зі зменшенням граткового числа Маха. Природно, що час обчислення зростає зі зменшенням числа Маха. Тому для того, щоб отримати розв'язок з похибкою менше 10% і не проводити витратних за часом обчислень, згідно даних таблиць 4.3-4.6, пропонується виконувати розрахунки з гратковим числом Маха $M_p \le 0{,}15$.

4.4.3 Обтікання прямокутного циліндра

Обчислюється коефіцієнт лобового опору при обтіканні потоком в'язкої рідини прямокутного циліндра з висотою H = 0,125 і з шириною $W = 0{,}2$. Коефіцієнт перешкоди течії дорівнює B = 8. Для порівняння отриманих результатів виконаємо аналогічні розрахунки методом FEM.

Проведено чисельне моделювання обтікання прямокутного циліндра з числами Рейнольдса Re = 10, 20, 30, 40, 60. Характер течії показаний на рис. 4.32.

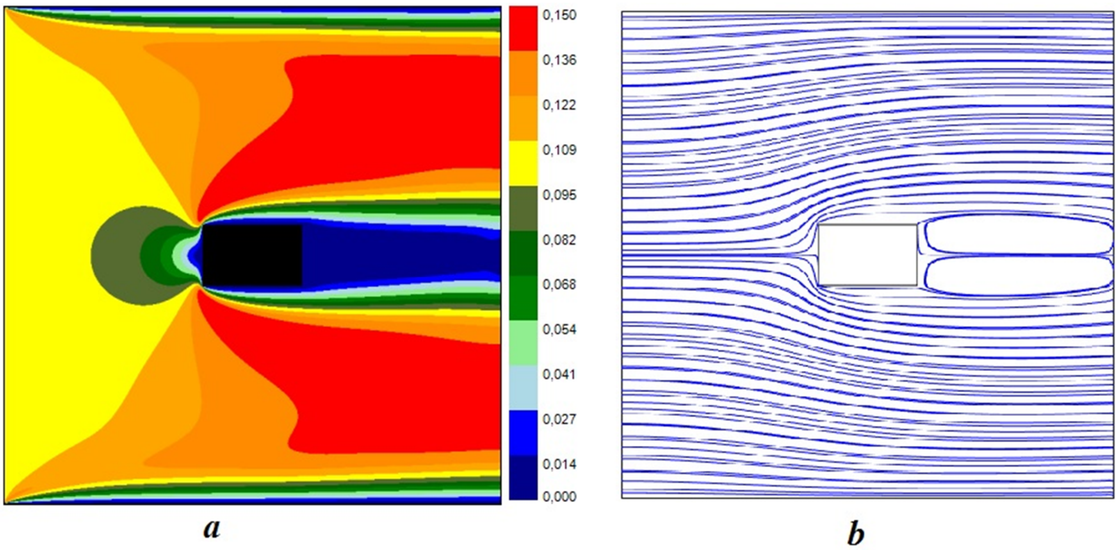


Рис. 4.32. Нестаціонарна течія біля прямокутного циліндра при Re = 60

a) діаграма модуля швидкості *b*) лінії течії

Результати обчислення коефіцієнта лобового опору для поставленої задачі представлені в таблиці 4.7.

Таблиця 4.7

Порівняння коефіцієнтів лобового опору для Re = 10, 20, 30, 40, 60 та $M_p < 0,2$.

	Re = 10 N = 200 M = 0,11	Re = 20 N = 300 M = 0,14	Re = 30 N = 400 M = 0,15	Re = 40 N = 500 M = 0,16	Re = 60 N = 650 M = 0,18
C_d, LBM	2,4880	1,6383	1,2967	1,1246	0,9324
C_d, FEM	2,2771	1,5569	1,2744	1,1112	0,9485
ε,%	9,3	5,2	1,7	1,7	1,7

Дані таблиці 4.7 свідчать про гарну точність отриманих чисельних розв’язків. Таким чином, можна зробити висновок, що розвинутий алгоритм підходить для обчислення коефіцієнта лобового опору прямокутного циліндра при його обтіканні течіями рідини з помірними числами Рейнольдса.

4.5 Дослідження впливу параметра релаксації на процес моделювання на прикладі обтікання кругового циліндра

У даному пункті досліджується вплив параметра релаксації методу граткових рівнянь Больцмана на процес моделювання течії в’язкої рідини. Розглядається вплив параметра релаксації на інші параметри методу, час моделювання та стійкість чисельного розв’язку на прикладі обтікання кругового циліндра в плоскому каналі. Моделювання проводиться приа помірних числах Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 10^2$. Досліджується характер течії, значення коефіцієнта лобового опору циліндра і час моделювання з різними числами Рейнольдса. Отримані результати порівнюються із відомими експериментальними даними і даними інших чисельних розв’язків.

4.5.1 Постановка задачі

Розглядається прямокутна область розміром 1×3 (рис. 4.33). Область заповнена рідиною з кінематичною в'язкістю ν. На верхній і нижній границях області задані умови непротікання рідини. Рідина надходить у плоский канал зліва зі швидкістю $U_{in} = 0{,}1$. Сток рідини відбувається справа. У каналі розташований круговий циліндр радіуса R = 0,0625. Центр кругового циліндра має координати (0,6; 0,5) з урахуванням розташування координатних осей так, як показано на рис. 4.33. З урахуванням заданих умов, коефіцієнт перешкоди течії B, рівний відношенню висоти каналу H до діаметру кругового циліндра D, буде дорівнюватися $B = \dfrac{H}{D} = \dfrac{1}{2 \cdot 0{,}0625} = 8$. Таке значення було вибрано для порівняння результатів чисельного розв'язку з аналогічними даними, опублікованими в роботах [73, 94].

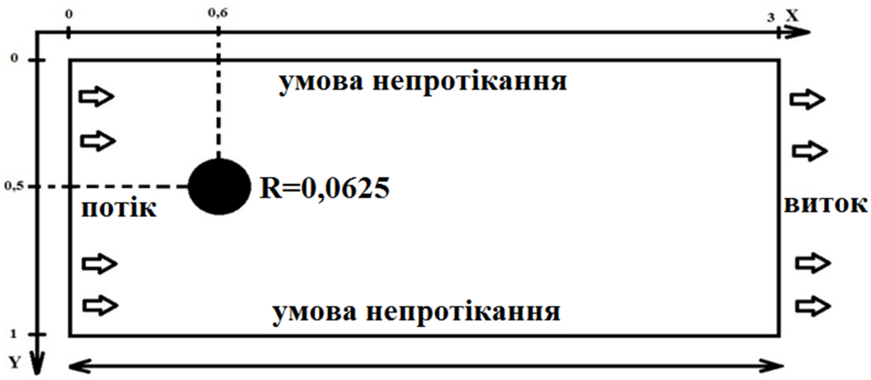


Рис. 4.33. Схема постановки задачі про обтікання кругового циліндра в плоскому каналі

4.5.2 Результати чисельного моделювання

Моделювання проводилося за допомогою оригінальної програми, написаної на мові С ++ в середовищі розробки програмного забезпечення MS Visual Community 2015 на комп'ютері з двоядерним процесором Intel Core i3, RAM 4 Гб, частотою 2 GHz із застосуванням технології паралельних обчислень на CPU – OpenMP.

Проведена серія розрахунків із різними параметрами релаксації і числами Рейнольдса. Розмірність сітки підбиралася так, щоб граткове число Маха було $M_p = 0{,}1$. Як було показано в роботах [17, 109], це значення дозволяє отримати результати з гарною точністю за оптимальний час моделювання.

У таблиці 4.8 представлені результати розрахунку для течій з числом Рейнольдса Re = 40, а саме: кількість комірок на одиницю довжини N_ℓ, яка потрібна для досягнення значення $M_p = 0{,}1$; коефіцієнт лобового опору C_d; відносна похибка моделювання ε і час моделювання T_s. Для порівняння отриманих результатів було проведено моделювання течії з аналогічними параметрами методом скінченних елементів (FEM) в пакеті Comsol Multiphysics. Також результати порівнювалися з експериментальними даними, представленими в роботі [140]. Розрахунки були проведені із параметрами релаксації: $\tau = 1{,}0; 0{,}75; 0{,}6; 0{,}55; 0{,}535$ до моменту часу $T = 100$. Характер такої течії показаний на рис. 4.34. Як бачимо, течія ламінарна і вихорів за циліндром не виникає.

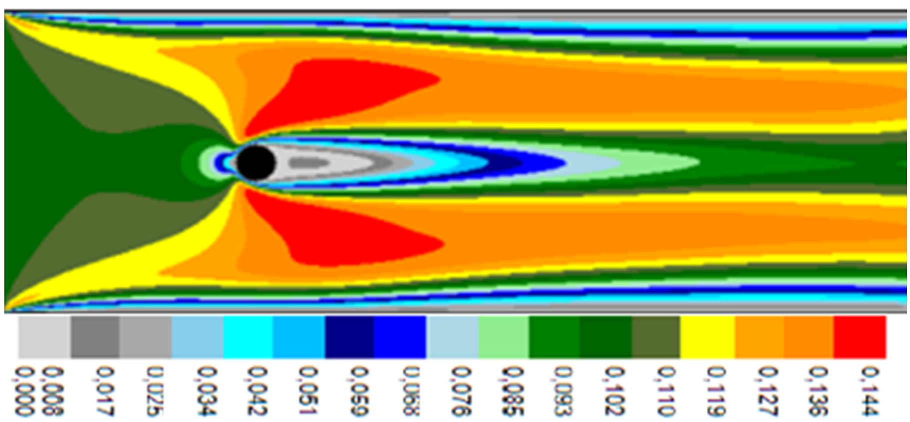


Рис. 4.34. Діаграма модуля швидкості, отримана методом LBM з числом Рейнольдса Re = 40 (швидкість потоку на вході $U_{in} = 0{,}1$)

Таблиця 4.8

Результати моделювання обтікання кругового циліндра з Re = 40 і різними параметрами релаксації методу LBM

	N_{ℓ}	C_d	ε,%	*Ts*
LBM, τ = 1,0	500	1,4678	0,8	14 ч 42 хв
LBM, τ = 0,75	300	1,3827	6,6	4 год 36 хв
LBM, τ = 0,6	110	1,2946	12,5	16 хв
LBM, τ = 0,55	70	1,3642	7,8	3 хв
FEM, Comsol	100	1,55	4,7	21 хв
Експеримент, [141]	-	1,48	-	-

Як видно з таблиці 4.8, зменшення параметра релаксації дозволяє зменшити кількість комірок на одиницю довжини розрахункової області і, тим самим, істотно зменшити час моделювання. Однак точність розрахунків при цьому падає.

Аналогічні розрахунки були проведені для чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} = 60$ і $\mathrm{Re} = 100$. Результати представлені в таблицях 4.9 і 4.10 відповідно.

Таблиця 4.9

Результати моделювання обтікання кругового циліндра з Re = 60 і різними параметрами релаксації методу LBM

	N	C_d	ε,%	*Ts*
LBM, τ = 1,0	600	1,3325	4,1	19 ч 3 хв
LBM, τ = 0,75	400	1,3116	5,6	7 ч 21 хв
LBM, τ = 0,6	200	1,3663	1,7	1 ч 21 хв
LBM, τ = 0,55	100	1,1405	17,9	12 хв
FEM, Comsol	100	1,34	3,6	22 хв
Моделювання, [29]	-	1,39	-	-

Для чисел Рейнольдса 60 і 100, на відміну від $\mathrm{Re}=40$, характерно утворення вихрової доріжки позаду циліндра (рис. 4.35), причому частота вихорів збільшується зі збільшенням числа Рейнольдса.

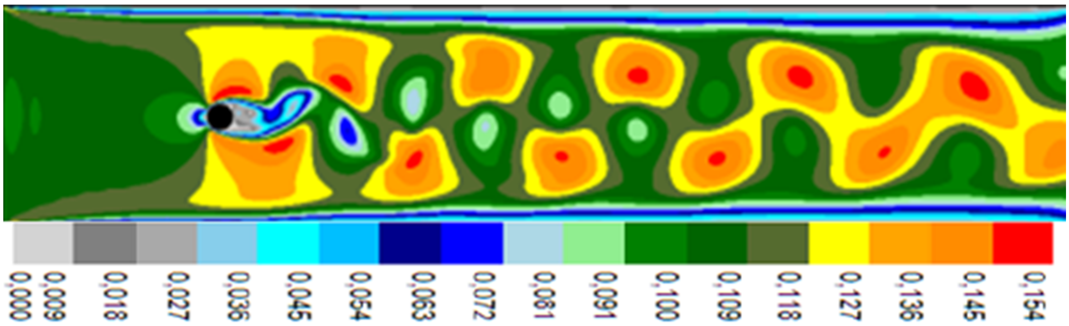


Рисунок. 4.35. Діаграма модуля швидкості, отримана методом LBM з числом Рейнольдса Re = 100 (швидкість потоку на вході $U_{in}=0{,}1$)

Як видно з таблиць 4.8 і 4.9, моделювання течій методом граткових рівнянь Больцмана з параметром $\tau=1$ вимагає значних витрат часу. Причому зі збільшенням числа Рейнольдса час моделювання істотно збільшується. Зменшити час моделювання можна за рахунок зменшення параметра релаксації. Однак очевидна перевага такого підходу нівелюється можливою нестійкістю розв'язків і можливим зростанням похибки обчислень.

Очевидно, що при значенні $\tau=1$ розрахунки для чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}>60$ провести проблематично з огляду на великий часу моделювання. Наступна серія розрахунків для течій з $\mathrm{Re}=100-400$ була проведена з параметром $\tau<1$ (табл. 4.10-4.13).

Таблиця 4.10

Результати моделювання обтікання кругового циліндра при Re = 100 і різними параметрами релаксації методу LBM

	N	C_d	ε,% [140]	Ts
LBM, τ = 0,75	500	1,1865	4,3	14 ч 42 хв

LBM, τ = 0,6	300	1,1929	3,8	9 год 39 хв
LBM, τ = 0,55	200	1,1922	3,8	2 год 15 хв
LBM, τ = 0,535	100	1,1833	4,6	23 хв
FEM, Comsol	100	1,2875	3,8	19 хв
Моделювання, [140]	-	1,24	-	-
моделювання, [141]	-	1,33	-	-

Як видно із таблиці 4.10, зменшення параметра релаксації для Re = 100 цілком виправдано і дозволяє отримати розв'язок з відносною похибкою $\varepsilon < 5\%$ за невеликий час моделювання.

Таблиця 4.11

Результати моделювання обтікання кругового циліндра з Re = 200 і різними параметрами релаксації методом LBM

	N	C_d	ε,%	T
LBM, τ = 0,55	300	1,1836	1,0	4 год 56 хв
LBM, τ = 0,535	225	1,1229	4,2	2 год 32 хв
FEM, Comsol	100	1,1825	1,0	20 хв
Моделювання, [141]	-	1,172	-	-

Із таблиць 4.10-4.11 видно, що чим ближче параметр релаксації до свого граничного значення $(\tau = 0,5)$, тим істотнішим є вплив його зміни на розрахунки. У цьому випадку навіть невелике відхилення параметра релаксації тягне за собою значні зміни в чисельному розв'язку.

Результати, отримані LBM для течій з $\mathrm{Re} = 300, 400$ показані в таблицях 4.12 і 4.13 відповідно.

Таблиця 4.12

Результати моделювання обтікання кругового циліндра при Re = 300 і різних параметрах релаксації методом LBM

	N	C_d	ε,% FEM	T
LBM, $\tau = 0{,}535$	300	1,1296	0,5	4 ч 58 хв
FEM, Comsol	100	1,135	-	22 хв

Очевидно, що моделювання течії з числами Рейнольдса $\mathrm{Re} \geq 300$ методом граткових рівнянь Больцмана доцільно проводити із застосуванням параметра релаксації $0{,}5 < \tau \leq 0{,}535$. При $\tau > 0{,}535$ чисельні розв'язки розбігаються.

Таблиця 4.13

Результати моделювання обтікання кругового циліндра при Re = 400 і різних параметрах релаксації методом LBM

	N	C_d	ε,% FEM	T
LBM, $\tau = 0{,}535$	400	1,1774	5,4	10 ч 58 хв
FEM, Comsol	100	1,1175	-	19 хв

Подальше зменшення параметра релаксації $(\tau < 0{,}535)$ призводить до нестійкості, тому провести моделювання із великими числами Рейнольдса поки що залишається проблематичним.

4.6 Дослідження меж застосування програмно-моделюючої системи

Проведено дослідження щодо меж застосування розвиненого алгоритму методу, що вбудований у представлену програмно-моделюючу систему. Порівняння можливостей розвиненого та класичного алгоритмів проведено на основі скрипта, написаного phD університета Женеви J. Latt у пакеті MatLab. Рисунок 4.36 ілюструє результати моделювання течії при Re = 300 за класичною схемою методу в момент часу $t = 2$.

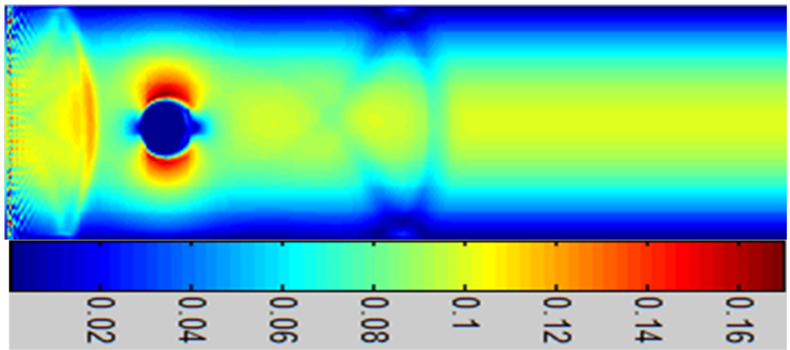


Рис. 4.36. Діаграма модуля швидкості при Re = 300 (класичний алгоритм LBM)

Цей момент часу є останнім, при якому розв'язок за допомогою класичної схеми залишається стійким. На рисунку 4.36 видно початок збурень, що виникають зліва на вході рідини в область. Далі розв'язок повністю розбігається. Розв'язок за допомогою модифікованого алгоритму дозволяє уникнути нестійкості за рахунок варіювання параметрами моделювання (рис. 4.37).

