Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЧЕРНІЙ ДМИТРО ІВАНОВИЧ

Прим.№__________

УДК 517.9; 519.6; 532.5

ДИСЕРТАЦІЯ

МЕТОДОЛОГІЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ТЕХНОЛОГІЇ МОДЕЛЮВАННЯ АЕРОГІДРОДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

(підпис, ініціали та прізвище здобувача) Д.І.Черній

Науковий консультант
Довгий Станіслав Олексійович
академік НАН України,
д.ф.-м.н., професор

Київ – 2021

АНОТАЦІЯ

Черній Д.І. **Методологія та обчислювальні технології моделювання аерогідродинамічних процесів. – На правах рукопису**.

Дисертації на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – «Математичне моделювання та обчислювальні методи». – Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, 2021.

У дисертаційній роботі вирішується актуальна науково-прикладна проблема підвищення ефективності математичного моделювання аерогідродинамічних процесів та систем шляхом урахування їх особливостей і спеціальних властивостей, створення технологій моделювання, придатних для застосування в комп’ютерних системах прогнозування та керування швидкоплинними процесами в реальному масштабі часу. Досягнення ефективності моделювання відбувається за рахунок методології побудови моделей, що враховують основні домінуючі фактори явищ та процесів, із застосуванням методу сингулярних інтегральних рівнянь, використання удосконалених дискретизованих моделей, нових методів, обчислювальних алгоритмів та технологій, придатних для застосування в системах прогнозування та забезпечення підтримки прийняття рішень.

На основі методу сингулярних інтегральних рівнянь побудовані нові дискретизовані моделі динамічних процесів, та дискретизовані моделі масопереносу, що базуються на принципах Лагранжа. Разом з використанням нових підходів та обчислювальних алгоритмів, були створені обчислювальні технології, що призначені для застосовування в комп'ютерних системах прогнозування та керування швидкоплинними процесами.

Створено лабораторний стенд та методологію лабораторних досліджень нових моделей нестаціонарних, циркуляційних течій в плоскому

криволінійному каналі з перешкодами в діапазоні чисел Рейнольдса $0 \le \mathrm{Re} \le 1.5 \cdot 10^4$. Лабораторна верифікація моделей надає можливість поширення застосування методу дискретних особливостей на нові класи прикладних задач.

Розроблено новий метод та алгоритми перетворення системи дискретних особливостей для коректного обчислення значень дискретизованих інтегральних представлень з сингулярними підінтегральними функціями.

Створено нові обчислювальні технології обрахунку локальних і розподілених кінематичних та динамічних характеристик течії з врахуванням деформації меж області та відривних структур. Також були розроблені дискретизовані моделі масопереносу та адвекції, які базуються на принципах Лагранжа. Розроблені обчислювальні технології призначені для застосування в моделюючих комп'ютерних системах інженерно-технологічного спрямування (проектно-конструкторських, інформаційно- аналітичних, підтримки прийняття рішень, забезпечення керування швидкоплинними процесами).

В першому розділі дисертації представлено огляд та аналіз існуючих актуальних питань і методів моделювання, визначено невирішені проблеми та нові задачі, які пов’язані зі створенням систем прогнозування швидкоплинних процесів.

Представлено огляд літератури та аналіз проблем розв’язування задач тривимірних вихрових в’язких течій нестисливої рідини. Зроблено огляд методів та методологій. Визначено їх переваги та недоліки. Розглянуто ряд інженерно прикладних напрямів в гагузі аерогідродинаміки, гідрології, метеорогогії, будивництва, машинобудивництва та енергетики, для яких математичне моделювання є основним інструментом для проведення досліджень та є необхідною складовою проектування, виготовлення та експлуатації об’єктів нової техніки. Розглянуто можливості, переваги та недоліки існуючих систем комп’ютерного моделювання. Розглянуто ряд застосувань математичного моделювання, які потребують використання спеціалізованих обчислювальних технологій для забезпечення спеціалізованих систем моделювання в реальному масштабі часу. Виділено спектр науково-прикладних напрямков, в рамках яких будут проводиться наукови дослідження. Окреслено круг технічних задач, для яких може бути застосовано методологічний підхід з побудови математичних моделей та обчислювальних технологій орієнтованих на моделювання аерогідродинамічних процесів та визначені перешкоди, які необхідно подолати для досягнення мети досліджень.

Визначено, що основною метою дисертаційної роботи повинно бути розв'язання науково-прикладної проблеми підвищення ефективності моделювання аерогідродинамічних процесів та систем шляхом урахування їх особливостей і спеціальних властивостей, створення технологій моделювання, придатних для застосування в комп'ютерних системах прогнозування та керування швидкоплинними процесами в реальному масштабі часу.

У другому розділі дисертації обґрунтовано систему розщеплення вихідної задачі на систему задач та представлено методологію побудови математичних моделей. Вихідна задача вважається поставленою, при визначені для рівнянь крайових та початкових умов. Але, значна кількість практично важливих задач залишается умовно коректною. Запропоновано методику постановки тривимірних задач про течію в шару паралельному площині, зведенням до двовимірної задачі щодо течій в шару з перешкодами. Застосовувати моделі в'язких вихрових течій в шару, паралельно площині. При розгляді циркуляційних течій паралельних площині щару, асимптотичний аналіз задач, та нових розв'язків показал, що в придельних випадках чисел Рейнольдса, нові розв'язкі асимптотично прямують, до класичних розв'язків. Для помірних чисел Рейнольдса поведено редукцію задачі масоперносу в плоскому шару, паралельно його площини, до задачі двовимірної адвекції. Показано, можливості врахування домінуючих впливів в задачах масопереносу. Розглянуто питання існування та єдність розв’язків задач. При побудові тривимірних моделей вихрових структур показана необхідність врахування їх із топологічних властивостей, що поширює можливості застосування моделей в традиційних задачах вихорової аерогідромеханіки та в галузь метеорології.

Третій розділ дисертації присвячено дискретизації моделей, методам обчислень та обчислювальним схемам та дискретизації інтегральних представлень.

Дискретизацію застосовано до моделей на основі сингулярних та гіперсингулярних інтегральних представлень та функцій,в методології обчислень яких використовано поняття головного значення по Коші та скінченного значення по Адамару. Розроблено вортонну модель для визначення динамічних впливів вітру на водноу поверхню. Дискретизовану модель додаткового (вітрового) впливу представляено у вигляді орієнтовної «хмари» вортонів. Дискретизацію моделей тривимірних вихорових та струменевих систем проведено з врахуванням іх топологічних властивостей.