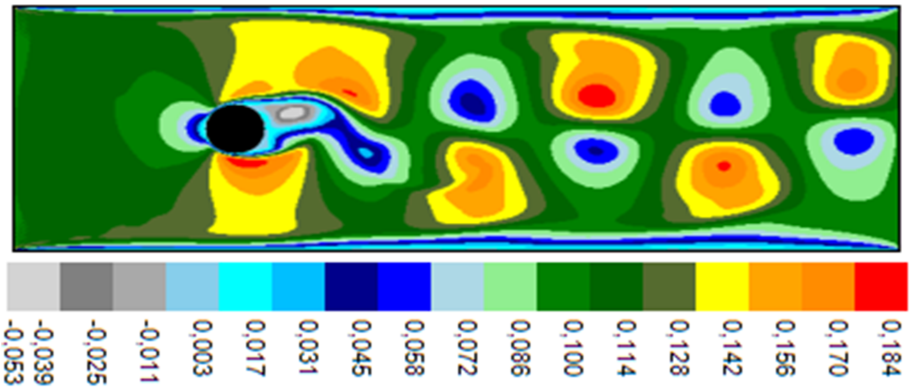


Рис. 4.37. Діаграма модуля швидкості при Re = 300 (модифікований алгоритм), $t = 50$

Таким чином, були отримані стійкі розв'язки на великих часових проміжках для течій в раніше недоступних для цього методу діапазонах чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} \le 400$. За результатами моделювання за допомогою модифікованого алгоритму LBM отримані графіки зміни з часом коефіцієнтів лобового опору C_d та підйомної сили C_l та їх середні значення $< C_d >, < C_l >$ (рис. 4.38).

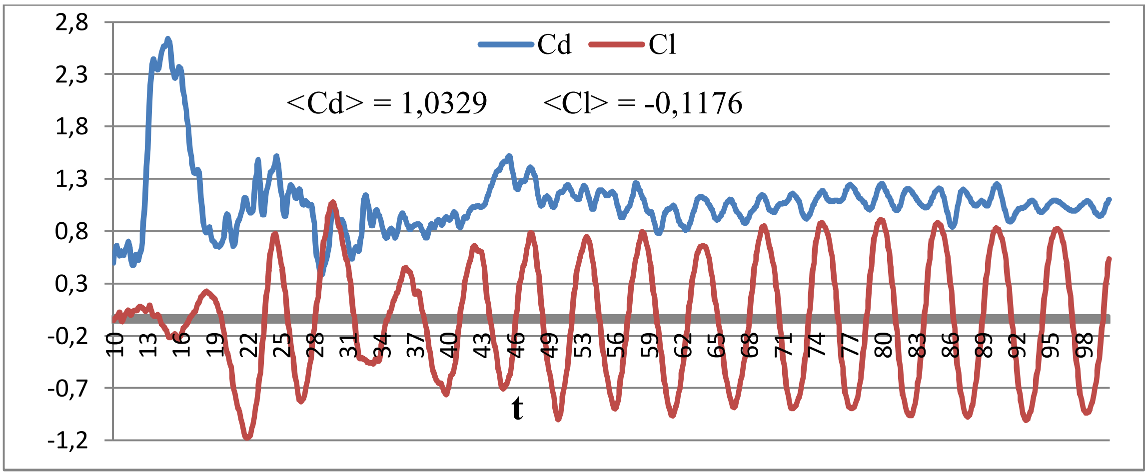


Рис. 4.38. Графіки зміни коефіцієнтів лобового опору та підйомної сили з часом та їх середні значення для кругового циліндра при Re = 300

Розрахований коефіцієнту тиску C_p, що чинить рідина на кожну i-ту комірку циліндра за формулою:

$$C_p = \frac{p_i - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \tag{4.7}$$

де p_i – тиск у i-тій комірці циліндра,

p_∞ – тиск на нескінченності,

ρ – густина,

U_∞ – швидкість течії на нескінченності.

Рисунок 4.39 ілюструє осереднений по часу графік розподілу коефіцієнта тиску C_p по верхній поверхні циліндра відносно напрямку набігаючої течії (синій графік). Оскільки круговий циліндр будується по ребрах регулярної розрахункової сітки, то відбувається коливання коефіцієнта тиску в сусідніх комірках. Розподіл осередненого коефіцієнта тиску зображено на рис. 4. 39 у вигляді чорної кривої.

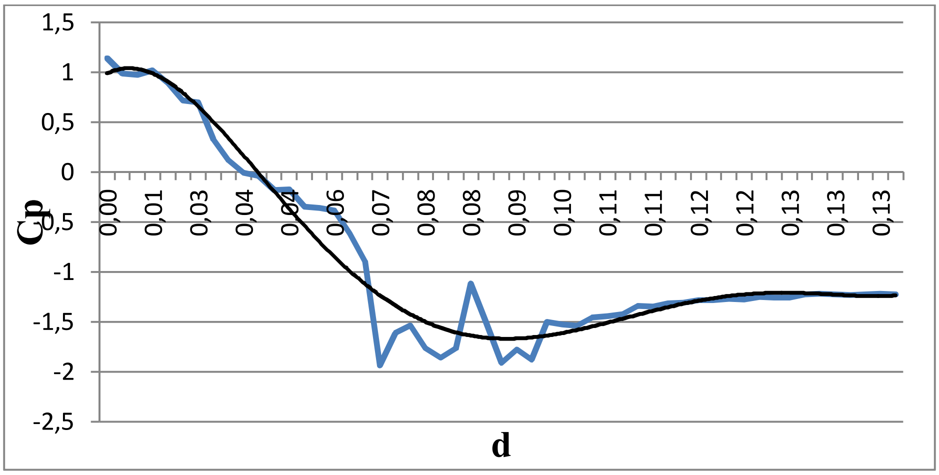
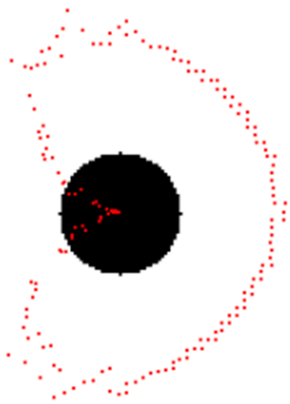
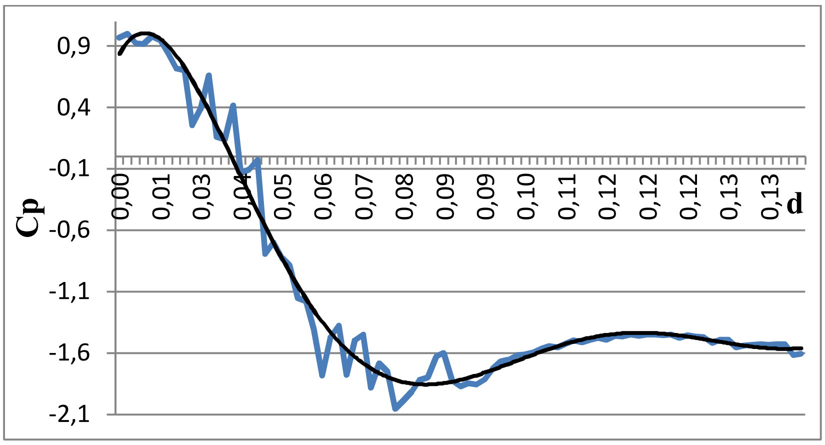


Рис. 4.39. Графіки розподілу коефіцієнта тиску по верхній поверхні кругового циліндра при Re = 300 на сітці 600×200

Моделювання проводилося на розрахункових сітках із різною кількістю комірок на одиницю довжини. Так, на рис. 4.39 зображені результати, що були отримані на сітці 600×200, а на рис. 4.40 – на сітці 900×300. Коливання коефіцієнта тиску пов’язане зі способом апроксимації кругового циліндра кусково-неперервними границями.



а)

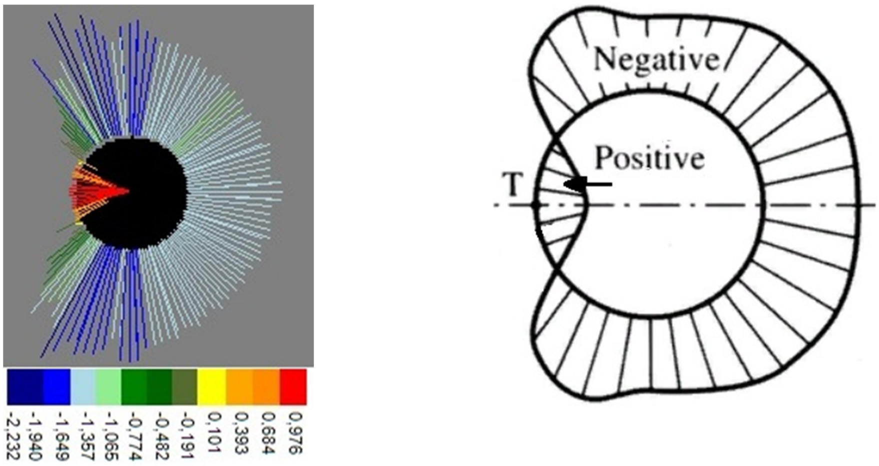


б)

Рис. 4.40. Розподіл коефіцієнта тиску для кругового циліндра при Re = 300 на сітці 900×300

а) діаграма розподілу *б*) графіки розподілу по верхній поверхні циліндру

Були отримані епюри розподілу коефіцієнта тиску (рис. 4.41).



а) *б)*

Рис. 4.41. Епюри коефіцієнта тиску

а) кольорові лінії епюри, отримані методом LBM *б*) теоретична епюра [142]

Дослідження показало збіжність розв’язку із подрібненням розрахункової сітки (рис. 4.38, 4.39) та узгодженість результатів моделювання із аналогічними результатами відомих натурних та чисельних експериментів (рис. 4.40, 4.41, 4.42) [142].

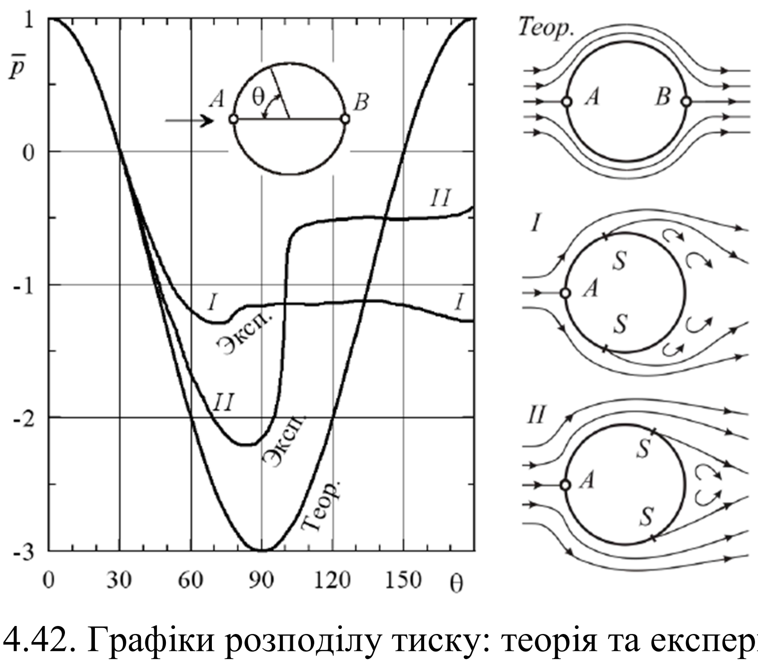


Рис. 4.42. Графіки розподілу тиску: теорія та експеримент

I – $\mathrm{Re} = 10^2$ II – $\mathrm{Re} = 10^5$ [142]

Дослідження свідчить, що починаючи з передньої критичної точки тиск в напрямку течії зменшується до критичного значення. Відриву потоку в цій області не відбувається. За циліндром тиск, відповідно до теорії потенціальної течії ідеальної рідини повинен збільшуватися. Але при обтіканні течією в'язкої рідини відбувається відрив потоку і позад циліндра створюється рециркуляційна вихрова зона [120, 137].

Результати порівняння класичного та розвиненого алгоритмів показують розширення меж застосування методу LBM на порядок: від малих чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 10$ до помірних $\mathrm{Re} \sim 10^2$. Крім того, вперше були отримані чисельні розв'язки методом граткових рівнянь Больцмана для великих чисел Рейнольдса до моменту формування турбулентного сліду (рис. 4.43).

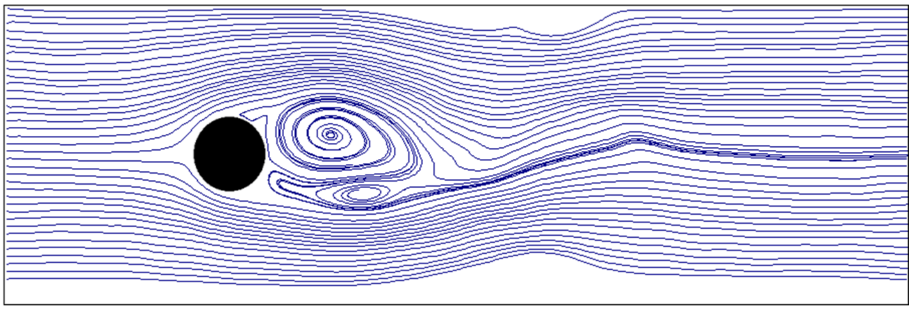


Рис. 4.43. Лінії течії при Re = 1000 (модифікований алгоритм), $t = 30$

Лінії течії, що відповідають процесу формування вихрової доріжки при числі Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1000$ в момент часу $t = 30$ представлені на рис. 4.43. Подальший розвиток вихрової доріжки відповідає переходу течії від ламінарної до турбулентної, структурованість течії з часом зникає. Чисельний розв'язок у цьому випадку розбігається. Це означає, що модифікований алгоритм методу дозволяє розв'язувати задачі обтікання із великими числами Рейнольдса, але вимагає внесення змін у чисельну схему.

4.7 Висновки за розділом 4

У цьому розділі представлені результати тестування програмно-моделюючої системи, створеної на основі розвиненого методу LBM. За дослідженнями методу, викладеними в цьому розділі, можна сформулювати наступні висновки:

1. Для випадку фіксованої граткової швидкості c = 1 і параметра релаксації $\tau = 1$, кінематична в'язкість рідини визначається розміром комірок розрахункової сітки. У цьому випадку на стійкість впливає лише граткове число Маха M_p.

2. Чисельні розв'язки, отримані методом граткових рівнянь Больцмана, з високою точністю відповідають результатам інших чисельних експериментів при $M_p < 0,3$. Результати обчислень з числом Маха $0,3 < M_p < 0,7$ показали відхилення, яке зростає зі збільшенням граткового числа Маха.

3. Зменшення параметра релаксації дозволяє зменшити кількість комірок на одиницю довжини розрахункової області і, таким чином, істотно зменшити час моделювання зі збереженням відносної похибки $\varepsilon < 10\%$. Таким чином можна нівелювати один із недоліків методу, що ускладнював чисельні експерименти із помірними числами Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 10^2$.

4. В аналогічних роботах з моделювання обтікання тіл в плоскому каналі методом граткових рівнянь Больцмана були отримані чисельні розв'язки тільки для течій із малими числами Рейнольдса $\mathrm{Re} \le 100$ [94, 73, 51, 78, 65]. У даному розділі вдалося отримати стійкі розв'язки також і для помірних чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} \le 400$.

5. Вперше були отримані чисельні розв'язки класичним алгоритмом методу граткових рівнянь Больцмана для числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1000$ до моменту формування турбулентного сліду. Проте структурованість течії з часом зникає і чисельний розв'язок розбігається. Це означає, що

модифікований алгоритм методу дозволяє розв’язувати задачі обтікання із великими числами Рейнольдса, але вимагає внесення змін у чисельну схему.

Результати четвертого розділу свідчать розширення меж застосування методу LBM на порядок: від малих чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 10$ до помірних $\mathrm{Re} \sim 10^2$.

РОЗДІЛ 5. РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

У п'ятому розділі дисертації показані результати моделювання течій із помірними $\mathrm{Re} \sim 10^2$ та великими числами Рейнольдса $\mathrm{Re} > 10^3$. Особливістю таких течій є хаотична поява флуктуацій характеристик потоку: залежність миттєвих характеристик потоку від просторових координат та часу стає складною та заплутаною. Через це, при моделюванні течій із великими числами Рейнольдса, застосовують методи осереднення та згладжування, що дозволяють вивчати регулярні середні характеристики потоку [149].

5.1 Метод регуляризації при моделюванні методом граткових рівнянь Больцмана

При виникненні у чисельних розв'язках великих градієнтів значень застосовують методи регуляризації. Такі методи є відомим та ефективним інструментом при виникненні пульсацій різного походження при моделюванні різних фізичних процесів, зокрема течії рідини [150-154]. Серед методів регуляризації чисельних розв'язків є такі:

- Згладжування за методом Л. А. Чудова [154, 155]. Метод базується на корекції значення функції в точці простору відносно сусідніх значень:

$$\tilde{u}_m = (1-2\alpha)u_m + \alpha u_{m-1} + \alpha u_{m+1} \tag{5.1}$$

де α – параметр.

Якщо $\alpha = 0,5$, то згладжування набуває вигляду:

$$\tilde{u}_m = \frac{1}{2}\left(u_{m-1} + u_{m+1}\right) \tag{5.2}$$

- Введення штучної в'язкості [154]. Для регуляризації розв'язків, що отримані за допомогою немонотонних чисельних схем із порядком апроксимації більше першого, вводиться так звана штучна в'язкість. Цей метод був запропонований фон Нейманом та Рихтмайером для чисельного розв'язку системи рівнянь газової динаміки.

- Методи корекції потоків Бориса – Бука [153, 154]. Ідея методу полягає у введенні згладжуючого оператора певного виду.

Для моделювання течії в'язкої рідини методом LBM побудована схема, яка є аналогом схеми згладжування А. Л. Чудова. Метод базується на корекції значення функції в точці простору відносно сусідніх значень. В основі такої корекції лежить медіанна фільтрація [156-157]:

$$u_x(i,j) = med(u_x(i,j-2), u_x(i,j-1), u_x(i,j), u_x(i,j+1), u_x(i,j+2)) \qquad (5.3)$$

Перевагою такого фільтра є нелінійність, що має наступні властивості:

– після згладжування зберігаються різкі границі областей розв'язку;

– пригнічуються некорельовані або слабокорельовані перешкоди;

– зменшуються аномальні викиди та згладжуються пульсації.

Після згладжування поля швидкостей функції розподілу частинок перераховуються за локальною рівноважною функцією розподілу Максвела-Больцмана.

Проведено дослідження з метою отримання стійких та фізичних розв'язків як при помірних так і при великих числах Рейнольдса із діапазону $500 < \mathrm{Re} < 20000$. У результаті встановлено:

– оптимальне значення вікна згладжування – 5 комірок;

– згладжування повинне проходити у напрямку, що перпендикулярне напрямку течії;

– оптимальна умова згладжування:

$$u_x(i,j) > u_x(i,j \pm 1) \vee u_x(i,j) < u_x(i,j \pm 1) \tag{5.4}$$

Схематично згладжування розв’язків із використання умови (5.4) зображено на рис. 5.1.

Рис. 5.1. Схема результату згладжування розв’язку

5.2 Тестування методу регуляризації на прикладі моделювання обтікання кругового циліндра течією в’язкої рідини при великих числах Рейнольдса

Результати існуючих досліджень вказують на те, що, починаючи з числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 190$, ламінарне обтікання кругового циліндра набуває нестаціонарного характеру, що супроводжується утворенням спіралеподібних вихорів [149, 158]. Характер течії стає турбулентним. На рисунку 5.2 представлена залежність коефіцієнта лобового опору C_d і характеру течії від числа Рейнольдса Re [158].

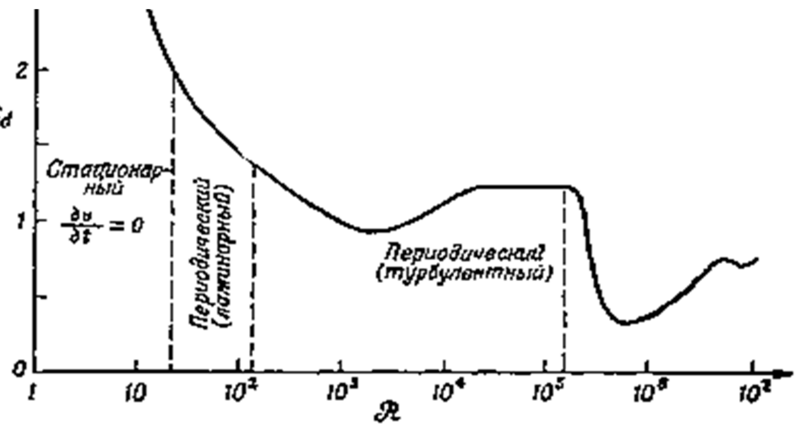


Рис. 5.2. Залежність коефіцієнта лобового опору C_d і характеру течії від числа Рейнольдса Re [158]

Для розрахунку турбулентного обтікання циліндра звичайні рівняння Нав'є – Стокса мало підходять і використовуються різні підходи, що враховують вплив турбулентності. До таких підходів відносяться, наприклад, [149, 159, 160]:

– RANS (Reynolds – averaged Navier – Stokes) модель – осереднена за числом Рейнольдса модель рівнянь Нав'є – Стокса;

– модель Бусінеска, що базується на додаванні в рівняння Нав'є – Стокса турбулентної в'язкості;

– пряме чисельне моделювання (DNS, Direct numerical simulation), в рамках якого розв'язуються нестаціонарні рівняння Нав'є – Стокса з дуже дрібним кроком по часу на дрібній просторовій сітці;

У п. 4.6 представлені вперше отримані чисельні розв'язки розвиненим алгоритмом метода граткових рівнянь Больцмана для числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1000$ у початкові моменти часу до формування турбулентного сліду ($t < 20$). Проте із часом утворюються пульсації у полі швидкості (рис. 5.3) і чисельний розв'язок розбігається.

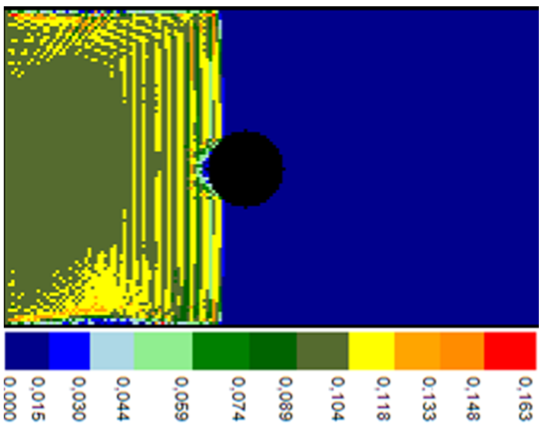
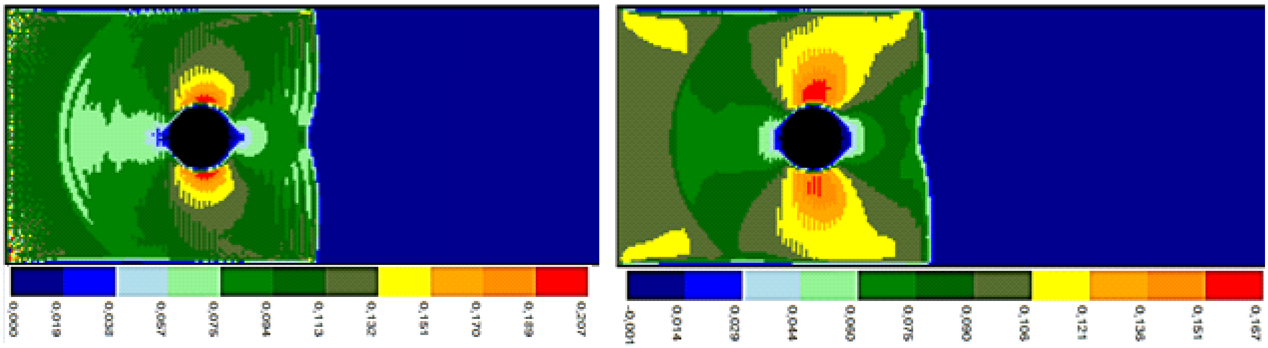


Рис. 5.3. Пульсації в полі швидкостей при Re = 1000

Для моделювання ламінарної складової течії при великих числах Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim 10^4$ у п. 5.1 запропоновано методу регуляризації чисельних розв'язків. Для тестування цього методу проведено серію чисельних експериментів. Спершу проведено моделювання течії при $\mathrm{Re} = 500$. Рис. 5.4

а ілюструє діаграму розподілу модуля швидкості, отриману за допомогою розвиненого алгоритму методу LBM у момент часу $t = 2{,}5$.

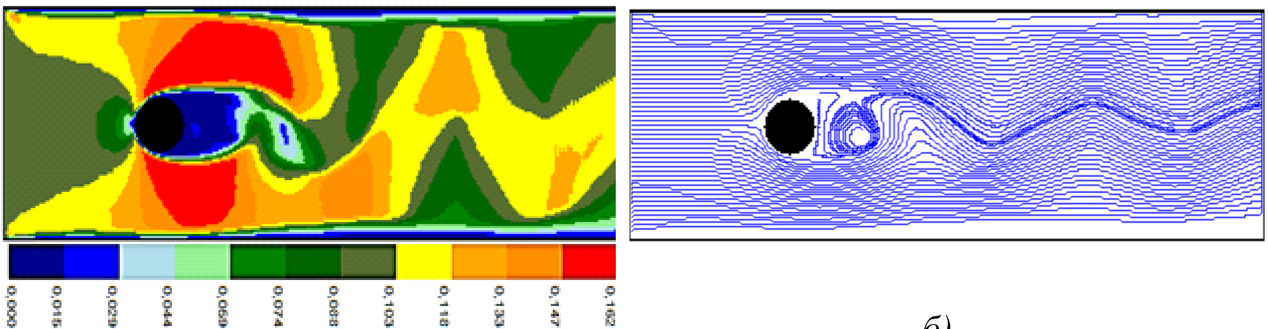


а) *б)*

Рис. 5.4. Діаграма швидкості при Re = 500 у момент часу *t* = 2,5

а) без згладжування *б*) розв'язок із згладжуванням

На рис. 5.4 *а* видно початок збурень та пульсації, що виникають здебільшого на границях областей та біля обтічного тіла. Подальший чисельний розв'язок розбігається. Рис. 5.4 *б* ілюструє діаграму розподілу модуля швидкості для течії, що змодельована алгоритмом LBM зі згладжуванням. Так, застосування методу регуляризації дозволяє згладити розриви та отримати стійкий розв'язок на великих часових проміжках. Стійкий розв'язок показаний на рис. 5.5 для моменту часу *t* = 50, а саме діаграма розподілу модуля швидкості (рис. 5.5 *а*) та лінії течії (рис. 5.5 *б*).



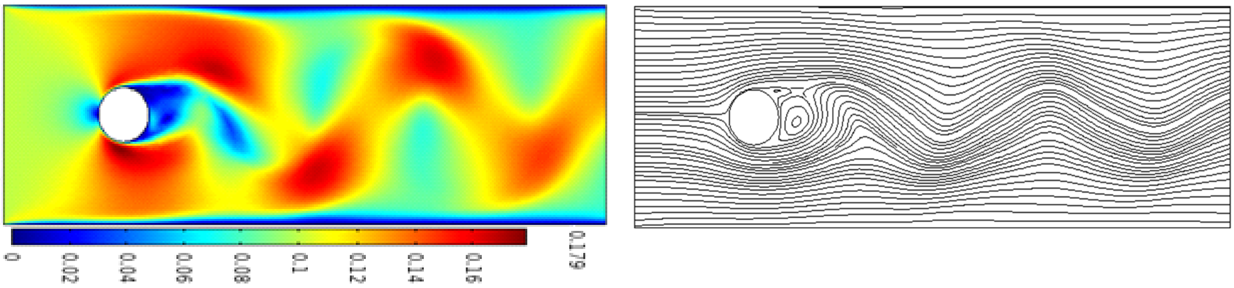
б)

а)

Рис. 5.5. Результати моделювання течії методом LBM зі згладжуванням при Re = 500 у момент часу *t* = 50

а) діаграма модуля швидкості *б*) лінії течії

Отриманий стійкий розв'язок порівнювався із розв'язком аналогічної задачі, що був отриманий у пакеті Comsol методом скінченних елементів (рис. 5.6).



а) *б)*

Рис. 5.6. Результати моделювання течії у Comsol при Re = 500 в момент часу t = 50

а) діаграма модуля швидкості *б*) лінії течії

Із рис. 5.5 та 5.6 видно подібність структури течії та сформованої вихрової доріжки Кармана. Проведено більш детальне порівняння результатів, а саме значень модуля швидкості у вертикальних перерізах області $x = 0,8;1,0$ біля обтічного тіла (рис. 5.7).

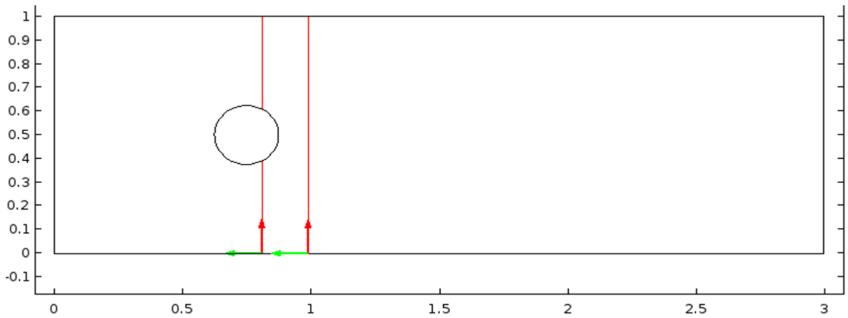
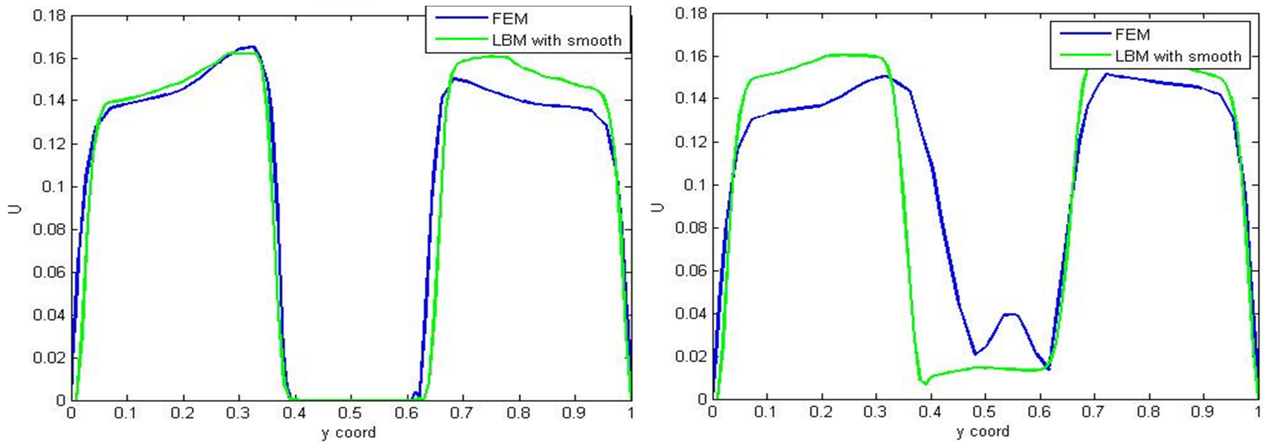


Рис. 5.7. Вертикальні перерізи області $x = 0,8;1,0$

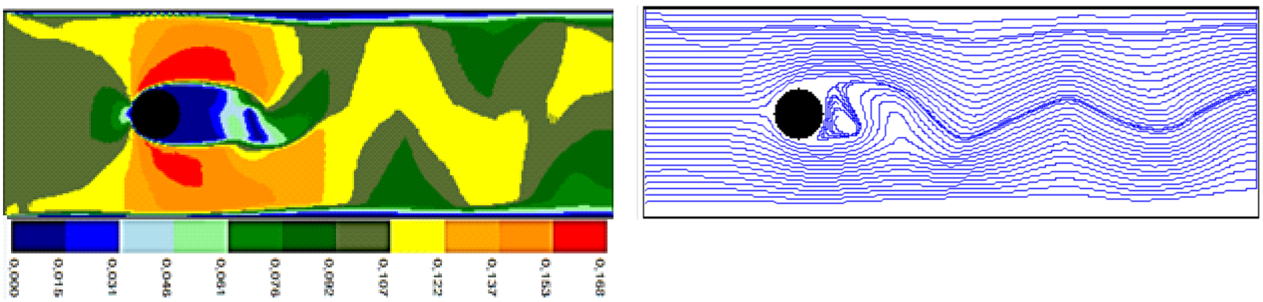
Побудовані графіки розподілу модуля швидкості, що були отримані методом LBM зі згладжуванням та методом скінченних елементів FEM (рис. 5.8). Результати порівняння показали, що розв'язки тестової задачі, отримані методом граткових рівнянь Больцмана із згладжуванням, мають добру відповідність результатам інших чисельних експериментів для числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 500$.



а) *б)*

Рис. 5.8. Розподіл модуля швидкості у перерізі а) $x = 0{,}8$ б) $x = 1{,}0$

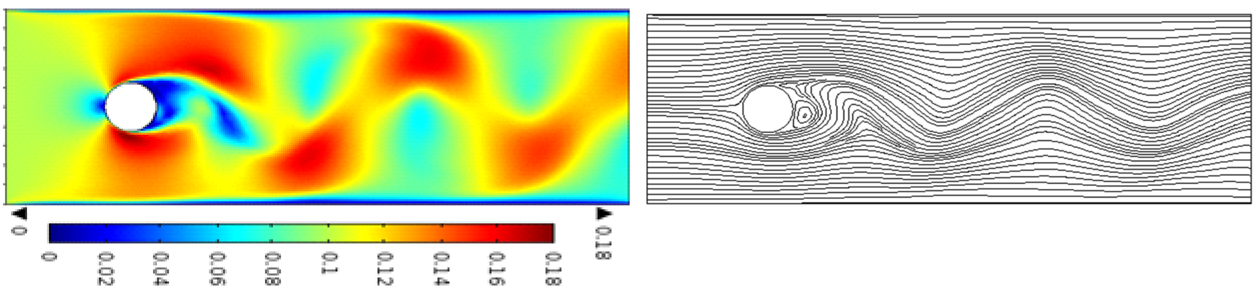
У подальшому число Рейнольдса було збільшено вдвічі та проведено аналогічні експерименти методом LBM (рис. 5.9) та FEM (рис. 5.10).



а) *б)*

Рис. 5.9. Результати моделювання течії методом LBM із згладжуванням при Re = 1000 в момент часу t = 50

а) діаграма модуля швидкості *б*) лінії течії



а) *б)*

Рис. 5.10. Результати моделювання течії у Comsol при Re = 1000 у момент часу t = 50

а) діаграма модуля швидкості *б*) лінії течії

Порівняння чисельних розв’язків свідчить про узгодженість результатів моделювання: чітко видно процес відриву пограничного шару та утворення вихорів за циліндром, структура ліній течії зберігається.

Подальші експерименти були проведені для числа Рейнольдса Re = 10000. Структурованість течії при таких числах Рейнольдса зникає і починає формуватися турбулентний слід [149]. Фотографія такої течії показана на рис. 5.11.

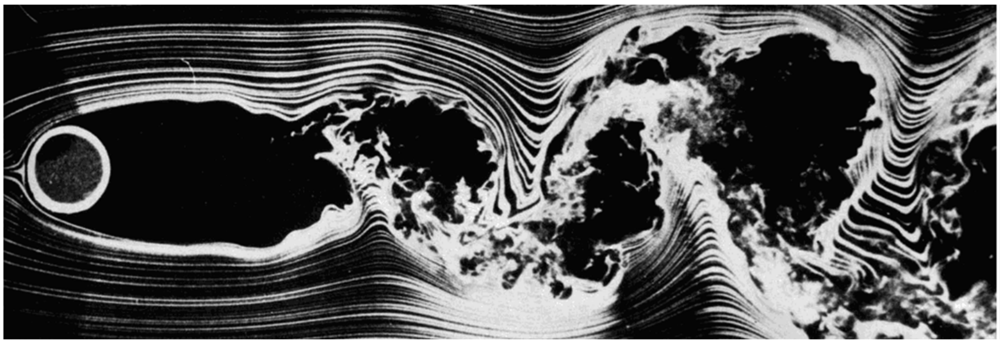
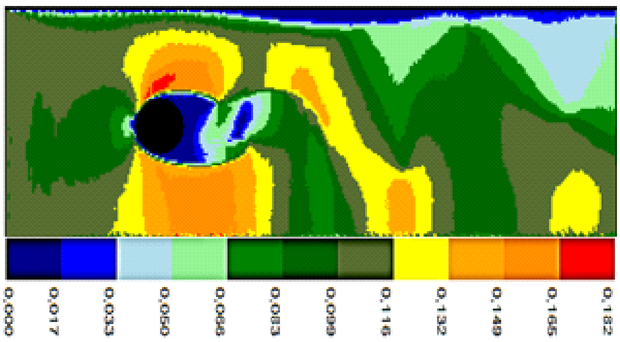
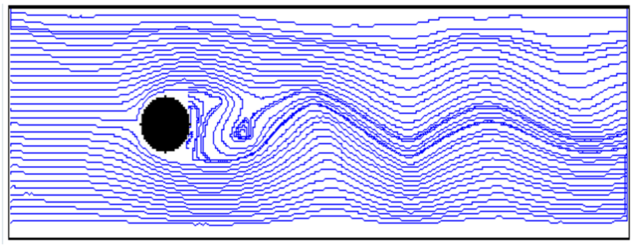


Рис. 5.11. Фотографія течії при Re = 10 000 [136]

Рис. 5.12 ілюструє результати моделювання цієї течії методом LBM зі згладжуванням.