В четвертому розділі представлено побудову методів та алгоритмів обчислювальних технологій моделювання вихрових (циркуляційних) течій і динамічних систем. Розроблено нову обчислювальну технологію яка містить: метод та алгоритми перетворення системи дискретних особливостей (для дискретизованих інтегральних представлень з розривними подінтегральними функціями; метод та алгоритми перетворення системи дискретних особливостей на деформовному рухомому контурі, для моделі з породженням нових елементів контуру; метод та алгоритми обчислень динамічних характеристик та функцій при застосуванні методу дискретних особливостей; метод обчислення похідних від значень функції в області та на її межі при застосуванні для моделей течії системи дискретних особливостей; алгоритм послідовного обрахунку локальних кінематичних та динамічних характеристик, що, в сукупності надає можливість визначати динамічні параметри процесів та явищ із вже існуючих розв'язків вихідної задачі. Обчислювальні технології суттєво поширюють можливості застосування методу сингулярних інтегральних рівнянь для технічних систем.

П'ятий розділ присвячено експериментальним методам, методиці та технології моделювання в'язких течій на лабораторному стенді з плоским каналом який має перешкоди та границі складної криволінійної форми. Крім того, у розділі представлені результати експериментальних досліджень. Результат лабораторних досліджень є підтвердженням коректності теоретичних припущень щодо існування циркуляційних режимів течії в тонкому щару між паралельними площинами при помірних числах Рейнольдса.

Шостий розділ присвячено комп'ютерному моделюванню динамічних систем та прогнозуванню наслідків аерогідродинамічних процесів. В розділі наведено результат застосування обчислювальних технологій в моделюючих програмних системах, призначених для проведення попередніх проектних та експертних досліджень в галузях будівельної аеродинаміки, в машинобудуванні, в гідротехніці, в галузі контролю екологічного стану акваторій та для досліджень тривимірних аергідродинамічних явищ та ефектів.

Компютерне моделювання аеродинамічних процесів навколо висотних споруд та конструкцій, моделювання зміни структури течії і гідрологічних процесів в акваторіях та погнозування процесу масопереносу поверхневого забруднення в акваторіях, а також компютерне моделювання з визначення миттевих аеродинамічних полів для вітроротору Дар'є із з керованою системою лопатей продемонстрували ефективність застосування обчислювальних технологій в комп'ютерних моделюючих системах для прогнозування швидкоплинних процесів та забезпечення керування в реальному масштабі часу. Нові моделі тривимірних вихрових структур надали для можливість компютерного моделювання ортогональних векторних полів (циркуляційних течій) для тривимірних моделей вихрових структур типу смерч/торнадо, для моделювання взаємодії вихрових структур та тривимірного струменю навколо несучої поверхні та для моделювання трансформації (інверсії) тривимірного струменю, що знайшло застосування в технічних системах та пристроях.

Реалізація запропонованої в дисертації методології побудови моделей та обчислювальних технологій дозволяє створювати системи комп'ютерного прогнозування, програмно-моделюючі системи інженерно-технологічного призначення (проектно-конструкторського застосування), які здатні підсилити прогнозування методом моделювання різноманітних процесів для застосування в системах реального часу.

Розроблені в дисертаційній роботі математичні моделі, методи, алгоритми, обчислювальні технології та методологічні підходи було впроваджено, що підтверджується відповідними актами:

Ключові слова: обчислювальні технології, метод сингулярних інтегральних рівнянь, дискретні особливості, моделювання аерогідродинамічних процесів.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

I. Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації

Монографії

1. Довгий С.А. Метод сингулярних интегральных уравнений и вычислительные технологи. / Довгий С. А., Лифанов И. К., Черний Д. И. – К.: «Юстон», – 2016. – 380 с.

2. Наконечний О.Г. Моделювання та аналіз глобальних біосферних процесів/ Наконечний О.Г., Трофимчук О. М., Трофимова І. В.,Черній Д. І. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2002. – 92 с.

3. Cherniy D. Interaction of Group of Bridge Piers on Scour. /Andrey Voskoboinick, Vladimir Voskoboinick, Vladimir Turick, Oleksandr Voskoboinyk, Dmytro Cherniy, and Lidia Tereshchenko/In book: Advances in Computer Science for Engineering and Education III, Volume 1247, Springer Nature Switzerland AG, ISSN 2194-5357 ISSN 2194-5365 (electronic) Advances in Intelligent Systems and Computing ISBN 978-3-030-55505-4 ISBN 978-3-030-55506-1 (eBook), pp.3-17., DOI: 10.1007/978-3-030-55506-1_1 , https://doi.org/10.1007/978-3-030-55506-1 http://www.springer.com/series/11156 (*Входить до наукометричної бази **Scopus***).

Статті у виданнях, індексованих у наукометричних базах базах

4. Dovgiy S. O. Algorithms of the Discrete Singularity Method for Computing Technologies/ Dovgiy S. O., Lyashko S. I., Cherniy D. I. // Cybernetics and Systems Analysis. – 2017. – Vol. 53, 6. – P. 950-962. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9997-4 (*Входить до наукометричної бази **Scopus***).

5. Kordas O. A study on mathematical short-term modelling of environmental pollutant transport by sea currents: The Lagrangian approach / O. Kordas, A. Gourjii, E. Nikiforovich, D. Cherniy // Journal of Environmental Accounting and Management. – 2017. – Vol. 5, Issue 2. –P. 87-104. (*Входить до наукометричної бази **Scopus***).

6. Cherniy D. An algorithm for finding similar objects in an image / Dmytro I. Cherniy, Yaroslav M. Linder, Volodymyr T. Matvienko, Volodymyr V. Pichkur // 2019 IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory. Conference Proceedings (IEEE ATIT 2019, 18.12.2019 – 20.12.2019, Kyiv, Ukraine). – Kyiv, 2019. – P. 365 – 368. (*Входить до наукометричної бази **Scopus***).

Статті в наукових фахових виданнях України

7. Voskoboinick V. A. The Modeling of Different Scale Hydrologic Processes in Aquatories / V.A. Voskoboinick, O. A. Voskoboinyk, D. I. Cherniy // J. Enviromental safety and natural resources. – 2019. – Vol. 29. – P. 87-97.

8. Черній Д.І. Метод побудови математичної моделі шаруватих течій // Екологічна безпека та природокористування, № 1 (33), 2020.- сс.115-130. (Cherniy D.I. Method of building a mathematical model of layered flows //J.Enviromental safety and natural resources.- №1(V.33), 2020.-pp.115-130.) http://es-journal.in.ua/.

9. Головенко А. Д. Вычислительные особенности нестационарных аэродинамических задач / Головенко А. Д., Голубев С. А., Черний Д. И. // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2011. – Вип. 1(104). – С. 24-39.

10. Войцеховський С. О. Моделювання динаміки торнадо / Войцеховський С. О., Гаркуша В. І., Черній Д. І. // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2004. – Вип. 2(91). – С. 81.

11. Гуржий А. А. Адаптированный метод дискретных особенностей к задаче адвекции пассивной примеси морскими течениями / Гуржий А. А., Черний Д. И. // Прикладная гидромеханика. – 2009. –Т. 11(83), №2. – С. 30-39.

12. Черній Д. І. Про похідні для інтегральних представлень / Черній Д.І. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. –2016. – Вип. 3. – С. 111-116. *https://doi.org/10.17721/1812-5409.*

13. Вітько В. П. Чисельне моделювання еколого-аераційної ситуації в масивах висотної міської забудови / Вітько В. П., Кондратенко О. В., Черній Д. І. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2002. – Вип. 2. – С. 272-277 *https://doi.org/10.17721/1812-5409* .

14. Войцеховський С. О. До задачі про динаміку торнадо / Войцеховський С. О., Гаркуша В. І., Черній Д. І. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2004. – Вип. 2. – С. 378-381. *https://doi.org/10.17721/1812-5409.*

15. Войцеховський С. О. Математична та інформаційна модель гідрологічних процесів / Войцеховський С. О., Гаркуша В. І., Витько В. П., Кондратенко О. В, Рябоконенко О. Д., Хорошилов О. В., Черній Д. І. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2004. – Вип. 4. – С. 276-282. *https://doi.org/10.17721/1812-5409.*

16. Зайцев О. В. Метод розв'язання прямої та оберненої крайових задач про невісесиметричне обтікання конічних тіл зі вдувом / Зайцев О. В., Хорошилов О. В., Черній Д. І.// Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія математика-механіка. – 2004. – Вип. 14. – С. 176-184.

17. Риженко А. І. Обґрунтування методу сіток для параболічних варіаційних нерівностей другого порядку з обмеженням у середені області / Риженко А. І., Саженюк В. С., Черній Д. І. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2006. – Вип. 3. – С. 245-249. *https://doi.org/10.17721/1812-5409.*

18. Мищенко В. В. Чисельне моделювання процесу шунтирування у плазмі / Мищенко В. В., Сандраков Г. В., Черній Д. І. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2006. – Вип. 3. – С. 235-239. *https://doi.org/10.17721/1812-5409.*

19. Гуржий А. А. Решение задачи о двухмерной адвекции пассивной примеси морскими течениями прогностическим методом / Гуржий А. А., Черний Д. И. // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2009. – Вип. 12. – С. 83-91.

20. Головенко А. Д. Моделирование аэродинамических полей при прогнозировании нестационарных аэрационных процессов в массивах разновысотной застройки / Головенко А. Д., Довгий С. А., Клименкова И. А., Черний Д. И. // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2010. – Вип. 13. – С. 37-46.

21. Гуржий А. А. Перемешивание пассивной жидкости в двумерных течениях со сложной геометрией ограничивающих поверхностей / Гуржий А. А., Кобзева Д. А., Черний Д. И. // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2011 . – Вип. 14. – С. 112-119.

22. Черний Д. И. Математическая модель течения в мелководной акватории/ Черний Д. И. // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2016. – Вип. 29. – С. 78-86.

23. Черний Д. И. Вычислительные технологии для метода дискретных особенностей в гидродинамике/ Черний Д. И. // Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2016. – Вип. 32. – С. 75-83.

24. Черний Д. И. Вычислительные технологии для метода дискретных вихрей / Черний Д. И.//Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія «Мате-матичне моделювання в техніці та технологіях». – 2016. – № 6 (1178). – С. 116-123.

25. Гуржий А. А. Применение метода дискретных особенностей при составлении краткосрочного прогноза распространения загрязнений на морской поверхности/ А. А. Гуржий, О. И. Кордас, Е. И. Никифорович, Д. И. Черний // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія

«Математичне моделювання в техніці та технологіях». –2019. – № 8 (1333). – С. 104-109.

26. Довгий С. А. Математическое моделирование пространственных струйных эффектов/ Довгий С. А., Фломбойм А. В., Черний Д. И. // Комп'ютерна математика. – 2016. – №1. – С. 27-35.

27. Васин П. А. Моделирование трехмерной вихревой структуры / Васин П. А., Черний Д. И. // Комп'ютерна математика. – 2018. –№1. – С. 9-16.

28. Голубєв С. О. Засоби комп'ютерного моделювання в галузі обчислювальної гідродинаміки / Голубєв С. О., Лебідь О. Г., Черній Д. І. // Математичне моделювання в економіці. – 2019. – №2. – С. 21-39.

III Наукові праці, які засвідчують і апробацію матерілів дисертації

29. Cherniy D.I. Topological aspects of the tornado problem / Cherniy D. I., Meleshko V. V., Dovgiy S. O. // 21-st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Abstract Book (August 15-21, 2004, Warsaw, Poland). – Warsaw, 2004. – P. 176.

30. Sandrakov G.V. Modeling of complex fluid dynamics with phase transitions / Sandrakov G. V., Cherniy D. I., Meleshko V. V. // Fluid Mechanics Conference. Abstracts. Volume 2 (EFMC6 KTH–EUROMECH, Royal Institute of Technology, Stockholm, June 26-30). – Stockholm, 2006. – P. 330. URL: http://www2.mech.kth.se/efmc6/web_vol1.pdf

31. Cherniy D. I. Topological Aspects of the Vortex Structure of Tornado / Cherniy D. I., Meleshko V. V., Dovgiy S. A. // IUTAM-Symposium «Hamiltonian dynamics. Vortex structure. Turbulence». Book of Abstracts (Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow, August 25-30, 2006). – Moscow, 2006. – P. 69-71.

32. Черний Д.И. О проблемах определения локальных и интегральных характеристик при решении начально-краевых задач с подвижными границами / Черний Д.И. // Сборник научных трудов XIII Международного симпозиума МДОЗМФ-2007. – Херсон, 2007, С.315-318.

33. Черний Д. И. Метод и алгоритм вычисления распределенных характеристик в начально-краевых гидродинамических задачах с подвижными границами при использовании МДО / Черний Д. И. // Сборник научных трудов XIII Международного симпозиума МДОЗМФ-2007. – Херсон, 2007, С.319-322.

34. Cherniy D. I. The vortex model of circulation flow in sea channel / Cherniy D. I. // IUTAM Symposium «150 Year of Vortex Dynamics». Proceedings (Technical University of Denmark, Oktober 12-16, 2008). – Copenhagen: Springer, 2008. – P. 5.

35. Фломбойм А. В. Вычислительные технологии моделирования эффекта «кроссовера» для затопленных струй / Фломбойм А. В., Черний Д. И. // III Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика», присвячена пам'яті академіка НАН України І. І. Ляшка. Матеріали конференції (Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 11-12 вересня 2009 р.). – Київ, 2009. – С. 67.