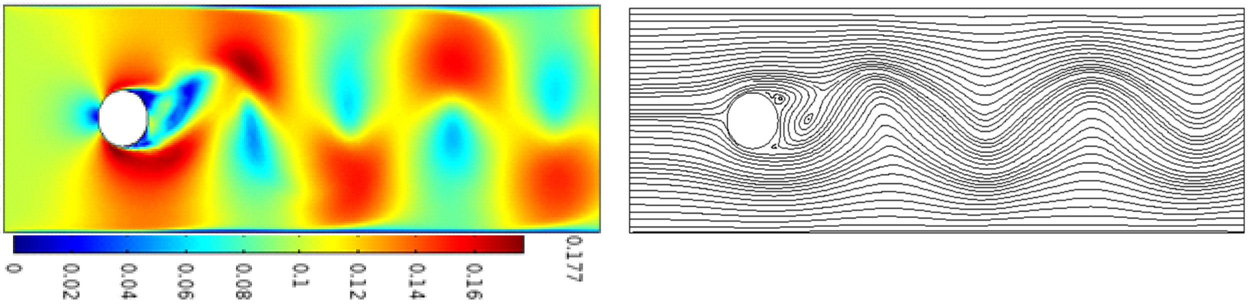


а) *б)*

Рис. 5.12. Результати моделювання течії методом LBM зі згладжуванням при Re = 10000 в момент часу t = 100

а) діаграма модуля швидкості *б*) лінії течії

Аналогічний чисельний експеримент проведений методом скінченних елементів (FEM). Результати моделювання ілюстровані на рис. 5.13.



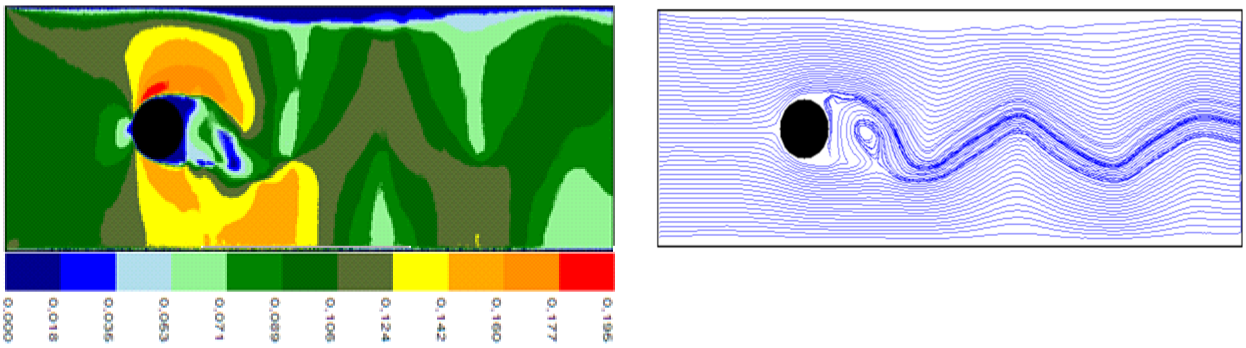
а) *б)*

Рис. 5.13. Результати моделювання течії у Comsol при Re = 10000 в момент часу $t = 96$

а) діаграма модуля швидкості *б*) лінії течії

Зі збільшенням числа Рейнольдса періодичність утворення вихорів збільшується: вихори сходять із країв циліндра за період часу близько $t = 2$. Таке швидке утворення вихорів зумовило розбіжність чисельних розв'язків методами FEM та LBM: структура течії за методом LBM в момент часу $t = 100$ співпадає зі структурою течії, що була отримана методом FEM в момент часу $t = 96$ (рис. 5.12 та 5.13).

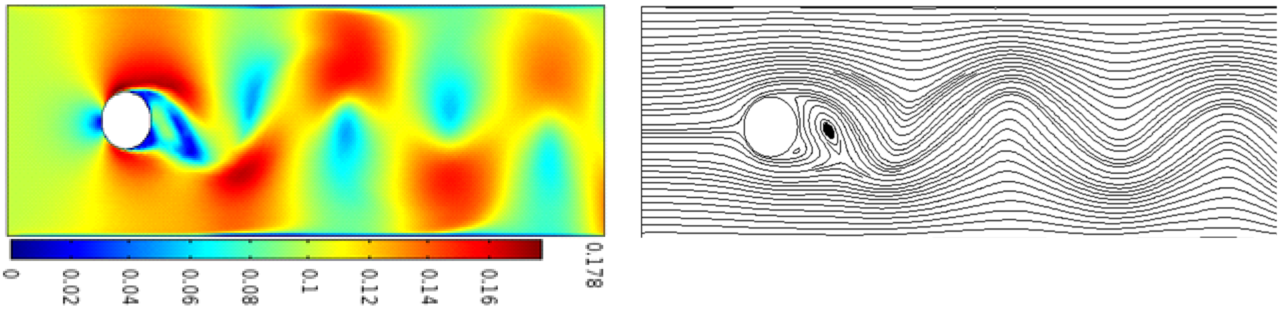
Для течій із числом Рейнольдса $Re = 20000$ результати чисельних експериментів зображені на рис. 5.14 (метод LBM) та рис. 5.15 (метод FEM).



а) *б)*

Рис. 5.14. Результати моделювання течії методом LBM зі згладженням при Re = 20000 у момент часу $t = 50$

а) діаграма модуля швидкості *б*) лінії течії



а) *б)*

Рис. 5.15. Результати моделювання течії у Comsol при Re = 20000 у момент часу t = 50

а) діаграма модуля швидкості *б*) лінії течії

Отримані графіки зміни коефіцієнтів лобового опору C_d та підйомної сили з часом C_l, за якими розраховані їх середні значення $< C_d >, < C_l >$. Ці результати зображені на рис. 5.16.

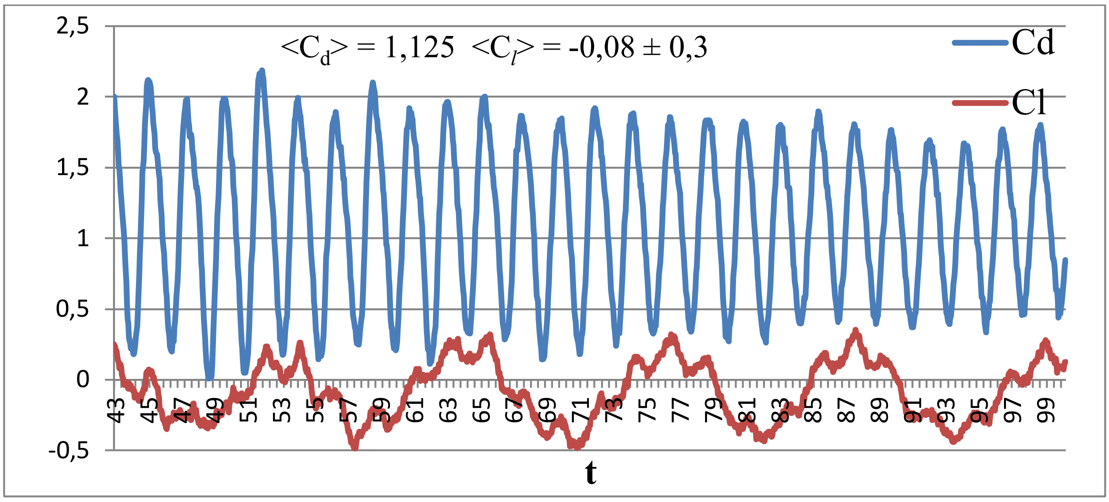
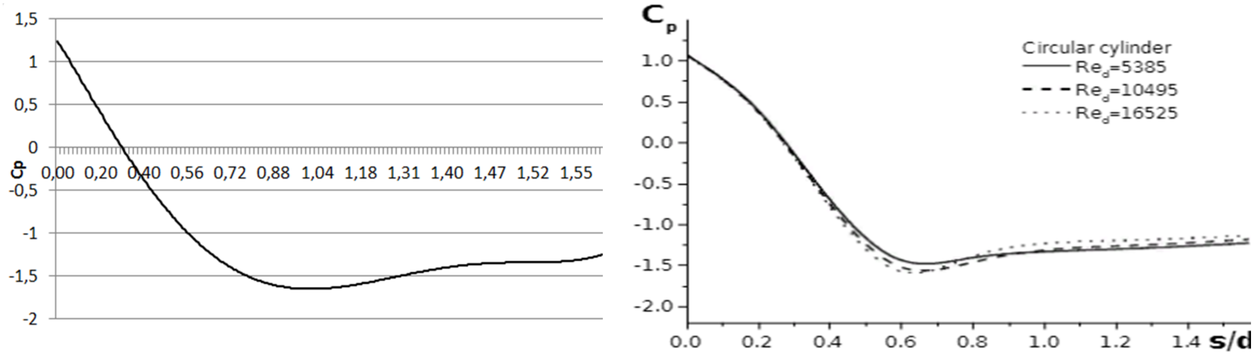


Рис. 5.16. Графіки зміни коефіцієнтів лобового опору та підйомної сили з часом та їх середні значення при моделюванні обтіканні кругового циліндра течією при Re = 20000 методом граткових рівнянь Больцмана зі згладжуванням

Був обчислений коефіцієнт тиску C_p по поверхні циліндра за формулою (4.7). На рис. 5.17 *а* представлений графік розподілу тиску по верхній поверхні циліндра відносно напрямку набігаючої течії. На рис. 5.17 *б* зображений графік розподілу тиску по верхній поверхні циліндра, що був отриманий авторами роботи [161].



а) *б)*

Рис. 5.17. Розподіл тиску по поверхні кругового циліндра при Re = 20000 *а*) графік розподілу тиску по верхній границі циліндру *б*) графік розподілу тиску по верхній границі циліндра згідно досліджень [161]

Отримані гідродинамічні коефіцієнти та коефіцієнт тиску співпадають із результатами натурних експериментів, викладених в роботах [142, 158, 161]. Було проведено порівняння результатів чисельних експериментів задачі про обтікання кругового циліндра течією в'язкої рідини, що були проведені методом граткових рівнянь Больцмана із запропонованим методом згладжування із результатами відомих натурних та чисельних експериментів. Зокрема порівняння з розрахунками методом скінченних елементів у пакеті Comsol із застосуванням фізики ламінарних течій (*laminar flow spf*) свідчить про те, що метод згладжування дозволяє отримати фізичні результати періодичної структури течії за допомогою методу граткових рівнянь Больцмана із великими числами Рейнольдса (до 20 000), що раніше було неможливо.

5.3 Моделювання обтікання профілю Nasa 0012 при різних кутах атаки

На сьогодні одним із перспективних напрямків досліджень у світі є створення мініатюрних літальних апаратів (МЛА або MAVs від англ. Micro Air Vehicles). Вони використовуються для виконання різних задач, як на відкритій місцевості, так і в містах. Серед типів МЛА виділяють дрони із гвинтовим двигуном (рис. 5.18) (фотографія взята з сайту wikipedia.org).

Рис. 5.18. Безпілотні літальні апарати 2005 р. На фото (спереду назад, зліва направо) RQ-11A Ворон, Эволюция, Dragon Eye, НАСА FLIC, Арктур T-15, Жаворонок, Крачка, RQ-2B Pioneer и Нептун.

Характерні параметри мініатюрних безпілотників представлені у таблиці 5.1 [162].

Таблиця 5.1

Характерні розміри МЛА

Габаритний розмір	10-20 см
Маса	50-200 г
Маса корисного навантаження	20-30 г
Радіус дії	До 10 км

Політ МЛА відбувається при числах Рейнольдса у діапазоні $10^3 \le \mathrm{Re} \le 10^5$. Характер течій у цьому діапазоні принципово відрізняється від більш вивченого діапазону $\mathrm{Re} > 10^6$, при яких аеродинамічні характеристики слабо залежать від числа Рейнольдса. Тому проектування мініатюрних літальних апаратів вимагає детального вивчення таких течій.

Було проведено комп'ютерне моделювання обтікання профілю Nasa 0012 при різних кутах атаки потоком в'язкої рідини із числом Рейнольдса $\mathrm{Re} = 10^4$. На рисунку 5.19 зображена схема обтікання профілю: напрямок течії, кут атаки α, сила лобового опору $\vec{F}_{drag}$ та підйомна силу $\vec{F}_{lift}$.

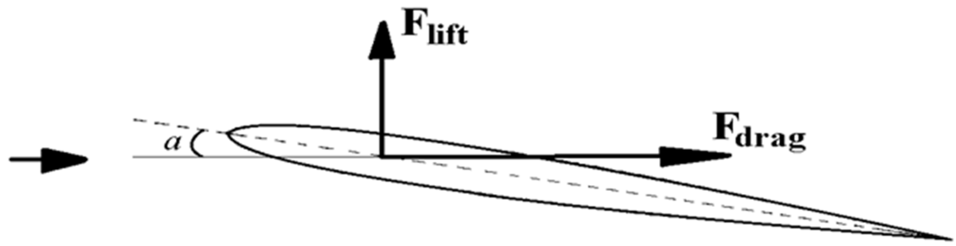
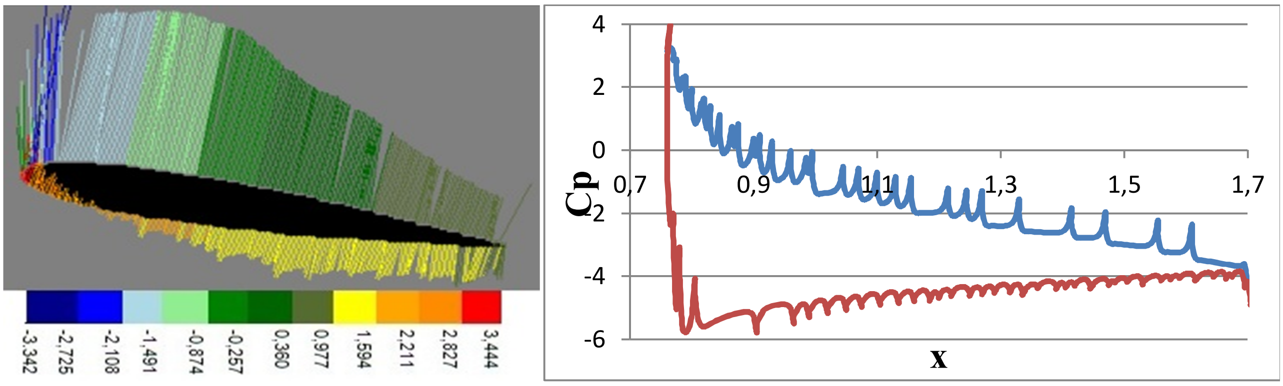


Рис. 5.19. Схема обтікання профілю Nasa 0012

Досліджувався вплив кута атаки на динаміку течії, на значення коефіцієнтів лобового опору, підйомної сили крила та тиску. Кольорові лінії епюри та графіки розподілу коефіцієнту тиску по верхній та нижній поверхням профілю під кутом атаки $\alpha = 10^0$ представлені на рис. 5.20. Пульсації коефіцієнту тиску на графіках при моделюванні методом граткових рівнянь Больцмана обумовлені кусково-неперервною апроксимацією профілю крила, що будується по границям комірок регулярної розрахункової сітки.



а) *б)*

Рис. 5.20. Коефіцієнт тиску профілю Nasa 0012 під кутом атаки $\alpha = 10^0$ *а*) кольорові лінії епюри *б*) графіки розподілу коефіцієнту тиску по верхній (червоний) та нижній (синій) поверхням профілю

На рис. 5.21 зображено зміну характеру течії при зростанні кута атаки $\alpha = 10^0, 20^0, 30^0$.

а)

б)

в)

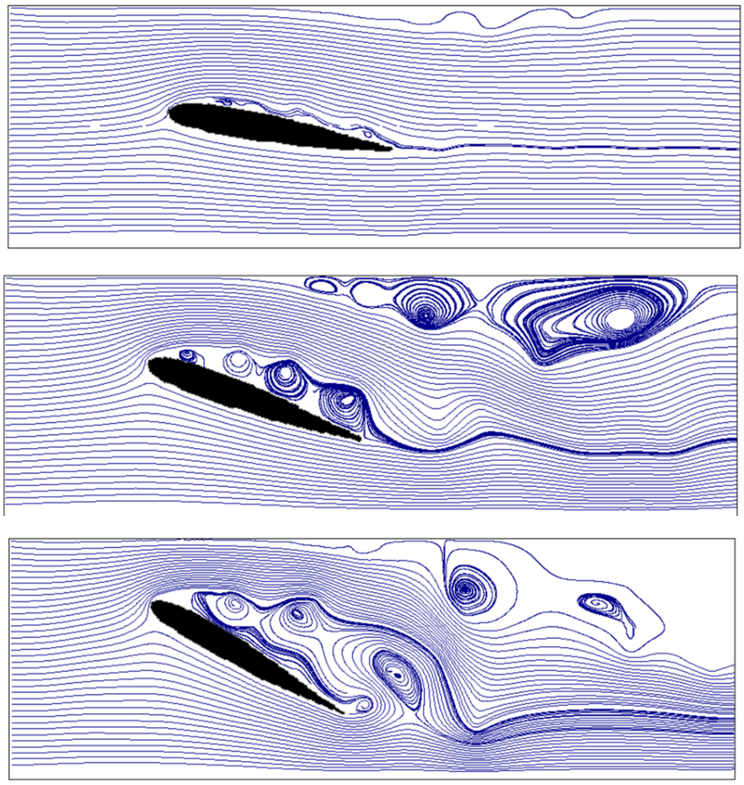


Рис. 5.21. Лінії течії при обтіканні профілю Nasa 0012 при різних кутах атаки в момент часу $t = 100$ при $\mathrm{Re} = 10^4$

а) $\alpha = 10^0$ *б*) $\alpha = 20^0$ *в*) $\alpha = 30^0$

За результатами проведених досліджень, утворення вихорів позад профілю починається при значенні кута атаки $\alpha = 6^0$. При кутах атаки $\alpha > 15^0$ відбувається утворення вихорів уздовж усієї верхньої поверхні профілю. Зміна значень коефіцієнтів лобового опору C_d та підйомної сили C_l крила з часом та графіки розподілу коефіцієнта тиску C_p при різних кутах атаки профілю представлені на рис. 5.22.