36. Cherniy D. Numerical simulation of impurity propagation in sea channels / D. Cherniy, S. Dovgiy, A. Gourjii // Bulletin of the American Physical Society. 62-nd Annual Meeting of the APS division of Fluid Dynamics (Minneapolis, Minnesota, USA, November 22-24, 2009). – Vol. 54, 19. – P. 149. URL: http://meetings.aps.org/Meeting/DFD09/Session/HT.10.

37. Meleshko V. V. The circulation model of vortex flow of a viscid wall layer / Vyacheslav V. Meleshko, Dmytro I. Cherniy, Stanislav A. Dovgiy // 3rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Abstract Book (23-rd ICTAM 2012, Beijing, China, August 19-24, 2012). – Beijing, 2012. – P. 101.

38. Okhremenko A. E. Mobile systems for forecasting and decision support information / Okhremenko A. E., Stepanov O. V., Cherniy D. I. // XX International Conference «Problems of Decision Making Under Uncertainties». Abstracts (PDMU-2012, September 17-21, 2012, Brno, Czech Republic). – Kyiv, 2012. – P. 94-96.

39. Cherniy D. The Vortex Model of a Viscid Wall's Layer / Cherniy D., Dovgiy S., Meleshko V. // IUTAM Symposium on ”Vortex Dynamics: Formations, Structure and Function”. Abstract Book (March 10-14 , 2013, Centennial Hall, Kyushu University School of Medicine, Fukuoka, Japan). – 2013. – P. 126-127.

40. Cherniy D. One of Partial Solutions of the Navier-Stokes / Cherniy D. // XXIV International Conference «Problems of Decision Making under Uncertainties». Abstracts (PDMU-2014, September 1-5, 2014, Cesky Rudoles, Czech Republic). – Kyiv, 2014. – P. 29-30.

41. Cherniy D. One Case of the Analytical Solution of the Navier-Stokes Equation/ Cherniy D. // XVII International Conference “Dynamical System Modelling and Stability Investigation”. Abstracts of Conference Reports (DSMSI-2015, May 27-29, 2015, Kiev, Ukraine). – Kyiv, 2015. – P. 87.

42. Cherniy D. Computing technologies of the discrete singularities method/ Cherniy D. // XXVII International Conference “Problems of Decision Making under Uncertainties”. Abstracts (PDMU-2016, May 23-27, 2016, Tbilisi-Batumi, Georgia). – Kyiv, 2016. – P. 35-36.

43. Cherniy D. On a Model of Viscous Flow/ Cherniy D. // XXVIII International Conference «Problems of Decision Making under Uncertainties». Abstracts (PDMU-2016, August 25-35, 2016, Brno, Czech Republic). – Kyiv, 2016. – P. 132-133.

44. Cherniy D. The Transformation to Discrete Singularities/ Cherniy D. // XXIX International Conference «Problems of Decision Making under Uncertainties». Abstracts (PDMU-2017, May 10-13, 2017, Mukachevo, Ukraine). – Kyiv, 2016. – P. 30–31.

45. Гуржий А. А. Моделирование распространения загрязнения на морской поверхности / Гуржий А. А., Никифорович Е. И., Кордас О. И., Черний Д. И. // V Міжнародна науково-практична конференція «Комп'ютерна гідромеханіка». (Інститут гідромеханіки НАН України, 29-30 вересня 2016, Київ). – Київ, 2016. – С. 25-26.

46. Черний Д. И. Экспериментальное и математическое моделирование слоистых течений в плоском канале / Черний Д. И., Воскобойник А. А., Воскобойник В. А. //V Міжнародна науково-практична конференція «Комп'ютерна гідромеханіка». (Інститут гідромеханіки НАН України, 29-30 вересня 2016, Київ). – Київ, 2016. – С. 68-69.

47. Cherniy D. The Transformation to Discrete Singularities / Cherniy D. // XXX International Conference «Problems of Decision Making under Uncertainties» dedicated to 80-th anniversary of Professor Yurii Yermoliev. Abstracts (PDMU-2017, August, 14-19, 2017, Vilnius, Lithuania). – Kyiv, 2017. – P. 32-33.

48. Cherniy D. Transformation of discrete singularities in the numerical method for singular equations / Cherniy D., Dovgiy S. // International Conference «Ukrainian Conference on Applied mathematics» dedicated to the 100th birth anniversary of professor Olexander Kostovskiy. Proceeding (UCAM-2017, 28-30, September, 2017, Lviv, Ukraine). – Lviv: PAIS, 2017. – P. 31-33.

49. Черний Д. И. Моделирование течений в акватории Керченского пролива / Черний Д. И., Довгий С. А. // Колективна монографія за матеріалами 16-ї Міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях» (Київ, Пуща-Водиця, 3-6 жовтня 2017р.). – Київ: «Юстон», 2017. – С. 18-21.

50. Довгий С. А. Алгоритмы метода дискретных особенностей и вычислительные технологии / Довгий С. А., Черний Д. И. // Труды XVIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2017, 26-28 июня 2017, Харьков, Украина). – Харьков, 2017. – С. 86-91.

51. Гуржий А. А. Адаптация метода дискретных особенностей к задачам переноса поверхностных загрязнений морскими течениями / Гуржий А. А., Черний Д. И., Процан В. В. // Труды XVIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»

(МДОЗМФ-2017, 26-28 июня 2017, Харьков, Украина). – Харьков, 2017. – С. 82-85.

52. Cherniy D. Development Wake Behind of a Moving Grid and Computational Technologies / Cherniy D., Dovgiy S. // the 7th Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations. Proceedings (BBVIV-7, Carry-le-Rouet (Marseille), France, 3-6 July, 2018). – P. 79-80.

53. Golubiev S. The Structure of a Vortex Wake Behind Vertical Wind Turbines as a Criterion for the Efficiency / Golubiev S., Dovgiy S., Lebid O., Cherniy D. // the 7th Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations. Proceedings (BBVIV-7, Carry-le-Rouet (Marseille), France, 3-6 July, 2018). – P. 163-165.

54. Cherniy D. Methods of geodynamic processes simulation as a means of forecasting in decision support systems / Cherniy D., Trofymchuk O. // XXXI International Conference «Problems of Decision Making under Uncertainties». Abstracts (PDMU-2018, 3-6 July 2018, Baku-Lenkoran, Azerbaijan). – Kyiv, 2018. – P. 79-80.

55. Гаркуша В. І. Квадратурно-різнецеві схеми для задачі Коші з гіперсингулярним інтегралом в правої частині / Гаркуша В. І., Ляшко С. І., Риженко А. І., Черній Д. І. // VIII Міжнарнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта». Тези доповідей (Луцьк-Світязь, 2-4 червня, 2019). – Луцьк, 2019. – С. 19.

56. Гуржий А. А. Моделирование особенностей процесса распространения поверхностных загрязнений в речных системах / Гуржий А. А, Кордас О. И., Никифорович Е. И., Осадчий В. И., Черний Д. И. // V International Scientific Conference «Modern Problems of Mechanics». Abstracts (28-30.08.2019, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Abstracts, Kyiv, Ukraine). – Kyiv, 2019. – P. 28.

57. Довгий С. О. Метод дискретних особливостей в задачах математичної фізики і механіки / Довгий С. О., Черній Д. І. // V International Scientific Conference «Modern Problems of Mechanics». Abstracts (28-30.08.2019, Taras

Shevchenko National University of Kyiv, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Abstracts, Kyiv, Ukraine). – Kyiv, 2019. – P. 32.

58. Cherniy D. Numerical methods for the Cauchy problem with hypersingular integral on the right side. / Cherniy D., Voloshchuk S. // XXXV International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties". Abstracts (PDMU-2020, 11-15 May 2018, Baku-Sheki, Azerbaijan). – Kyiv, 2020. – P. 30-31.

Праці, які додатково відображають наукові результати дисертації

59. Черній Д. І. Програмна система для дослідження аерогідродинамічних процесів/ Черній Д. І., Гаркуша В. І., Рижинко А. І., Кашпур О. Ф. Наукові розробки Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Частина 1. Природничі науки. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2009. – С. 137.

SUMMARY

Cherniy D.I. Methodology and computational technologies for modeling aerohydrodynamic process. – Manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences in the specialty 01.05.02 – "Mathematical modeling and computational methods." – Institute of Telecommunications and Global Information Space NAS of Ukraine, Kyiv, 2021.

In the dissertation work, the actual scientific and applied problem of increasing the efficiency of mathematical and computer modeling in forecasting systems and providing real-time control of fast-flowing processes is solved. Increasing the efficiency of modeling is achieved through the methodology of constructing models based on singular integrals, which take into account only the main dominant factors of phenomena and processes, through the use of improved

discretized models, new methods, computational algorithms and computational technologies suitable for use in predictive systems and in decision support systems in real time.

The use of the method of singular integral equations for constructing models of dynamic processes, constructing discretized models of mass transfer, based on Lagrangian principles of observation and adapted for use with computational algorithms, makes it possible to create effective computational technologies intended for use in computer systems for forecasting and controlling fast-flowing processes in real time.

A laboratory stand and a methodology for laboratory studies of unsteady circulation flows in a plane curved channel with obstacles in the range of Reynolds numbers have been developed $0 \leq \mathrm{Re} \leq 1.5 \cdot 10^4$. Laboratory verification of models makes it possible to extend the applicability of the discrete singularity method to new classes of applied problems.

A new method and algorithms for transforming a system of discrete singularities have been developed for the correct calculation of values of discretized integral representations with singular integrand functions.

New computational technologies have been created, in which methods and algorithms for transforming a system of discrete features are applicable, a method and algorithms for calculating local and distributed dynamic characteristics and actions, at arbitrary points of the flow region, in which the deformation and motion of the boundaries of the region are taken into account, together with separation phenomena, as well as discretized models of mass transfer and advection based on Lagrangian observation principles. Computing technologies are intended for use in modeling computer systems of engineering and technological specialization (design, information and analytical systems for decision support and control of fast-flowing processes):

– to carry out pre-design studies in high-rise construction, to determine aerodynamic effects on structures and structures, to identify manifestations of aerodynamic interference, to zonate territories according to the level of comfort;

– to carry out pre-design studies in hydraulic engineering, to determine the hydrodynamic effects on hydraulic structures and structures in sea areas, to identify areas with increased intensity of hydrological processes;

– for systems for predicting hazardous hydroecological consequences of possible accidents and disasters in sea water areas and water areas of straits, in order to ensure real-time control of emergency response and threat prevention means;

– when conducting research to identify modes of effective functioning of new designs of rotors in wind / hydropower.

A new mathematical model of a three-dimensional vortex structure has been developed, which has its own topological characteristics – nodes and links that affect its stability. The model is suitable for investigating meteorological phenomena such as tornado / tornado. Using the method of computer simulation, the emergence of the effect of the inversion of the jet, which flows from the confuser with a given shape of the hole, is revealed. The conditions for the occurrence of inversion in jets are determined. A catalog of jet inversion for confusers has been created, with a set of holes of arbitrary shape.

The first section of the dissertation presents an overview and analysis of existing current issues and methods of modeling, identifies unresolved issues and new challenges associated with the creation of systems for predicting transient processes. A review of the literature and analysis of the problems of solving problems of three-dimensional vortex viscous flows of incompressible fluid is presented. An overview of methods and methodologies. Their advantages and disadvantages are identified. A number of engineering applications in the field of aerohydrodynamics, hydrology, meteorology, construction, mechanical engineering and energy are considered, for which mathematical modeling is the main tool for research and is a necessary component of design, manufacture and operation of new equipment. The possibilities, advantages and disadvantages of existing computer modeling systems are considered. A number of applications of mathematical modeling are considered, which require the use of specialized computing technologies to provide specialized real-time modeling systems. The range of scientific and applied directions within which scientific researches will be carried out is allocated. The range of technical problems for which a methodological approach to the construction of mathematical models and computational technologies focused on modeling aerohydrodynamic processes can be applied and the obstacles that need to be overcome to achieve the goal of research. It is determined that the main purpose of the dissertation should be to solve the scientific and applied problem of improving the efficiency of modeling of aerohydrodynamic processes and systems by taking into account their features and special properties, creating modeling technologies suitable for use in computer systems for real-time forecasting and control.

In the second section of the dissertation the system of splitting of the initial problem into the system of problems is substantiated and the methodology of construction of mathematical models is presented. The initial problem is considered to be set, when defined for the of equations boundary and initial conditions. However, a significant number of practically important tasks remain relatively correct. The method of setting three-dimensional problems about flow in a layer parallel to the plane, reduction to a two-dimensional problem about flows in a layer with obstacles is proposed. Apply models of viscous vortex flows in a layer parallel to the plane. When considering circulating flows is parallel to the plane of the layer, asymptotic analysis of problems and new solutions showed that in the case of medl Reynolds numbers, the new solutions asymptotically go to the classical solutions. For moderate Reynolds numbers, the reduction of the mass transfer problem in a flat layer, parallel to its plane, to the problem of two-dimensional advection is carried out. Possibilities of taking into account the dominant influences in mass transfer problems are shown. The existence and unity of solutions of problems are considered. When constructing three-dimensional models of vortex structures, the need to take them into account in terms of topological properties is shown, which expands the possibilities of applying the models in traditional problems of vortex aerohydromechanics and in the field of meteorology.