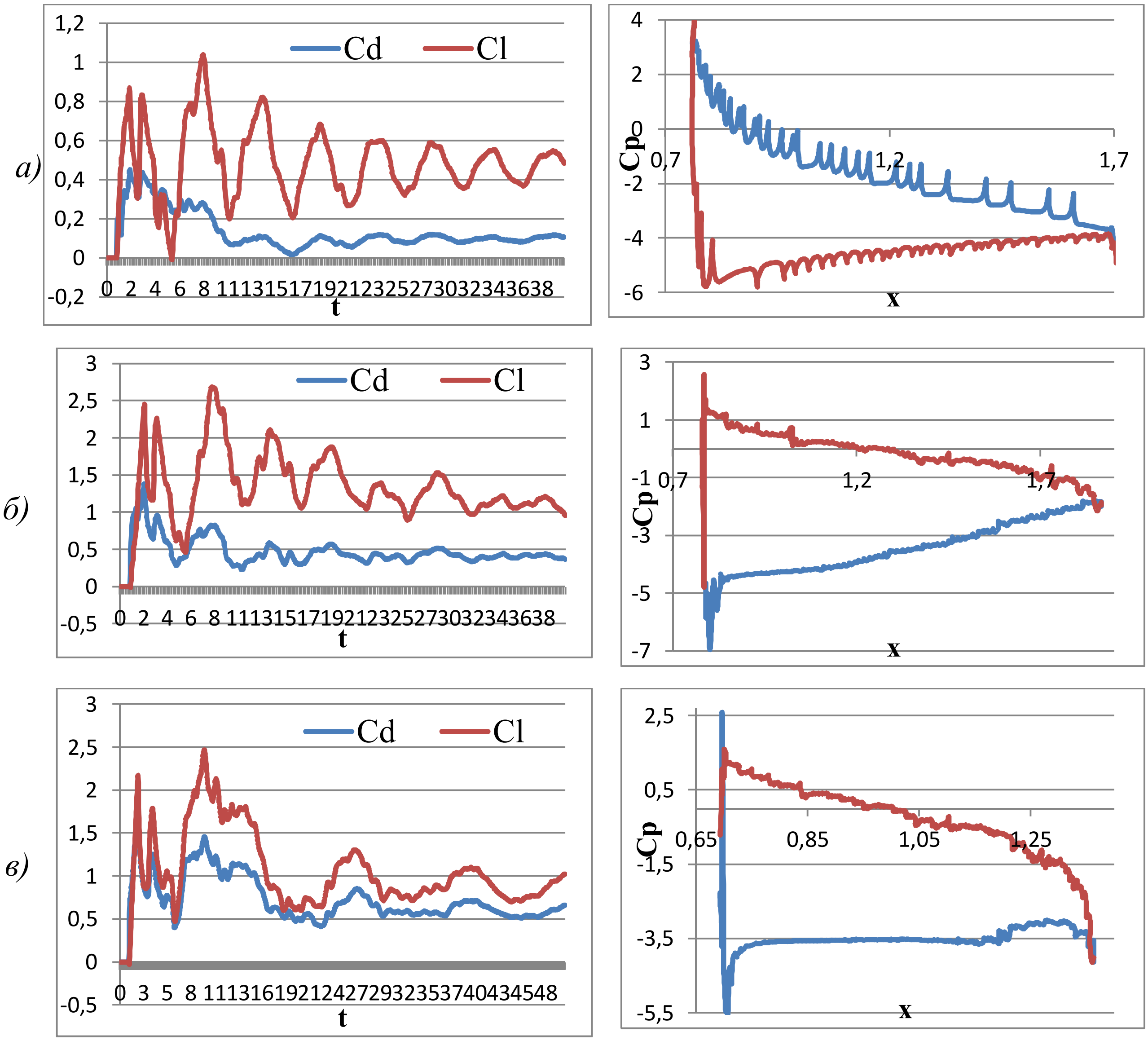
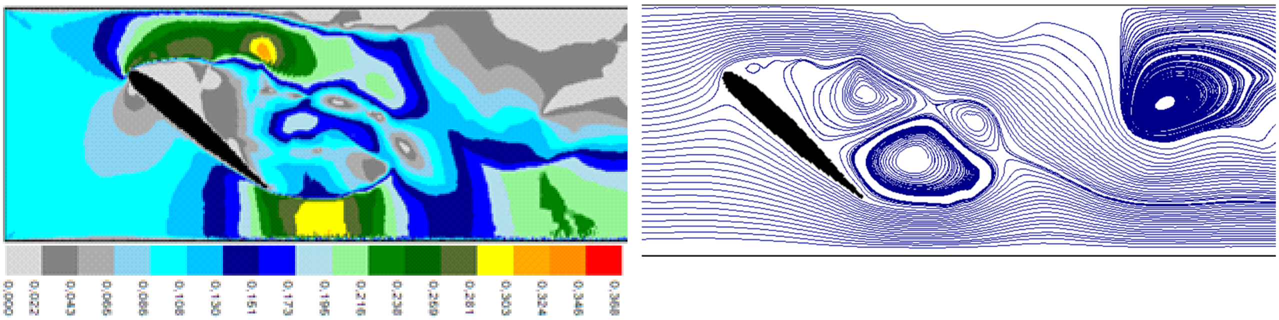


Рис. 5.22. Графіки зміни коефіцієнтів лобового опору та підйомної сили крила з часом та графіки розподілу коефіцієнта тиску при різних кутах атаки профілю Nasa 0012

а) $\alpha = 10^0$ *б)* $\alpha = 20^0$ *в)* $\alpha = 30^0$

Подальше збільшення кута атаки призводить до утворення великих відривних зон із великомасштабними вихорами всередині (рис. 5.23).

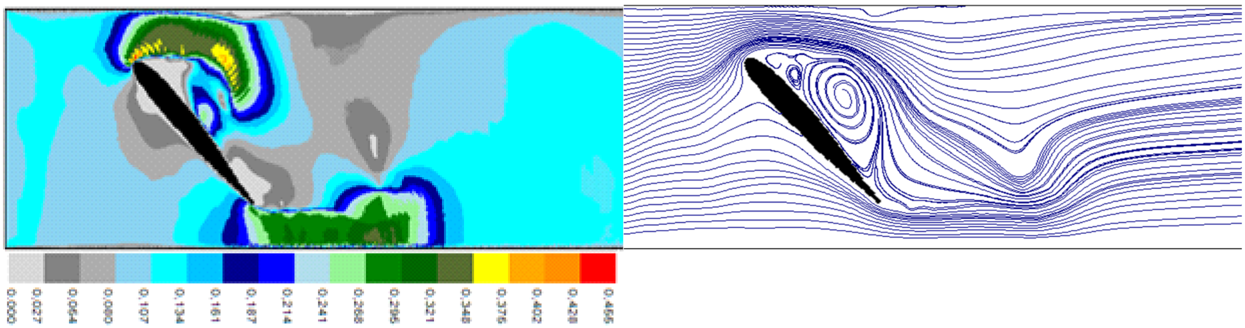


а) *б)*

Рис. 5.23. Обтікання профілю Nasa 0012 при $\mathrm{Re}=10^4$ та $\alpha=40^0$ у момент часу $t=100$

а) діаграма модуля швидкості *б*) лінії течії

Стійкі розв'язки вдалося отримати лише для кута атаки $\alpha<50^0$. Результати моделювання обтікання профілю під кутом атаки $\alpha=50^0$ в момент часу $t=15$ зображені на рис. 5.24. Видно утворення вихору позад профілю та появу пульсацій у полі швидкостей. У момент відриву вихору за профілем чисельний розв'язок розбігається.



а) *б)*

Рис. 5.24. Обтікання профілю Nasa 0012 при $\mathrm{Re}=10^4$ та $\alpha=50^0$ у момент часу $t=15$

а) діаграма модуля швидкості *б*) лінії течії

Отримані результати чисельного експерименту з обтікання профілю Nasa 0012 течією в'язкої рідини при числі Рейнольдса $\mathrm{Re}=10^4$ свідчать про зростання гідродинамічних коефіцієнтів та утворення вихорів за профілем при збільшенні кута атаки, починаючи із $\alpha = 6^0$. При кутах атаки $\alpha > 15^0$ відбувається зрив потоку і утворення вихрової зони над усією верхньою поверхнею профілю. Подальше збільшення значень кута атаки призводить до утворення великих відривних зон із великомасштабними вихорами. Чисельні розв'язки поставленої задачі при кутах атаки більше $\alpha > 50^0$ є нестійкими і потребують подальшого вивчення та модифікації чисельних схем. Отримані результати можна використати при проектуванні мініатюрних літальних апаратів.

5.4 Моделювання течій у каналах довільних геометричних форм

Значна частина наукових робіт в області обчислювальної гідродинаміки присвячена моделюванню течій у областях простих геометричних форм. Такі задачі мають певне прикладне значення і зазвичай використовуються для тестування побудованих математичних та чисельних моделей. Проте реальні області течій можуть мати більш складну форму: мати перешкоди на стінках, послідовність перешкод, викривлену або рельєфну форму границі, криволінійну границю. Задача з моделювання таких течій викликає особливий інтерес. Для моделювання течій у таких каналах у більшості випадків використовують криволінійні структуровані або неструктуровані розрахункові сітки. І побудова таких сіток, адаптованих до границь області течії, є окремою задачею.

Моделювання течії у криволінійному каналі включає в себе такі кроки: побудова геометрії каналу, побудова відповідної розрахункової сітки із урахуванням особливостей геометрії області, адаптування обчислювального методу до побудованої границі та чисельний розрахунок. Перевагою методу граткових рівнянь Больцмана є незалежність процесу моделювання від геометрії обчислювальної області. Завдяки цьому геометрія обчислювальної області може бути побудована у будь якому графічному редакторі та імпортована до створеної програмно-моделюючої системи для подальшого моделювання. Складні границі області апроксимуються кусочно-неперервними лініями – ребрами комірок регулярної розрахункової сітки. Відсутність потреби в адаптуванні методу до різних геометрій області робить комп'ютерну програму зручною для дослідника чи навіть студента.

Для дослідження можливостей методу було проведено комп'ютерне моделювання течії в'язкої рідини у каналах довільних форм. Було розглянуто течію у каналі зі складним криволінійним звуженням при $\mathrm{Re}=1000$. На рис. 5.25 представлені лінії течії у такому каналі в момент часу $t=100$.

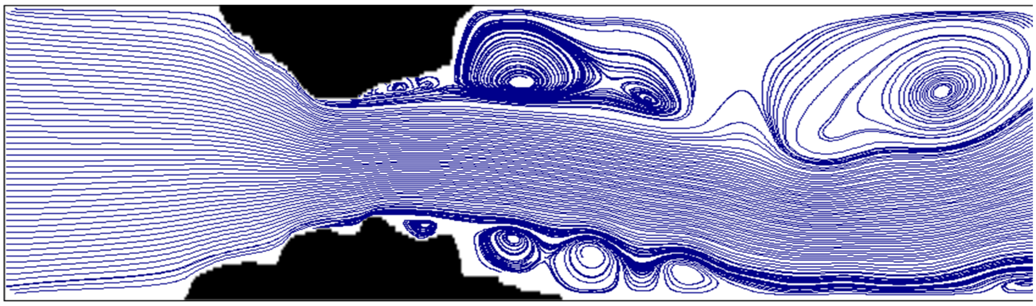


Рис. 5.25. Лінії течії рідини у каналі з криволінійним звуженням при Re = 1000

За результатами моделювання такої течії можна бачити послідовність вихорів, що утворюються вниз за течією після зони звуження потоку. Утворюються як малі вихори, так і вихори більшого масштабу.

Було розглянуто також канал із різкою зміною напрямку течії. Можна бачити, що при різкій зміні напрямку течії утворюються замкнуті циркуляційні зони (рис. 5.26).

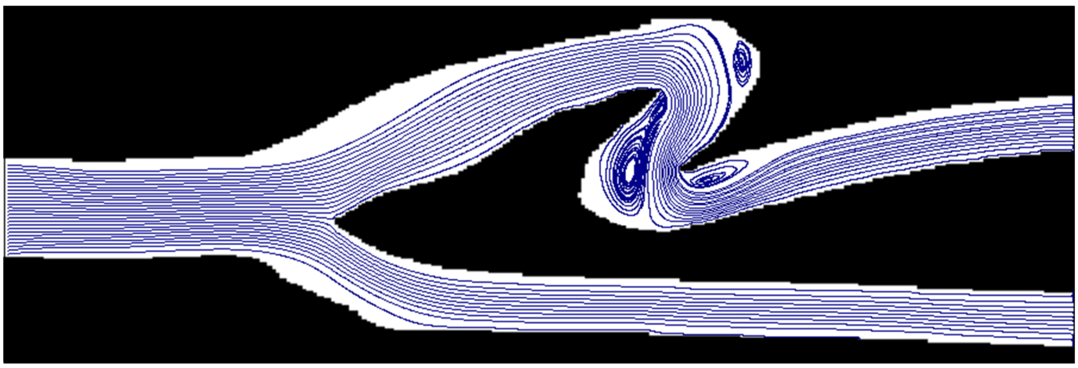


Рис. 5.26. Лінії течії рідини у каналі із різкою зміною напрямку течії при Re = 1000

Такі зони призводять до локального збільшення тиску та швидкості течії (рис. 5.27).

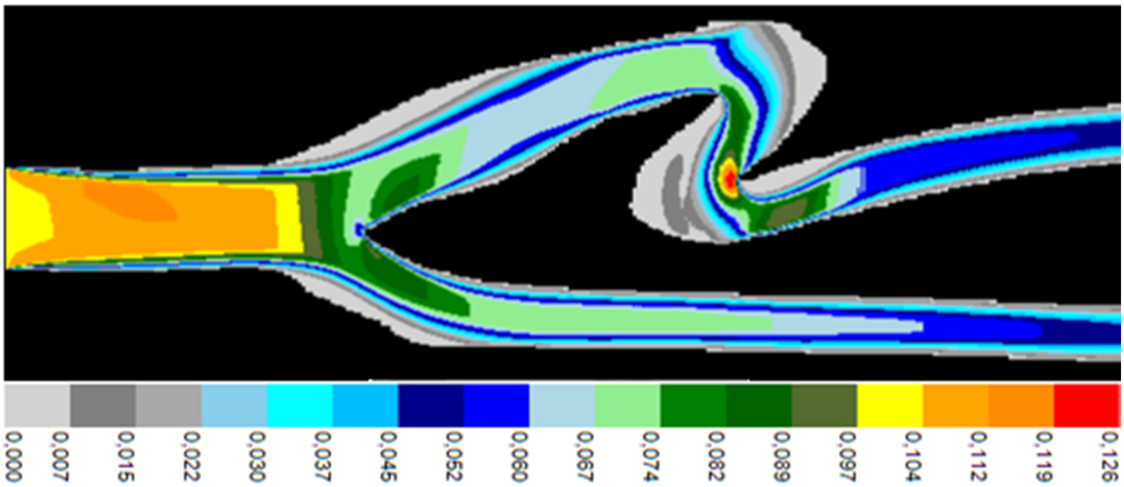


Рис. 5.27. Діаграма розподілу модуля швидкості у каналі із різкою зміною напрямку при Re = 1000

Серед типів криволінійних каналів виділяють зигзагоподібні канали, що мають широке практичне значення у мікроелектроніці. Характер течії у таких каналах залежить від числа Рейнольдса. При числах Рейнольдса $\mathrm{Re} < 30$ в криволінійному каналі відбувається плавне обтікання кутів. Збільшення числа Рейнольдса призводить до формування циркуляційних зон (рис. 5.28).

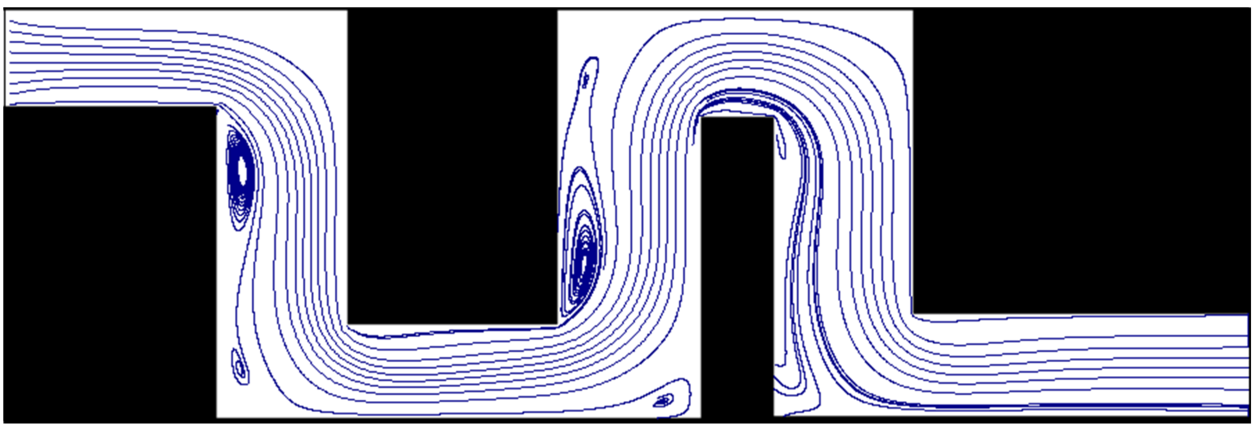


Рис. 5.28. Лінії течії у зигзагоподібному каналі при Re = 50

Із ростом числа Рейнольдса характер течії змінюється (рис. 5.29). В областях внутрішніх кутів та біля стінок за зовнішніми кутами з’являються більш виражені та різні за площею циркуляційні зони.

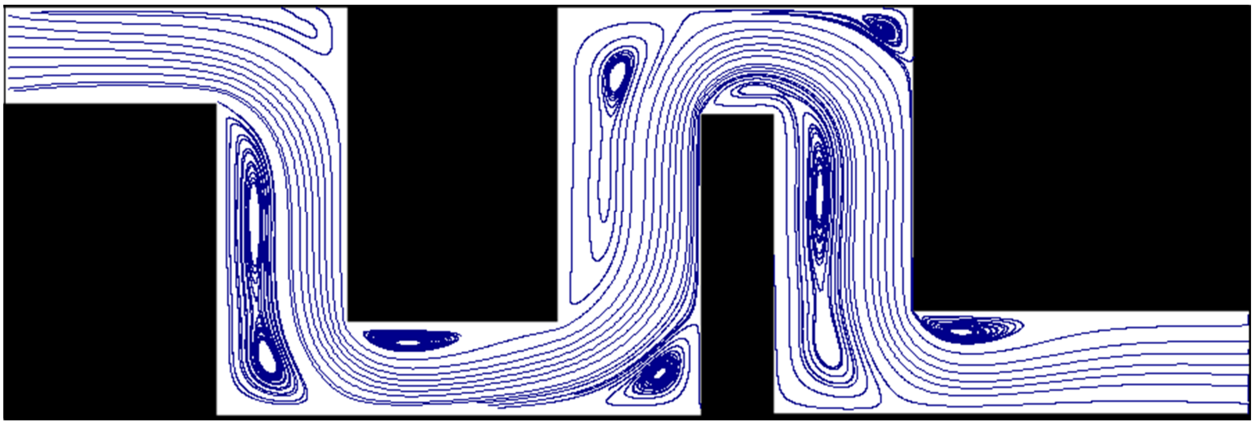


Рис. 5.29. Лінії течії у зигзагоподібному каналі при Re = 100

Зростання числа Рейнольдса істотно не змінює циркуляційні зони у внутрішніх кутах. У зоні після зовнішніх кутів відбувається зрив потоку і утворення декількох вихорів, що зносяться течією (рис. 5.30).

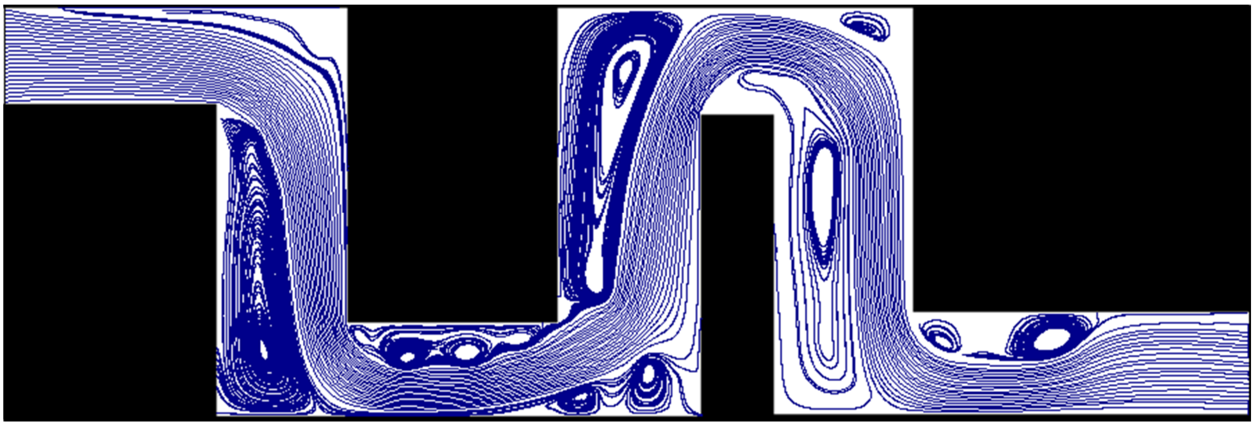


Рис. 5.30. Лінії течії у зигзагоподібному каналі із різкою зміною напрямку течії при Re = 1000

Результати моделювання течій у каналах довільних геометричних форм показали широкі можливості методу граткових рівнянь Больцмана, а саме можливість моделювання областей із різною геометрією. Створена програмна-моделююча система передбачає завантаження довільних зображень областей течії, що є зручним для дослідника. Важливо, що при цьому можна врахувати в'язкі ефекти без розв'язку рівнянь Нав'є-Стокса.

ВИСНОВКИ

У дисертації розвинено метод граткових рівнянь Больцмана для отримання стійких розв’язків за менший проміжок часу при моделюванні течій в’язкої рідини з помірними та великими числами Рейнольдса. Створено програмно-моделюючу систему для комп’ютерного моделювання течій в’язкої рідини в областях довільних конфігурацій.

Основні результати роботи можна описати наступними пунктами:

1. Вдосконалено алгоритм методу граткових рівнянь Больцмана за рахунок варіювання гратковою швидкістю частинок. Розвинутий алгоритм на відміну від існуючих чисельних схем дозволяє більш ефективно моделювати задачі гідродинаміки, змінюючи одночасно в’язкість рідини, розмірність розрахункової сітки і параметр релаксації. Таким чином, з’являється можливість контролювати точність, стійкість розв’язків і швидкість обчислень.

2. Оптимізовано чисельний алгоритм методу за рахунок використання нової структури даних на етапі переміщення частинок у гратковому просторі. Розрахункову область пропонується розглядати як сферу даних – абстрактний тип даних, у якому немає граничних комірок. Успішна оптимізація етапу переміщення частинок і розпаралелювання етапу зіткнення частинок на CPU з використанням технології OpenMP дала можливість збільшити швидкість розрахунків приблизно в 3-4 рази. Крім того, показано, що при використанні сфери даних, як структури, що зберігає значення функції розподілу частинок, циклічні граничні умови задаються автоматично без введення додаткових чисельних схем.

3. Вдосконалено чисельну модель, що описує взаємодію рідини із твердими тілами. Класична схема відображення частинок доповнена умовою миттєвого дзеркального відображення функції розподілу частинок у граничних комірках. Доповнена схема дозволяє більш отримати більш гладкі

розв’язки (без коливання швидкостей біля обтічного тіла) і краще моделювати процес обтікання тіл.

4. Розроблено метод регуляризації чисельного розв’язку при моделюванні течій із помірними та великими числами Рейнольдса методом граткових рівнянь Больцмана. Метод базується на корекції значення функції в точці простору стосовно сусідніх значень. В основі такої корекції лежить медіанна фільтрація (за аналогом схеми згладження А. Л. Чудова). Метод верифікований на класичній задачі про обтікання кругового циліндра і показав добре узгодження результатів моделювання (діаграм розподілу модуля швидкості, профілів швидкості в перерізах, ліній течії, гідродинамічних коефіцієнтів) із результатами інших чисельних розв’язків як для помірних $\mathrm{Re} \sim 10^2$ так і для великих чисел Рейнольдса $10^3 < \mathrm{Re} < 2 \cdot 10^4$.

5. Створено програмно-моделюючу систему для моделювання в’язких течій методом граткових рівнянь Больцмана. Функціонал програми включає в себе задання параметрів течії та параметрів моделювання, побудову стандартних або завантаження довільних геометрій та представлення результатів моделювання у вигляді діаграм розподілу модуля швидкості, компонент швидкості, тиску, ліній течії, а також у вигляді табличних значень модуля швидкості, компонент швидкості та коефіцієнтів лобового опору, підйомної сили та тиску обтічних тіл. Передбачена можливість дослідження течії в довільних перерізах. Обчислення розпаралелюються на центральному процесорі за рахунок використання технології паралельних обчислень OpenMP.

Список використаної літератури

1. Ландау Л. Д. Теоретическая физика: в 10 т. Т. 6 : Гидродинамика. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1986. – 736 с.
2. Кочин Н. Е. Теоретическая гидромеханика, часть 1. / Н. Е. Кочин, І. А. Кибель, Н. В. Рози – М. : Физматгиз, 1963. – 584 с.
3. Кочин Н. Е. Теоретическая гидромеханика, часть 2. / Н. Е. Кочин, І. А. Кибель, Н. В. Рози – М. : Физматгиз, 1963. – 728 с.
4. Хмельник С. И. Уравнения Навье-Стокса. Существование и метод поиска глобального решения. / С. И. Хмельник – Израиль: MiC, 2010. – 106 с.
5. Метод численного решения уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление / Е. В.Бруяцкий, А. Г. Костин, Е. И. Никифорович, Е. И. Розумнюк // Прикладная гидромеханика. – 2008. – С. 13–23.
6. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред / О. М. Белоцерковский – М. : Физматлит, 1994. – 448 с.
7. Макарьянц Г. М. Основы метода конечных элементов / Г. М. Макарьянц, А. Б. Прокофьев. – Самара: СГАУ, 2013. – 79 с.
8. Смирнов Е. М. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии / Е. М. Смирнов, Д. К. Зайцев // Научно технические ведомости. – 2004. – № 2. – С. 1-22.
9. Численное моделирование течений жидкости со свободными границами методами SPH и MPH / К. Е. Афанасьев, А. Е. Ильясов, Р. С. Макарчук, А. Ю. Попов // Вычислительные технологии. – 2006. – Т. 11. – С. 26-44.
10. Белоцерковский С. М. Метод дискретных вихрей и турбулентность / С. М. Белоцерковский, Б. Ю. Скобелев. – Новосибирск: ІТПМ, 1993 – 38 с.

11. Кирякин В. Ю. Моделирование обтекания объектов методом дискретных вихрей с представлением вихревой пелены изолированными вихревыми частицами / В. Ю. Кирякин // Научный вестник МГТУ ГА. Серия : Аэромеханика и прочность. – 2008. – № 125. – С. 79-82

12. Черний Д. И. Вычислительные технологии для метода дискретных вихрей / Д. И. Черний // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2016. – № 6. – С. 116-123.

13. Белоцерковский О. М. Метод крупных частиц в газовой динамике / О. М. Белоцерковский, Ю. М. Давыдов. – М. : Наука, 1982. – 392 с.

14. Поттер Д. Вычислительные методы в физике / Д. Потер. – М.: Мир, 1975. – 392 с.

15. Андрианов А. Н. Метод частиц в ячейках : учет в параллельной реализации взаимодействия частиц / А. Н. Андрианов, К. Н. Ефимов. – М. : ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016. – 16 с. – (Препринт / РАН – федеральное агентство научных организаций, ИПМ им. М. В. Келдыша; 071).

16. Месяц Е. А. О выборе числа частиц в методе частиц-в-ячейках для моделирования задач физики плазмы / Е. А. Месяц, А. В. Сытников, К. В. Лотов // Вычислительные технологии. – 2013. – Т. 18, № 6. – С. 83-96.

17. Бандман О. Л. Клеточно-автоматные модели естественных процессов и их реализация на современных компьютерах / О. Л. Бандман // Прикладная дискретная математика. – 2017. – № 35. – С. 102-121.

18. Wolf-Gladrow D. Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models - An Introduction / D. Wolf-Gladrow. – Bremerhaven: Alfred Wegener Institute for Polar and Marine, 2005. – 311 p.

19. He X. Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier-Stokes equations / X. He, L. Luo // Journal of statistical physycs. – 1997. – Vol. 88. – P. 927-944.

20. Веденяпин В. В. Кинетическое уравнение Больцмана и Власова / В. В. Веденяпин. – М. : Физматлит, 2001. – 112 с.

21. Силин В. П. Введение в кинетическую теорию газов / В. П. Силин. – М.: Издательство физического института им. Лебедева, 1998. – 339 с.

22. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов / К. Черчиньяни. – М. : Мир, 1973. – 242 с.

23. Квасников И. А. Термодинамика и статистическая физика : в 3 т. Т. 3: Теория неравновесных систем / И. А. Квасников. – М. : Эдиториал УРСС, 2003. – 448 с.

24. Полак Л. С. Людвиг Больцман / Л. С. Полак. – М. : Наука, 1987. – 203 с.

25. Зубарев Д. Н. Неравновесная статистическая термодинамика / Д. Н. Зубарев. – М. : Наука, 1971. – 416 с.

26. Гуров К. П. Основания кинетической теории. Метод М. М. Боголюбова. / К. П. Гуров. – М. : Наука, 1966. – 652 с.

27. Григорьев Ю. М. Групповой анализ интегро-дифференциальных кинетических уравнений. Результаты и перспективы. / Ю. М. Григорьев, С. В. Мелешко // Вычислительные технологии. – 2002. – Т.7, № 2. – С. 35-49.

28. Левич В. Г. Курс теоретической физики : в 2 т. Т. 2: Квантовая механика. Квантовая статистика и физическая кинетика. / Вдовин Ю. А., Мямлин В. А. – М. : Наука, 1971. – 936 с.

29. Биккин Х. М., Неравновесная термодинамика и физическая кинетика. / Х. М. Биккин, И. И. Ляпилин. – Екатеринбург: УрВ РАН, 2009. – 500 с.

30. McNamara G. R. Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata / G. R. McNamara, G. Zanetti // Phys. Rev. Letter. – 1988. – № 61. – P. 23-32.

31. Higuera F. J. Boltzmann approach to lattice gas simulations / F. J. Higuera, J. Jimenez // Europhysics Letters. – 1989. – Vol. 9, № 7. – P. 663-668.

32. Succi S. The lattice Boltzmann equation: a new tool for computational fluid-dynamics / S. Succi, R. Benzi, F. Higuera // Physica D. – 1991. – 47. – P. 219-230.

33. Skordos P. Initial and Boundary conditions for the lattice Boltzmann method / P. Scordos // Physical review E. – 1993. – Vol. 48. – P. 4823-4842.

34. Martinez D. O. Comparison of spectral method and lattice Boltzmann simulations of two-dimensional hydrodynamics / D. O. Martinez, W. H. Matthaeus, S. Chen // Physics of Fluid. – 1994. – Vol. 6. – P. 1285-1290.

35. Simulation of cavity flow by the lattice Boltzmann method / S. Hou, Q. Zou, S. Chen, G. Doolen, A. C. Cogley // Journal of computational physics. – 1995. – Vol. 118, № 2. – P. 329-347.

36. He X. Theory of the lattice Boltzmann method: from the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation / X. He, Li-Shi Luo // Phys. Rev. – 1997. – Vol. 56, № 6. – P. 6811-6817.

37. Zou Q. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model / Q. Zou, X. He // Phys. of Fluids. – 1997. – Vol. 9. – P. 1591-1598.

38. He X. Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier-Stokes equation / X. He, L. Luo // Journal of statistical physics. –1997. – Vol. 88, № 3. – P. 927-944.

39. Chen S. Lattice Boltzmann method for fluid flows / S. Chen, G. Doolen // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1998. – Vol. 30. – P.329-364.

40. Succi S. The lattice Boltzmann equation for fluids and beyond / S. Succi. – Oxford : Oxford University Press, 2001. – 290 p.

41. Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods: lattice Boltzmann and finite-volume / M. Breuer,

J. Bernsdorf, T. Zeiser, F. Durds // International journal of heat and fluid flow. – 2000. – Vol. 21, № 2. – P. 186-196.

42. The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numeric and implications / R. R. Nougaliev, T. G. Theofanous, T. N. Dinh, D. Joseph // International Journal of Multiphase flow. – 2003. – № 29. – P. 117-169.

43. Luo L. Theory of the lattice Boltzmann method: lattice Boltzmann models for non-ideal gases / L. Luo // ICASE Report. – 2001. – № 8. – P. 1-26.

44. Force evaluation in the lattice Boltzmann method involving curved geometry / R. Mei, D. Yu, W. Shyy, L. Luo // Physical review E. – 2002. – Vol. 65. – P. 1-14.

45. Guo Z. Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media / Z. Guo, TS Zhao // Phys. Rev. E Stat. Nonlinear Soft Matter Phys. – 2002. – Vol. 66. – P. 036304-1 - 036304-9

46. Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation / D.Yua, R. Meia, L. Luob, W. Shyya // Progress in Aerospace sciences. – 2003. – № 39. – P. 329–367.

47. The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numeric and implications / R.R. Nourgaliev, T.N. Dinh, T.G. Theofanous, D. Joseph // International Journal of Multiphase Flow. – 2003. – Vol. 29, № 1. – P. 117-169.

48. Benchmark computations based on lattice-Boltzmann, finite element and finite volume methods for laminar flows / S. Geller, M. Krafczyk, J. To Lke, S. Turek, J. Hron // Computers & Fluids. – 2006. – Vol. 35, № 8. – P. 1-17.

49. Куперштох А. Л. Учет действия объемных сил в решеточных уравнениях Больцмана / А. Л. Куперштох // Вестник Новосибирского Государственного Университета. Серия «Математика, механика, информатика». – 2004. – Т. 4, № 2. – С. 75-96.

50. Derksen J. J. The lattice-Boltzmann method for multiphase fluid flow simulations and Euler-Lagrange large-eddy simulations / J.J. Derksen //

Multiphase Reacting Flows: Modelling and Simulation. – 2006. – Vol. 492. – P. 181-228.

51. Sucop M. C. Lattice Boltzmann modeling. An introduction for geophysics and engineeres / M.C. Sucop, D.T. Thorne. – Miama: Springer, 2006. – 173 p.
52. Dunweg B. Lattice Boltzmann simulation of soft matter system / B. Dunweg, A. Ladd // Advanced Computer Simulation Approaches for Soft Matter Sciences. – 2008. – Vol. 221. – P. 86-166.
53. Numerical simulation of lid-driven cavity flow using the lattice Boltzmann method / M. Mussa, S. Abdullah, C.S. Azwadi, N. Muhamad, K. Sopian // Applied Mathematics. – 2008. – Vol. 13. – P. 236-240.
54. Izquierdo S. Characteristic nonreflecting boundary conditions for open boundaries in lattice Boltzmann method / S. Izquierdo, N. Fueyo // Physical Review E. – 2008. – Vol. 78. – P. 046707-1 - 046707-7.
55. Numerical method of lattice Boltzmann simulation for flow past a rotating cylinder with heat transfer / Y.Q. Zu, Y.Y. Yan, W. Shi, L.Q. Ren // International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow. – 2008. – Vol. 18, № 6. – P. 766-782.
56. Wang. L. P. Direct simulation of viscous flow in a wavy pipe using the lattice Boltzmann approach / L.P. Wang, M.H. Du // International Journal of Engineering Systems Modelling and Simulation. – 2008. – Vol. 1, №1. – P. 20-29.
57. Straight velocity boundaries in the lattice Boltzmann method / J. Latt, B. Chopard, O. Malaspinas, M. Deville, A. Michler // Phys. Rev. E Stat. Nonlin. Soft Matter Phys. – 2008. – Vol. 77, № 5 – P. 056703-1 – 056703-16.
58. Сидоренко Б. В. MRT Lattice Boltzmann метод в моделировании гидродинамики мелководных водоемов / Б. В. Сидоренко // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2009. – № 2. – С. 186-192.

59. Consistent boundary conditions for 2D and 3D lattice Boltzmann simulations / C. Ho, C. Chang, K. Lin, C. Lin // CMES. – 2009. – Vol. 44, № 2. – P. 137-155.
60. Ul-Islam S. Characteristics of flow past a square cylinder using LBM / S. Ul-Islam, C.Y. Zhou // Information Technology Journal. – 2009. – Vol. 9. – P. 1094-1114.
61. Куперштох А. Л. Метод решеточных уравнений Больцмана для моделирования двухфазных систем типа жидкость-пар / А. Л. Куперштох // Современная наука. – 2010. – Т. 4, № 2. – С. 56-63.
62. Kupershtokh A.L. Criterion of numerical instability of liquid state in LBE simulations / A.L. Kupershtokh // Computers & Mathematics with Applications. – 2010. – Vol. 59, № 7. – P. 2236-2245.
63. Narvaez A. Evaluation of pressure boundary conditions for permeability calculations using the lattice-Boltzmann method / A. Narvaez, J. Harting // Advanced in Applied Mathematics and Mechanics. – 2010. – Vol. 5, №2. – P. 685-700.
64. Mohamad A.A. Lattice Boltzmann method. Fundamentals and engineering applications with computer codes / A.A.Mohamad. – Calgary: Springer, 2011. – 178 p.
65. Multi-relaxation time lattice Boltzmann model for uniform-shear flow over a rotating circular cylinder / N. Nemati, M. Farhadi, K. Sedighi, E. Fattahi // Thermal Science. – 2011. – 15(3). – P. 859-878.
66. Моделирование микротечений методом решеток Больцмана / А. И. Тыринов, А. А. Авраменко, Б. И. Басок, Б. В. Давиденко // Промышленная теплотехника. – 2011. – Т. 33, № 2. – С. 11-18.
67. Numerical simulation of flow around two rotating circular cylinders in staggered arrangement by multi-relaxation-time lattice Boltzmann method at low Reynolds number / K. Fallah, A. Fardas, N. Sedaghatizadeh, E. Fattahi, A. Ghaderi // World Applied Sciences Journal. – 2011. – Vol. 15, № 4. – P. 544-554.