The third section of the dissertation is devoted to the sampling of models, computational methods and computational schemes and the sampling of integrated representations. Sampling is applied to models based on singular and hypersingular integral representations and functions, in the calculation methodology of which the notion of the principal value according to Cauchy and the finite value according to Hadamard is used. The discretized model of additional (wind) influence is presented in the form of an approximate "cloud" of wortons. Sampling of models of three-dimensional vortex and jet systems is carried out taking into account their topological properties.

The fourth section presents the construction of methods and algorithms for computational technologies for modeling vortex (circulating) flows and dynamic systems. A new computational technology has been developed which contains: method and algorithms for transforming a system of discrete features (for discretized integral representations with discontinuous subintegral functions; method and algorithms for transforming a system of discrete features on a deformable moving contour, for a model with new contour elements; method and algorithm and functions when using the method of discrete features, the method of calculating derivatives of the values of the function in the region and at its boundary when used for flow models of the system of discrete features, algorithm for sequential calculation of local kinematic and dynamic characteristics, which together allows to determine dynamic parameters of processes and phenomena from the already existing solutions of the initial problem.Computing technologies significantly expand the possibilities of applying the method of singular integral equations for technical systems.

The fifth section of the dissertation is devoted to experimental methods, techniques and technologies for modeling viscous flows on a laboratory stand with a flat channel that has obstacles and boundaries of complex curvilinear shape. In addition, the section presents the results of experimental studies. The result of laboratory studies is a confirmation of the correctness of theoretical assumptions about the existence of circulating flow regimes in a thin layer between parallel planes at moderate Reynolds numbers.

The sixth section of the dissertation is devoted to computer modeling of dynamic systems and forecasting the consequences of aerohydrodynamic processes. The section presents the results of computer technology application in modeling software systems designed for preliminary design and expert research in the fields of construction aerodynamics, mechanical engineering, hydraulic engineering, environmental control and research of three-dimensional aerodynamic phenomena and effects. Computer modeling of aerodynamic processes around high-rise buildings and structures, modeling of changes in flow structure and hydrological processes in water areas and forecasting of mass transfer of surface pollution in water areas, as well as computer modeling to determine instantaneous aerodynamic fields for wind rotor by Darius system computing technologies in computer modeling systems for predicting transient processes and providing real-time control. New models of three-dimensional vortex structures provided for the possibility of computer modeling of orthogonal vector fields (circulating currents) for three-dimensional models of vortex structures such as tornado , for modeling the interaction of vortex structures and three-dimensional jet near the bearing surface and for modeling transformation (jet inversion) application in technical systems and devices.

The implementation of the proposed in the dissertation methodology for building models and computing technologies allows you to create computer forecasting systems, software and modeling systems of engineering and technological purposes (design and application), which can enhance forecasting by modeling various processes for use in real time. The mathematical models, methods, algorithms, computational technologies and methodological approaches developed in the dissertation were implemented, which is confirmed by the relevant acts.

***Keywords*:** computational technologies, method of singular integral equations, discrete singularitys, modeling of aerohydrodynamic processes.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

МДО – метод дискретних особливостей

D^+ - область двовимірної течії

$\vec{V}_\infty$ - швидкість набігаючого потоку, характерна швидкість

$\vec{\omega}$ - кутова швидкість обертання ротору

P_∞ - тиск поза збуреною областю течії

ρ - щільність середовища (щільність повітря)

$\varphi(x, y, t)$ - потенціал течії

$\vec{V}(x, y, t)$ - швидкість течії

$\vec{W}(x, y, t)$ - швидкість руху точки контуру

$\Phi(z, t)$ - комплексний потенціал течії

$\overline{V}(z, t)$ - комплексно спряжена швидкість

$\overline{W}(z, t)$ - комплексно спряжена швидкість точки рухомого контуру

L_d - детермінована границя - обтічний контур

L_v - вільна границя - контур розриву дотичній складовій швидкості

ω - точка граничного контуру (в комплексним представлені)

$\vec{\omega}$ - кутова швидкість обертання ротору навколо вертикальної вісі

$\vec{n} = (n_x, n_y)$ - нормаль до граничного контуру

$W_n^* = (\vec{\omega} \times \vec{R}(t))_n$ - проекція на нормаль $\vec{n}$ до крила $L_d(t)$ векторного здобутку швидкості $\vec{\omega}$ (його обертання навколо вісі) на вектор $\vec{R}(t)$ (відстань від вісі обертання до точці на $L_d(t)$)

p^+, p^- - граничні значення тиску по різні сторони від контуру

$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^+, \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^-$ - граничні значення нормальної похідної по різні сторони від контуру

$C_p = 2\frac{(p - p_\infty)}{\rho V_\infty^2}$ - коефіцієнт тиску (безрозмірна величина)

$\rho\frac{V_\infty^2}{2}$ - динамічний напір

C_x - коефіцієнт опору (безрозмірна величина)

C_y - коефіцієнт підйомної (поперечної) сили (безрозмірна величина)

$L_м$ - характерний розмір моделі

$L_н$ - характерний розмір натури

S_0 - характерна площа

δ_k^p -інтенсивність k-ї дискретной особликості(вихору) на k-м елементі p-ї границі L_k^p

$\dot{\delta}_k^p = \frac{d}{dt}\delta_k^p$ -інтенсивність похідной k-ї дискретной особликості на вільной границі L_k^p

D_p - інтенсивність p-го діполю

T - характерний час

a_0 - характерна ширина конструкції

b_0 - довжина конструкції

h – характерна глибина каналу

D - міделева ширина конструкції (перпендикулярно набігаючому потоку)

$\mathrm{Re}_h = \frac{hV}{\upsilon}$ – число Рейнольдса по товщині каналу h

$\mathrm{Re}_D = \frac{DV}{\upsilon}$ – число Рейнольдса, по характерному розміру-міделевої ширині D

$Sh_м = \frac{L_м}{V_м T_м}$ – число Струхаля модельне

$Sh_н = \frac{L_н}{V_н T_н}$ – число Струхаля натурне

ВСТУП

Сьогоденні вимоги до безпеки технологічних процесів, підтримки високого рівня надійності та стійкості споруд, забезпечення контролю за станом навколишнього середовища потребують високого рівня проектних робіт, передбачення імовірних загроз, прогнозування розвитку небажаних або небезпечних процесів з можливістю вчасного реагування на них з метою запобігання виникненню надзвичайних ситуацій. Все більш важливим стає запобіжне реагування (активний вплив) на розвиток процесів, що почалися в результаті природних катастроф або техногенних аварій, задля зменшення або послаблення їх шкідливих наслідків.