68. Куперштох А. Л. Реализация метода решеточных уравнений Больцмана на многопроцессорных графических ускорителях для 3d моделирования двухфазных систем типа жидкость-пар // Современная наука. – 2011. – Т. 7, № 2. – С. 112-118.
69. Ning Y. Numerical study of the properties of the central moment lattice Boltzmann method / Y. Ning, K. N. Premnath // International Journal for Numerical Methods in Fluids. – 2012. – Vol. 82, № 2. – P. 59-90.
70. Zecevic V. Stability and accuracy of various difference schemes for the lattice Boltzmann method / V. Zecevic, M.P. Kirkpatrick, S.W. Armfield // ANZIAM Journal. – 2012. – Vol. 53. – P. 494-510.
71. Musik P. Two Dimentional Lattice Boltzmann Method for Cavity Flow Simulation / P. Musik, K. Jaroensutasinee // Walailak Sci & Tech. – 2012. – Vol. 1, № 1. – P.53-70.
72. Dhiraj P. Lattice Boltzmann simulation of lid-driven flow in deep cavities / P. Dhiraj, K. N. Lakshmisha, R. Bernd // Computers & Fluids. – 2012. – Vol. 35, № 10. – P. 1116-1125.
73. Numerical simulation of viscous flow over a square cylinder using lattice Boltzmann method / D. A. Perumal, V. Gundavarapu, S. Kumar, A.K. Dass // ISRN Mathematical Physics. – 2012. – Vol. 2012. – P. 1-16.
74. Regulski W. Numerical simulation of confined flows past obstacles - the comparative study of lattice Boltzmann and spectral element methods / W. Regulski, J. Szumbarski // Archives of Mechanics. – 2012. – Vol. 64, № 4. – P. 423-456.
75. Taeibi-Rahni M. Investigation of flow around a confined elliptical cylinder using the lattice Boltzmann method / M. Taeibi-Rahni, V. Esfahanian, M. Salari // Middle-East Journal of scientific research. – 2013. – Vol. 15, № 1. – P. 8-13.
76. Multi-GPU implementation of the lattice Boltzmann method / C. Obrecht, F. Kuznik, B. Tourancheau, J. Roux // Computers & Mathematics with Applications. – 2013. – Vol. 65, № 2. – P. 252-261.

77. Reunsumrit J. The lattice Boltzmann method for investigating the fluid flow pattern in 2D channel through triangle obstacle / J. Reunsumrit // Applied Mathematical Sciences. – 2013. – Vol. 7. – P. 3215-3223.

78. Rettinger C. Fluid flow simulation using the lattice Boltzmann method with multiple relaxation times / R. Rettinger. – Erlanger : Friedrich-Alexander-University of Erlanger-Nurnberg, 2013. – 38 p.

79. Convective Heat Transfer From Two Rotating Circular Cylinders in Tandem Arrangement Using Lattice Boltzmann Method / H. Nemati, M. Farhadi, K. Sedighi, M. Pirouz, N. N. Abatari // Applied Mathematics and Mechanics. – 2012. –Vol. 33, No. 4. – P. 402 - 424.

80. Самойлов Д. А. Вычислительные возможности метода решеточного кинетического уравнения Больцмана / Самойлов Д. А., Губкин А. С. // Вестник Тюменского Государственного Университета. Физико-математические науки. Информатика. – 2014. – № 7. – С. 83-91.

81. Extended hybrid pressure and velocity boundary conditions for D3Q27 lattice Boltzmann model / H. Cheng, Y. Qiao, C. Liu, Y. Li, B. Zhu, Y. Shi, D. Sun, K. Zhang, W. Lin // Applied Mathematical Modelling. – 2012. – Vol. 36, № 5. – P. 2031-2055.

82. Hong X. Research of micro-rectangular-channel flow based on lattice Boltzmann method / X. Hong, W. Di, S. Yuhe // Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology. – 2012. – Vol. 14, № 6. – P. 2520-2525.

83. Куперштох А. Л. Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость-пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU // Вычислительные методы и программирование. – 2012. – Т. 13. – С. 130-138.

84. Реализация метода решеточных уравнений Больцмана для расчетов на GPU-кластере / Д. А. Бикулов, Д. С. Сенин, Д. С. Демин, А. В. Дмитриев, Н. Е. Грачев // Вычислительные методы и программирование. – 2012. – Т. 13. – С. 13-19.

85. Кривовичев Г. В. О применении интегро-интерполяционного метода для построения одношаговых решеточных кинетических схем Больцмана / Г. В. Кривовичев // Вычислительные методы и приложения. – 2012. – Т. 13, № 1. – С. 19-27.
86. Simplified multiphase lattice Boltzmann method for simulating multiphase flows with large density ratio and Complex interfaces / Z. Chen, C. Shu, D. Tan, X. D. Niu, Q. Z. Li // Phys. Rev. – 2018. – Vol. 98, № 6. – P. 63-83.
87. Кривовичев Г. В. О расчете течений вязкой жидкости методом решеточных уравнений Больцмана / Г. В. Кривовичев // Компьютерные исследования и моделирование. – 2013. – Т. 5, № 2. – С. 165-178.
88. Mele I. Seminar. Lattice Boltzmann method / I. Mele. – Ljubljana: Univerza v Ljubljana, 2013. – 15 p.
89. Wolf F. G. The lattice-Boltzmann method for determining the drag coefficient / D. Bonkowski, F. G. Wolf // International Congress of Mechanical Engineering. – 2013. – № 22. – P. 6087-6098.
90. Taher M.A. High Prandtl number mixed convection cavity flow using lattice Boltzmann method / M.A. Taher, H.D. Kim, Y.W. Lee // European Scientific Journal. – 2013. – Vol. 9, № 33. – P. 159-178.
91. Aslan E. Investigation of the lattice Boltzmann SRT and MRT stability for lid driven cavity flow / E. Aslan, I. Taymaz, A.C. Benim // International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing. – 2014. – Vol. 2, № 4. – P. 317-324
92. Захаров А. М. Моделирование течений методом решеточных уравнений Больцмана со многими временами релаксации / А. М. Захаров, Д. С. Сенин, Е. А. Грачов // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологи. – 2014. – Т. 15, № 4. – С. 644-657.
93. Bogner S. Drag correlation for dilute and moderately dense fluid-particle systems using the lattice Boltzmann method / S. Bogner, S. Mohanty,

U. Rude // International Journal of Multiphase Flow. – 2014. – Vol. 68. – P. 71-79.

94. Perumal D.A. Lattice Boltzmann simulation of flow over a circular cylinder at moderate Reynolds numbers / D.A. Perumal, G.V.S. Kumar, A.K. Dass // Thermal Sciences. – 2014. – 18(4). – P. 1235-1246.

95. Lattice-Boltzmann simulations of the drag force on a sphere approaching a superhydrophobic striped plane / A.L. Dubov, S. Schmieschek, E.S. Asmolov, J. Harting, O.I. Vinogradova // Journal of Chemical Physics. – 2014. – Vol. 140, № 3. – P. 034707-1 - 034707-8

96. Li J. Appendix: Chapman-Enskog expansion in the lattice Boltzmann method [Електронний ресурс] / J. Li // arXiv. – 2015. – Режим доступу до ресурсу: https://arxiv.org/abs/1512.02599v1.

97. Bao Y. B. Lattice Boltzmann method for fluid simulations / Y.B. Bao, J. Meskas // Courant Institute of Mathematical Sciences. – 2014. – Режим доступу до ресурсу: www.cims.nyu.edu/~billbao/report930.pdf.

98. Taymaz I. Numerical investigation of incompressible fluid flow and heat transfer across a bluff body in a channel flow / I. Taymaz, E. Aslan, A. C. Benim // Thermal Science. – 2015. – Vol. 19, № 2. – P. 537-547.

99. Suswaram R.V. A lattice Boltzmann relaxation scheme for inviscid compressible flows / R.V. Suswaram, R. Deshmukh, S. Kotnala. – Bangalor: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2015. – 23 p.

100. Pole-scale lattice Boltzmann simulation of laminar and turbulent flow through a sphere pack / E. Fattahia, C. Waluga, B. Wohlmutha, U. Rude, M. Manhartc, R. Helmig // arXiv. – 2015. – Режим доступу до ресурсу: https://arxiv.org/abs/1508.02960.

101. Reijers S.A. Axisymmetric multiphase lattice Boltzmann method for generic equations of state / S.A. Reijers, H. Gelderblom, F. Toschi // Journal of Computational Science. – 2015. – Vol. 17, № 2. – P. 309-314.

102. Meng J. Slip velocity of lattice Boltzmann simulation using bounce-back boundary scheme / J. Meng, X. J. Gu, D. R. Emerson // arXiv. – 2015. – Режим доступу до ресурсу: https://arxiv.org/abs/1508.02209.

103. Dubois F. On the stability of a relative velocity lattice Boltzmann scheme for compressible Navier-Stokes equations / F. Dubois, T. Fevrier, B. Graille // Comptes Rendus Mecanique. – 2015. – Vol. 343, № 10-11. – P. 599-610.

104. Malaspinas O. Increasing stability and accuracy of the lattice Boltzmann scheme: recursivity and regularization / O. Malaspinas // arXiv. – 2015. – Режим доступу до ресурсу: https://arxiv.org/abs/1505.06900.

105. Lattice Boltzmann methods for multiphase flow and phase-change heat transfer / Q. Li, KH Luo, QJ Kang, YL He, Q. Chen, Q. Liu // Progress in Energy and Combustion Science. – 2015. – Vol. 52. – P. 62-105.

106. Физико-химические процессы в газовой динамике: в 3 т. Т. 3 : Модели процессов молекулярного переноса в физико-химической газодинамике / И. Соколова, В. Жданов, В. Галкін, О. Гордєєв. – М. : Физматлит, 2012. – 284 с

107. Базаров И. П. Неравновесная термодинамика и физическая кинетика / И. П. Базаров, Е. В. Геворкян, П. Н. Николаев. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 240 с.

108. Физика макросистем. Основные законы: учебное пособие / И. Е. Иродов. – М.: БИНОМ. Лабораторія знань, 2012. - 207 с.

109. Bulanchuk G. Stability investigation of the two-dimensional nine-vectors model of the lattice Boltzmann method for fluid flows in a square cavity / G. Bulanchuk, O. Bulanchuk, A. Ostapenko // Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems ». – 2015. – Vol. 28. – P. 113-125.

110. Остапенко А. А. Исследование влияния переменной скорости звука в ячейке при моделировании течения в плоском канале и обтекания кругового цилиндра потоком вязкой жидкости при расчете методом решеточных уравнений Больцмана / А. А. Остапенко, О. Н. Буланчук,

Г. Г. Буланчук // Вестник Черкасского университета. – 2016. – № 1. – С. 50-64.

111. Bulanchuk G. Investigation of the influence of the relaxation parameter on the viscous fluid flow over circular cylinder modeling process with the lattice Boltzmann method / G. Bulanchuk, A. Ostapenko // Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems». – 2017. – Vol. 33. – P. 52-61.

112. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н. А. Слезкин. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. – 521 с.

113. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 618 с.

114. Буланчук О. Н. Программа построения линий тока по дискретному полю скоростей / О. Н. Буланчук, Г. Г. Буланчук // Вестник Харьковского национального университета. Серия: Математическое моделирование. Информационные технологи. Автоматизированные системы управления. – 2013. – Т. 22. – С. 45-50.

115. Горин А. В. Обзор моделей расчета течения несжимаемой жидкости в квадратной каверне / А. В. Горин // Градиентные и отрывные течения. – 1976. – Т. 19. – С. 85-116.

116. Кочубей А. А. Сравнительный анализ численных и аналитических исследований циркуляционных двумерных течений в кавернах / А. А. Кочубей, Е. В. Кравец // Техническая механика. – 2012. – №1. – С. 38-55.

117. Ratkowsky D. A. Viscous flow in a rectangular cut-out / D.A. Ratkowsky, Z. Rottem // Physics Fluids. – 1968. – Vol. 12, №. 12. – P. 1822-1825.

118. Takematsu M. Viscous flow in a two-dimension cavity / M. Takematsu // J. Phys. Soc. Jap. – 1965. – Vol. 20. – P. 283-285.

119. Weiss R.F. Flow in a cavity at low Reynolds number / R. F. Weiss, B. H. Florsheim // Phys. Fluids. – 1965. – Vol. 8, № 9. – P. 1631-1635.

120. Чжен П. Отрывные течения: в 3 т. / П. Чжен. – М.: Мир, 1972-1973. – Т. 1 – 1972. – 299 с. ; Т. 2. – 1973. – 280 с. ; Т. 3. – 1973. –333 с.

121. Денисон А. К. Сжимаемый свободный струйный пограничный слой с ненулевой начальной толщиной / А. К. Денисон, В. В. Баум // Ракетная техника и космонавтика. – 1963. – Т. 1, № 2. – С. 178-183.

122. Burggraf O. R. Model of steady separated flow in rectangular cavities at high Reynolds number / O. R. Burggraf // Proc. Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. – 1965. – Vol. 21. – P. 190-229.

123. Mills R. D. On closed motion of fluid in a square cavity / R. D. Milles // J. Roy. Aero. Soc. – 1965. – Vol. 69. – P. 116-121.

124. Елизарова Т. Г. Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости в кубической каверне / Елизарова Т. Г., Милюкова О. М. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43, № 3. – С. 453-466.

125. Розумнюк Н. В. Мгновенные и осредненные характеристики вязкого потока около прямоугольной каверны / Розумнюк Н. В. // Прикладная гидромеханика. – 2007. – Т. 9, № 4. – С. 49-58.

126. Давидова Е. В. Использование метода конечных элементов с частицами для решения задач гидродинамики / Е. В. Давидова, В. Н. Корчагова, И. К. Марчевский // Наука та Образование. – 2015. – № 6. – С. 329-345.

127. Каштанова С. В. Моделирование течений вязкой жидкости в каверне методом контрольных объемов при использовании стабилизированного метода бисопряженных градиентов / С. В. Каштанова, Н. Н. Окулова // Вестник МГТУ им. Н. Е. Баумана. Серия «Естественные науки». – 2011. – № S1. – С. 159-168.

128. Гуров Д. Б. Об одном способе построения алгоритма расчета течений вязкой несжимаемой жидкости / Д. Б. Гуров, Т. Г. Елизарова // Журнал

вычислительной математики и математической физики. – 1990. – Т. 30, № 11. – С. 1719-1727.

129. Копченов В. И. Неявная итерационная схема для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости / В. И. Копченов, Д. А. Никифоров // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1994. – Т. 34, № 8-9. – С. 1335-1343.

130. Кочубей А. А. Численное моделирование процессов конвективного переноса на основе метода конечных элементов / А. А. Кочубей, А. А. Рядно. – Днепропетровск: Изд-во ДДУ, 1991. – 228 с.

131. Исаев С. А. Аэродинамика утолщенных тел с вихревыми ячейками. Численное и физическое моделирование / С. А. Исаев, П. А. Баранов, Ю. Ф. Гортишов, С. В. Гувернюк, А. Б. Мазо, М. Ю. Смурнов, А. Г. Судаков, А. Е. Усачов, В. Б. Харченко. – СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2016. – 215 с.

132. Спокойный М. Ю. CFD-моделирование теплообмена в прямоугольном канале с каверна-штиревым оребрением / М. Ю. Спокойный, В. Е. Трофимов, М. В. Шевчук // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2013. – № 2-3. – С. 33-38.

133. Метелица С. С. Экспериментальное обоснование возможности эффективного применения воздушной каверны на скоростных катамаранах / С. С. Метелица // Вестник СГТУ. – 2016. – Т. 82, №1. – С. 73-79.

134. Волков К. М. Течение и сопряженный теплообмен в каверне между ротором и статором / К. М. Волков // Прикладная механика и техническая физика. – 2011. – Т. 52, № 3.– С. 126-142.

135. Амалицкий В. В. Надежность машин и оборудования лесного комплекса / В. В. Амалицкий., В. Г. Бондар, А. М. Волобаев, А. С. Воякин. – М.: Издательство Московского Государственного Университета Леса, 2002. – 279 с.

136. Van Dyky M. An Album of Fluid Motion / M. Van Dyky. – California: The Parabolic Press, 1982. – 184 p.

137. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. – 676 с.

138. Воларович М. П. Работи Пуазейля о течении жидкости в трубах / М. П. Воланович // Известия Академии Наук СРСР. Серия физическая. – 1947. – Т. 11, № 1. – С. 1-18.

139. Башкин В. Численное исследование задач внешней и внутренней аэродинамики / В. Башкин. – М .: ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 332 с.

140. Tritton D. J. Experiments on the Flow Past a Circular Cylinder at Low Reynolds Numbers / D. J. Tritton // Journal of Fluid Mechanics. – 1959. – 6 (4). – P. 547-555.

141. Calhoun D. A Cartesian grid Method for Solving the Two-Dimentional Streamfunction-Vorticity Equations in Irregular Regions. / D. A. Calhoun // Journal of Computational Physics. – 2002. – № 176. – P. 231-275.

142. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974. – 712 с.

143. Белоцерковский О. М. Численное моделирование нестационарного периодического течения вязкой жидкости в следе за цилиндром / О. М. Белоцерковский, С. О. Белоцерковский, В. А. Гущин // Вычислительная математика и математическая физика. – 1984. – Т. 24, № 8. – С. 1207-1216.

144. Barakos G. Numerical simulation of viscoelastic flow around a cylinder using an integral constitutive equation / G. Barakos, E. Mitsoulis // J. Rheol. – 1995. – 39 (6). – P. 1279-1292.

145. Dennis S. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds number up to 100 / S. Dennis, G. Chang // J. Fluid Mech. – 1970. – № 42. – P. 471-489.