З розвитком обчислювальної техніки математичне моделювання стає одним з основних інструментів прогнозування швидкоплинних процесів. Так, при виникненні метеорологічних та гідрологічних катаклізмів, надзвичайних ситуацій на підприємствах, що сталися внаслідок техногенних або природних катастроф, з викидом забруднюючих речовин в повітря або водне середовище, саме прогнозування їх розповсюдження під впливом різноманітних факторів стає основною задачею для вчасного визначення сценаріїв ефективного запобігання небезпечному впливу. Потреба в обчислювальних технологіях, здатних забезпечувати моделювання динамічних процесів та виявлення критичних впливів у масштабі реального часу, визначається гострою необхідністю їх застосування в моделюючих системах, призначених для виявлення загроз небезпечних аварій і катастроф та прогнозування їх наслідків. Ці технології призначені для систем оперативного прогнозування, інформаційного забезпечення систем підтримки прийняття рішень та управління швидкоплинними процесами. Все це робить тему досліджень надзвичайно **актуальною.**

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Основна частина наукової роботи за тематикою дисертації виконувались в рамках досліджень, які проводились в Інституті телекомунікацій і глобального інформаційного простору Національної академії наук України (ІТГІП НАНУ), при виконанні наукових досліджень за темами:

– «Розробка програмно-моделюючої системи для дослідження нестаціонарних нелінійних аераційних процесів та експертизи стійкості і динаміки конструкцій та споруд під аерогідродинамічним впливом в системах підтримки прийняття інженерних рішень» (2007-2009рр., номер Державної реєстрації теми 0107U000563);

– «Розробка математичних моделей, методів та алгоритмів для програмно-моделюючих систем інженерно-технологічного призначення» (2010-2012рр., номер Державної реєстрації теми 0110U002719);

– «Розробка обчислювальних технологій моделювання нестаціонарних фізичних процесів» (2013-2015рр., номер Державної реєстрації теми 0112U007538);

– «Розробка обчислювальних технологій та методів моделювання для дослідження нестаціонарних процесів» (2016-2020рр., номер Державної реєстрації теми 0116U000793).

Об'єкт досліджень – гідроаеродинамічні процеси, вихорові та циркуляційні течії, відривні ефекти режимів обтікання, струменеві явища.

Предмет досліджень – методи моделювання гідродинамічних процесів та систем, нелінійні нестаціонарні моделі, обчислювальні алгоритми та обчислювальні технології комп'ютерного моделювання.

Мета і завдання дослідження

Основною метою дисертаційної роботи є розв'язання науково-прикладної проблеми підвищення ефективності моделювання аерогідродинамічних процесів та систем шляхом урахування їх особливостей і спеціальних властивостей, створення технологій моделювання, придатних для застосування в комп'ютерних системах прогнозування та керування швидкоплинними процесами в реальному масштабі часу.

Для досягнення поставленої мети в роботі необхідно вирішити наступні завдання:

1. Розробити методологію побудови обчислювальних технології моделювання, придатних для застосування в комп'ютерних системах online прогнозування, інформаційної підтримки прийняття рішень та забезпечення керування швидкоплинними процесами;

2. Розробити математичні моделі течій, з врахуванням в'язких, тривимірних та відривних ефектів, які придатні для використання в обчислювальних технологіях моделювання швидкоплинних аерогідродинамічних процесів в реальному масштабі часу.

3. Розробити методи та алгоритми обчислень кінематичних та динамічних характеристик аерогідродинамічного процесу, які придатні для моделювання швидкоплинних аерогідродинамічних змін в реальному масштабі часу;

4. Побудувати обчислювальну технологію призначену для застосування в комп'ютерних системах моделювання та забезпечення прогнозування швидкоплинних аерогідродинамічних процесів в реальному масштабі часу.

Методи досліджень. В роботі використовувались методи математичного аналізу та математичної фізики, обчислювальні методи, а також методи теорії розмірностей та лабораторного моделювання.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи полягає в тому, що в ній

– ***вперше***:

1) розроблено методологію побудови обчислювальних технологій, здатних забезпечити моделювання за умов реального часу, призначених для

застосування в комп’ютерних системах експрес-прогнозування швидкоплинних аерогідродинамічних процесів;

2) запропоновано нову методологію опису циркуляційної течії та процесів масопереносу у шарі скінченної товщини навколо перешкод, яка базується на зрощуванні розв’язків теорії потенціалу з розв’язками теорії в’язкого шару скінченої товщини та застосуванні підходу Лагранжа при побудові математичних моделей адвекції поверхневих забруднень в акваторіях;

3) розроблено обчислювальну технологію, що базується на дискретизованих моделях сингулярних та гіперсингулярних інтегральних представлень, методах та алгоритмах перетворення систем дискретних особливостей, яка надає можливість визначати за умов реального часу динамічні параметри аерогідродинамічних процесів та явищ.

4) створено новий метод та алгоритм перетворення системи дискретних особливостей для коректного обчислення значень характеристичних функцій математичних моделей, які засновані на сингулярних та гіперсингулярних інтегральних представленнях. Перетворення системи дискретних особливостей є основою нового методу визначення значень локальних та розподілених динамічних характеристик процесу, що обираються із вже існуючих розв’язків вихідної кінематичної задачі, що надає можливість явного визначення впливів рухомості та деформовності границь, нестаціонарності течії, відриву та вихороутворення.

– ***удосконалено:***

1) метод дискретних замкнених вихорових елементів для створення моделей тривимірних циркуляційних течій, що виникають під впливом багатозв’язних вихрових структур. Розроблено моделі, із застосуванням яких встановлено особливості взаємодії струменевих течій з граничною поверхнею та виявлено умови виникнення ефекту інверсії струменю при заданій формі отвору;

2) модель Лагранжа відносно розповсюдження забруднень на водній поверхні, яка базується на методах розв’язування задач адвекції. В моделі враховано умови гладкості границь області та мінливість впливів зовнішніх факторів (вітру, нагонних течій) на формування домінуючих течій. На цій основі продемонстровано, як забезпечення умов гладкості меж області впливає на коректність обчислювальної задачі;

– ***набули подальшого розвитку:***

1) топологічний підхід до побудови дискретизованих моделей тривимірних вихорових течій з розривами полів швидкостей, як узагальнення методу дискретних вихорних елементів;

2) метод дискретних особливостей, з виявленням нових властивості для його застосування в системах експрес-прогнозування швидкоплинних аерогідродина-мічних процесів;

3) методологія гідродинамічних досліджень, тестування та верифікації моделей нестаціонарних течій на лабораторному стенді з плоским каналом скінченої товщини, з перешкодами та межами довільної форми.

Достовірність наукових положень дисертації забезпечується: коректною постановкою математичних задач, застосуванням класичних методів аналізу, використанням верифікованих математичних моделей, контрольованою точністю обчислювальних методів, повторюваністю обчислювального та лабораторного експерименту, узгодженістю між собою аналітичних, чисельних та експериментальних результатів, які були отримані у процесі досліджень, несуперечливістю результатів дисертаційних досліджень відносно результатів інших авторів, які працювали над даною темою.