146. Fornberg B. A numerical study of steady viscous flow past a circular cylinder / B. A. Fornberg // J. Fluid Mech. – 1980. – Vol. 98, № 4. – P. 819-855.
147. Фомин Г. М. О циркуляции вихрей и скорости перемещения дорожки Кармана / Г. М. Фомин // Ученые записки ЦАГИ. – 1974. – Т. 2, № 4. – С. 99-102.
148. Ostapenko A. Calculations of the drag coefficient of circular, square and rectangular cylinders using the lattice Boltzmann method with variable lattice speed of sound / A. Ostapenko, G. Bulanchuk // Afrika Matematika. – 2018. – Vol. 18, № 1-2. – P. 137-147.
149. Волков К. Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах тербулентных течений / К. Н. Волков, В. Н. Емельянов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 368 с.
150. Елизарова Т. Г. Метод регуляризации для численного моделирования переноса примеси в мелкой воде / Т. Г. Елизарова, А. В. Иванов. – М.: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2019. – 28 с. – (Предпринт / РАН, ИПМ им. М. В. Келдыша; 19-01-00262).
151. Тихомиров В. В. О регуляризации обратной задачи для уравнения теплопроводности / В. В. Тихомиров, О. Н. Бобылева // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2017. – Т. 13, № 1. – С. 25-29.
152. Мучная М. И. Численное исследование вязких течений в гиперзвуковых соплах : дис. канд. физ.-мат. наук : 01.05.02 / Мучная М. И. – Новосибирск, 1985. – 159 с.
153. Борис Д. П. Решение уравнения непрерывности методом коррекции потоков / Д. П. Борис, Д. Л. Бук // Вычислительные методы в физике. Управляемый термоядерный синтез / Д. П. Борис, Д. Л. Бук. – Москва: Мир, 1980. – С. 92–141.

154. Лобанов А. И. Математическое моделирование нелинейных процессов: учебник для академического бакалавриата / А. И. Лобанов, И. Б. Петров. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 255 с.

155. Пасконов В. М. Численное моделирование процессов тепло-и массообмена / В. М. Пасконов, В. И. Полежаев, Л. А. Чудов М.: Наука, 1984. – 288 с.

156. Micek J. Median filter / J. Micek, J. Kapitulik // Journal of Information, Control and Management Systems. – 2003. – Vol. 1, № 2. – P. 51-56.

157. Розенберг Г. С. Экологическое прогнозирование (Функциональные предикторы временных рядов) / Г. С. Розенберг, В. К. Шитиков, П. М. Брусиловский. – Тольяти: Институт экологии Волжского бассейна РАН, 1994. – 182 с.

158. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике : в 9 т. Т. 6 : Физика сплошных сред / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – М. : Наука, 1965. – 286 с.

159. Исаев С. А. Численное моделирование нестационарного теплообмена при турбулентном обтекании кругового цилиндра / С. А. Исаев, П. А. Баранов, Н. А. Кудрявцев // Теплофизика и аэромеханика. – 2005. – Т. 12, № 1. – С. 27-39.

160. Сентябов А. В. Исследование моделей тербулентности для расчета закрученных течений / А. В. Сентябов, А. А. Гаврилов, А. А. Дектерев // Теплофизика и аэромеханика. – 2011. – Т. 18, № 1. – С. 81-93.

161. Жукова Ю. В. Численное моделирование нестационарного поперечного обтекания овального цилиндра при различных числах Рейнольдса / Ю. В. Жукова, А. М. Терех, А. В. Семеняко // Современная наука. – 2010. – № 2 (4). – С. 231-235.

162. Бузыкин О. Г. Численное моделирование аэродинамических характеристик малоразмерного летательного аппарата / О. Г. Бузыкин, А. В. Казаков, А. В. Шустов // Ученые записки ЦАГи. – 2010. – Т. 16, № 5. – С. 21-31.

ДОДАТКИ

Додаток 1. Довідка про впровадження результатів дослідження у навчальний процес кафедри вищої та прикладної математики ДВНЗ «ПДТУ».

Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
«Приазовський державний технічний університет»
ДВНЗ «ПДТУ»
вул. Університетська, 7, м. Маріуполь, 87555, тел./факс (0629) 33 34 16, факс (0629) 52 99 24
E-mail: office@pstu.edu, Web: http://www.pstu.edu, Код ЄДРПОУ 02070812

05.07.2019 № 76/10-255 На № ______ від ______

Довідка

про впровадження у навчальний процес матеріалів кандидатської дисертації Остапенка Артема Олексійовича, асистента кафедри вищої та прикладної математики ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет» за темою «Моделювання в'язких течій методом граткових рівнянь Больцмана при помірних та великих числах Рейнольдса».

Надана довідка підтверджує, що науково-методичні матеріали, які представлені у кандидатській дисертації Остапенка Артема Олексійовича, асистента кафедри вищої та прикладної математики, за темою «Моделювання в'язких течій методом граткових рівнянь Больцмана при помірних та великих числах Рейнольдса» впроваджені і використовуються в навчальному процесі кафедри вищої та прикладної математики.

Так, при підготовці магістрів за спеціальністю 113 «Прикладна математика» у програмі дисципліни «Аналітичні та чисельні методи гідродинаміки» використовується опис гібридних моделей та етапи розвитку кінетичних моделей, що описані у розділі 1 дисертації «Моделювання динаміки рідини: класичні та кінетичні моделі».

На основі методичних підходів у комп'ютерному моделюванні, що були викладені у розділі 2 «Метод граткових рівнянь Больцмана» та розділі 3 «Початкові та граничні умови», створено лабораторну роботу «Моделювання в'язких течій методом граткових рівнянь Больцмана».

Застосування результатів дисертаційної роботи Остапенка А.О. у навчальному процесі кафедри вищої та прикладної математики, які мають певну наукову новизну і практичну цінність, допомагають сформулювати уявлення студентів про сучасний стан обчислювальних методів гідродинаміки, поглибити теоретико-методологічні основи дисципліни та підвищити якість підготовки фахівців за спеціальністю 113 – Прикладна математика.

Т. в. о. ректора В.М.Євченко

Завідувач кафедри вищої
та прикладної математики О.М.Холькін

Погорелова О.Є. (0629) 44 62 04

Додаток 2. Довідка про впровадження результатів дослідження у навчальний процес кафедри комп'ютерних наук та вищої математики Донецького державного університету управління.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Донецький державний університет управління

87535, вул. Карпинського, 58, м. Маріуполь, тел. (0629) 38-82-99, факс: (0629) 38-97-74
E-mail: info@inbox.dsum.edu.ua код ЄДРПОУ 00173427

27.11.2019 № 11-01.04/1744 На № ______________ від ________________

Довідка
про впровадження у навчальний процес матеріалів дисертаційного дослідження
Остапенка Артема Олексійовича
«Моделювання в'язких течій методом граткових рівнянь Больцмана при помірних та великих числах Рейнольдса»,
асистента кафедри вищої та прикладної математики ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет»

Надана довідка підтверджує, що науково-методичні матеріали, які представлені у кандидатській дисертації Остапенка Артема Олексійовича, асистента кафедри вищої та прикладної математики, за темою «Моделювання в'язких течій методом граткових рівнянь Больцмана при помірних та великих числах Рейнольдса» впроваджені і використовуються в навчальному процесі кафедри комп'ютерних наук та вищої математики Донецького державного університету управління.

У навчальну дисципліну «Моделювання складних систем», що проводиться для бакалаврів спеціальності 122 «Комп'ютерні науки», включено лекцію за темою «Моделювання гідродинамічних процесів». Матеріали лекції використовують опис класичних та кінетичних моделей обчислювальної гідродинаміки, що представлені у розділі 1 дисертації «Моделювання динаміки рідини: класичні та кінетичні моделі», а також модель граткових рівнянь Больцмана, викладену у розділі 2 «Метод граткових рівнянь Больцмана».

Розроблена у дисертації програмно-моделююча система використовується при проведені лабораторної роботи за темою «Моделювання течій у каналах довільних форм», що включає в себе дослідження течій у мікроканалах, кавернах та інших довільних областей. Методичні вказівки до лабораторної роботи використовують матеріали розділу 5 дисертації «Регуляризація чисельних розв'язків. Чисельні експерименти».

Доповнення змісту навчального курсу матеріалами дисертаційного дослідження Остапенка А.О. сприяло розширенню уявлення студентів про гідродинамічні процеси, сприяло формуванню навиків наукового дослідження та дозволило підвищити якість підготовки бакалаврів за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки».

Проректор з наукової роботи О.В. Балуєва

Завідувач кафедри комп'ютерних наук
та вищої математики І. В. Сирмаміїх

Додаток 3. Акт впровадження

ЗАТВЕРДЖУЮ
Директор ТОВ «Архат»
_____________ В. В. Адаманов
«___» ___________ 2019 р.

АКТ
про впровадження результатів дисертаційного дослідження
Остапенка Артема Олексійовича

Результати досліджень Остапенка Артема Олексійовича, виконані ним у рамках дисертаційної роботи на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук використані у роботі фахівцями компанії «Архат», а саме були використані розроблені математичні та чисельні моделі, інструменти розв'язання задач аерогідродинаміки у створеній програмно-моделюючій системі. Проведено комп'ютерне моделювання наступних задач:

- досліджено обтікання дротів із розрахунком навантаження на них при різних погодних умовах у місті;
- розв'язані задачі зовнішньої аеродинаміки з метою виявлення вихрових зон у жилих кварталах міста, в яких створюються несприятливі умови для розміщення технічного обладнання, а також офісів та зон обслуговування клієнтів;
- розв'язані задачі внутрішньої аеродинаміки з метою виявлення циркуляційних зон застою повітря та накопичення забруднень у приміщеннях компанії.

Отримані автором результати дозволяють підвищити ефективність розміщення технічного обладнання компанії, підвищити комфортні умови для працівників та клієнтів компанії.

Головний інженер Є. В. Ісаєв

Додаток 4. Авторське свідотство на комп’ютерну програму

УКРАЇНА

СВІДОЦТВО

про реєстрацію авторського права на твір

№ 89549

Комп'ютерна програма "Lattice Boltzmann Fluid" ("LBFluid")

(вид, назва твору)

Автор(и) **Остапенко Артем Олексійович**

(повне ім'я, псевдонім (за наявності))

Дата реєстрації 06.06.2019

Міністерство економічного розвитку і торгівлі України * Ідентифікаційний код 37508596 *

М.П.

Державний секретар Міністерства економічного розвитку і торгівлі України О. Ю. Перевезенцев

ПК «Україна». Зам. 19-2001. 2019 р. I кв.

Додаток 5. Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Буланчук О. Н. Моделирование течений вязкой жидкости методом решеток Больцмана / О. Н. Буланчук, А. А. Остапенко // Университетская наука-2014 : в 5 т. : тез. докл. междунар. науч.-техн. конф. (Мариуполь, 20-21 мая 2014 г.) / ПГТУ. – Мариуполь, 2014. – Т. 2. – С. 155–156.
2. Буланчук Г. Г. Граничные и начальные условия в методе LBM / Г. Г. Буланчук, А. А. Остапенко // Университетская наука-2015 : тезисы докладов междунар. науч.-техн. конф., 19-20 мая 2015 г. : в 4-х т. / ГВУЗ «ПГТУ». – Мариуполь, 2015. – Т. 2. – С. 256-257.
3. Bulanchuk G. Stability investigation of the two-dimensional nine-vectors model of the lattice Boltzmann method for fluid flows in a square cavity / G. Bulanchuk, O. Bulanchuk, A. Ostapenko // Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems». – 2015. – Vol. 28. – P. 113-125.
4. Остапенко А. А. Использование метода решеточных уравнений Больцмана для решения двумерных задач гидродинамики / А. А. Остапенко, О. Н. Буланчук, Г. Г. Буланчук // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики : XVII международный симпозиум (Суммы, 8-13 июня 2015 г.) : сб. науч. трудов / Суммы, 2015. – С. 196-200.
5. Буланчук Г. Г. Моделирование обтекания тел методом решеточных уравнений / Г. Г. Буланчук, О. Н. Буланчук, А. А. Остапенко // Университетская наука-2016 : в 4 т. : тез. докл. междунар. науч.-техн. конф. (Мариуполь, 19-20 мая 2016 г.) / ПГТУ. – Мариуполь, 2016. – Т. 2. – С. 206–207.
6. Остапенко А. А. Исследование влияния переменной скорости звука в ячейке при моделировании течений в плоском канале и обтекания кругового цилиндра потоком вязкой жидкости при расчете методом

решеточных уравнений Больцмана / А. А. Остапенко, О. Н. Буланчук, Г. Г. Буланчук // Вестник Черкасского университета. Серия физико-математические науки. – 2016. – № 1. – С. 50-64.

7. Буланчук Г. Г. Моделирование вязких течений методом решеточных уравнений Больцмана с применением технологий распараллеливания / Г. Г. Буланчук, А. А. Остапенко // Университетская наука - 2017 : Междунар. научно-техн. конф. (Мариуполь, 18-19 мая 2017 г.) : тез. докл. : в 3 т. / ГВУЗ "ПГТУ". - Мариуполь, 2017. - Т. 2. – С. 247–249.
8. Bulanchuk G. Investigation of the influence of the relaxation parameter on the viscous fluid flow over circular cylinder modeling process with the lattice Boltzmann method / G. Bulanchuk, A. Ostapenko // Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems». – 2017. – Vol. 33. – P. 52-61.
9. Остапенко А. А. Моделирование обтекания вращающегося кругового цилиндра методом решеточных уравнений Больцмана / А. А. Остапенко, Г. Г. Буланчук // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики : XVIII международный симпозиум (Харьков, 26-28 июня 2017 г.) : сб. науч. трудов / Харьков, 2017. – С. 169-172.
10. Bulanchuk G. Modeling of the viscous fluid flow around rotating circular cylinders with the lattice Boltzmann method at moderate Reynolds numbers / G. Bulanchuk, A. Ostapenko // Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems». – 2017. – Vol. 36. – P. 27-37.
11. Ostapenko A. Calculations of the drag coefficient of circular, square and rectangular cylinders using the lattice Boltzmann method with variable lattice speed of sound / A. Ostapenko, G. Bulanchuk // Afrika Matematika. – 2018. – Vol. 18, № 1-2. – P. 137-147.

12. Остапенко А. А. Об особенностях моделирования течений методом решеточных уравнений Больцмана [Електронний ресурс] / А. А. Остапенко // Современные информационные технологии, средства автоматизации и электропривод : II Всеукраинская научно-техническая конференция (Краматорск, 19-21 апреля 2018 г.) : тез. докл. / Краматорск: ДДМА, 2018. – Режим доступу: http://dspace.dgma.donetsk.ua:8080/jspui/handle/DSEA/344
13. Остапенко А. О. Моделювання гемодинаміки методом граткових рівнянь Больцмана / А. О. Остапенко, Г. Г. Буланчук // Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях : 17 міжнародна науково – практична конференція (Київ, 25-26 вересня 2018 р.) : тез. доп. / Київ, 2018 р. – С. 90-92.
14. Остапенко А. О. Застосування кінетичного підходу до моделювання гідродинаміки / Остапенко А. О. // Комп’ютерна інженерія і кібербезпека : досягнення та інновації : матеріали Всеукр. наук.-практ. конф. здобувачів вищої освіти й молодих учених (м. Кропивницький, 27–29 листоп. 2018 р.). – Кропивницький: ЦНТУ, 2018. – С. 83-85.
15. Ostapenko A. A. Computer Modeling of Viscous Fluid Flow Based on the Regularized Lattice Boltzmann Model [Electronic resuorce] / Ostapenko A. A. // Computer Modeling and Intelligent Systems (CMIS-2019): Second International Workshop (Zaporizhzhia, April 15-19 2019): CEUR Workshop Proceedings, Vol. 2353 / Zaporizhzhia, 2019 – P. 717-728. – Access mode: http://ceur-ws.org/Vol-2353/paper57.pdf
16. Остапенко А. О. Метод граткових рівнянь Больцмана: застосування, особливості та перспективи розвитку / А. О. Остапенко // Математика у технічному університеті XXI сторіччя: Всеукраїнська наукова конференція (Краматорск, 15-16 травня 2019 р.): зб. наук. праць / Краматорськ, 2019 – С. 196-198.

17. Остапенко А. О. Регуляризація чисельних розв’язків рівняння Больцмана при моделюванні в’язких течій / А. О. Остапенко // Університетська наука – 2019 : Міжнар. Науково-техн. конф. (Маріуполь, 16-17 травня 2019 г.) : тези доп. : в 4 т. / ДВНЗ "ПДТУ". – Маріуполь, 2019. – Т. 2. – С. 261–262.
18. Остапенко А. О. Моделювання обтікання перешкод методом граткових рівнянь Больцмана при великих числах Рейнольдса / А. О. Остапенко, Г. Г. Буланчук // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2019. – № 8 (1333). – С. 149-155.
19. Остапенко А. О. Візуалізація в’язких течій за допомогою текстурної адвекції при моделюванні методом граткових рівнянь Больцмана / А. О. Остапенко, Г. Г. Буланчук, О. М. Буланчук // Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях : 18 міжнародна науково – практична конференція (Київ, 01-02 жовтня 2019 р.) : тез. доп. / Київ, 2019 р. – С. 222-224.
20. Буланчук Г. Г. Текстурна адвекція при моделюванні в’язких течій методом граткових рівнянь Больцмана / Г. Г. Буланчук, О. М. Буланчук, А. О. Остапенко, Р. В. Чабану // Математичне моделювання в економіці. – 2019. – № 3 (16). – С. 49-57.

Додаток 6. Відомості про апробацію результатів дисертації

№ п/п	Назва конференції, конгресу, симпозіуму, школи	Місце проведення	Дата проведення	Форма участі
1	Университетская наука	м. Маріуполь, ДВНЗ «ПДТУ»	20-21.05.2014	Очна
2	Университетская наука	м. Маріуполь, ДВНЗ «ПДТУ»	19-20.05.2015	Очна
3	XVII международный симпозиум «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»	м. Суми	8-13.06.2015	Заочна
4	Университетская наука	м. Маріуполь, ДВНЗ «ПДТУ»	19-20.05.2016	Очна
5	Университетская наука	м. Маріуполь, ДВНЗ «ПДТУ»	18-19.05.2017	Очна
6	XVIII международный симпозиум «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»	м. Харків, НТУ «ХПІ»	26-28.06.2017	Очна
7	II Всеукраинская научно-техническая конференция «Современные информационные технологии, средства автоматизации и электропривод»	м. Краматорськ, ДДМА	19-21.04.2018	Заочна
8	17 міжнародна науково – практична конференція «Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях»	м. Київ	25-26.09.2018	Очна
9	Всеукр. наук.-практ. конф. здобувачів вищої освіти й молодих учених «Комп’ютерна інженерія і кібербезпека : досягнення та інновації»	м. Кропивницький, ЦНТУ	27-29.11.2018	Заочна
10	Second International	м. Запоріжжя	15-19.04.2019	Заочна

	Workshop «Computer Modeling and Intelligent Systems (CMIS-2019)»			
11	Всеукраїнська наукова конференція «Математика у технічному університеті XXI сторіччя»	м. Краматорськ, ДДМА	15-16.05.2019	Заочна
12	XIX международный симпозиум «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»	м. Одеса	8-13.06.2015	Очна
13	18 міжнародна науково – практична конференція «Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях»	м. Київ	01-02.10.2019	Очна