Наукове значення роботи. Результати роботи мають наукове значення для розвитку теорії математичного моделювання, для створення нових нелінійних моделей та обчислювальних технологій, з використанням методів дискретизації сингулярних інтегралів та алгоритмів перетворення систем дискретних особливостей, для досліджень процесів в гідроаеродинаміці.

Практичне значення одержаних результатів. Реалізація запропонованої в дисертації методології побудови моделей та обчислювальних технологій дозволяє створювати системи комп'ютерного прогнозування, програмно-моделюючі системи інженерно-технологічного призначення (проектно-конструкторського застосування), які здатні підсилити прогнозування методом моделювання різноманітних процесів для застосування в системах реального часу.

Розроблені в дисертаційній роботі математичні моделі, методи, алгоритми, обчислювальні технології та методологічні підходи було впроваджено, що підтверджується відповідними актами:

1) в Українському інституті сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського, при проведенні проектно-конструкторських робіт з розробки висотних конструкцій;

2) в ДП «Київський науково-дослідний інститут гідроприладів», для забезпечення проведення дослідних та проектно-конструкторських робіт зі створення гідроакустичних систем;

3) в «Актюбінському науково-дослідному геологогорозвідувальному нафтовому інституті» (Республіка Казахстан), при розробці «Програмної системи прогнозування еколого-аераційних процесів»;

4) на факультеті кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, при розробці навчальних програм та формуванні нормативних курсів;

5) в Університеті ім. К. Жубанова (Республіка Казахстан), при розробці лекційних курсів з інформаційних технологій;

6) в Київському науково-дослідному інституті судових експертиз Міністерства Юстиції України, для інформаційного забезпечення практичної діяльності;

7) в Національному авіаційному університеті України, для дослідження нестаціонарних аеродинамічних процесів в будівельних комплексах щільної забудови.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. Аналітичні результати, розробка моделей, методів, обчислювальних алгоритмів та обчислювальних технологій, розробка конструкції лабораторного стенду та методології досліджень, належать автору. Всі положення, які виносяться на захист, належать особисто автору.

У роботах опублікованих у співавторстві, постановка задач, експериментальні дослідження, обробка даних та обговорення результатів виконувались із залученням співавторів.

Апробація результатів дисертації. Положення та результати дисертаційної роботи доповідалися й обговорювалися на 2-х конгресах та на 39 конференціях та симпозіумах, які мають міжнародний статус, зокрема:

– 21-st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (21-st ICTAM, 2004, Warsaw);

– 23-rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (23-rd ICTAM, 2012, Beijing, China);

– IUTAM-Symposium «Hamiltonian dynamics. Vortex structure. Turbulence» (Moscow, 2006);

– IUTAM Symposium «150 Year of Vortex Dynamics» (Lyngby & Copenhagen, Denmark, 2008);

– IUTAM Symposium on «Vortex Dynamics: Formations, Structure and Function» (Fukuoka, Japan, 2013);

– International Symposium «Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics/Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (XII-XIX DSMMPh/МДОЗМФ, Ukraine, – 2005, 2007, 2009, 2011, 2013, 2017, 2019);

– Fluid Mechanics Conference 6 (EFMC6 KTH–EUROMECH, Stockholm, 2006);

– 62-nd Annual Meeting of the APS division of Fluid Dynamics (Minneapolis, Minnesota, USA, 2009);

– 7th Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations (BBVIV-7), (Carry-le-Rouet, Marseille, France, 2018);

– International Conference «PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES» (PDMU-2008 Crimea, Ukraine; PDMU-2009, Skhidnytsia, Ukraine; V PDMU-2010, Lviv,Ukraine; XVI PDMU-2010, Yalta,Ukraine; PDMU-2011, Skhidnytsia, Ukraine; XII PDMU-2012, Brno, Czech Republic; XXIV PDMU-2014, Cesky Rudoles, Czech Republic; XXVII PDMU-2016,Tbilisi-Batumi, Georgia; XXVIII PDMU-2016, Brno, Czech Republic; XXIX PDMU-2017, Mukachevo, Ukraine; XXX PDMU-2017, Vilius, Lithuania; XXXI PDMU-2018, Baku-Lenkoran, Azerbajan; XXXV PDMU-2020, Baku-Sheki, Azerbajan);

– International Conference «DYNAMICAL SYSTEM MODELLING and STABILITY INVESTIGATION» (XVII DSMSI-2015, Kyiv, Ukraine;

– III Міжнародна конференція імені академіка І. І. Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика», Київ, 2009р.;

– International Conference «Ukrainian Conference on Applied mathematics» dedicated to the 100th birth anniversary of professor Olexander Kostovskiy (UCAM-2017), Lviv, Ukraine;

– I,V Міжнародна науково-практична конференція «Комп’ютерна гідромеханіка», Інститут гідромеханіки НАН України (Київ, 2008р, 2016р.);

– X,XI,XVI Міжнародна науково-практична конференція: «Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях», (Київ, Україна, 2011р., 2012р., 2016р.;

– 2019 IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory ATIT/Kyiv/ (IEEE ATIT 2019, Ukraine);

– VIII Міжнарнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», Луцьк-Світязь, 2019;

– V International Scientific Conference «Modern Problems of Mechanics»-Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine, 2019;

– V, VI Міжнародна науково–технічна конференція «Нові технології в будівництві. Надійність та безпека висотних будинків і споруд», Київ,2009р., 2010р.

Робота та її складові частини доповідалась на семінарах в Інституті телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАНУ, в Інституті гідромеханіки НАНУ, на семінарі кафедри математичної фізики механіко-математичного факультету та на семінарах кафедри обчислювальної математики та кафедри моделювання складних систем факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Публікації. Результати дисертації опубліковано у 59 роботах: в окремих главах монографії [1,2,3] (зі співавторами), 25 статтях (у тому числі в фахових вітчизняних та зарубіжних виданнях 25 [3-27], із яких – 5 [8 12, 22, 23, 24] без співавторів), з опублікованих робіт 4 [3, 4, 5, 6] індексовані у базі Scopus та Web of Science, 20 [7- 28] статті у виданнях, які входять до інших міжнародних наукометричних баз. З опублікованих за дисертацією робіт налічується 30 робіт в збірниках наукових праць і тезах міжнародних конгресів, симпозіумів та конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел, двох додатків. Робота включає 302 сторінок основного тексту, 157 рисунків, 6 таблиць, 300 використаних джерел.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ТА АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМ МОДЕЛЮВАННЯ

1.1 Огляд літератури та аналіз проблем розв’язування задач тривимірних вихрових в’язких течій. Огляд методів. Переваги та недоліки

Основні важливі положення, які пов’язані з темою дисертаційних досліджень та підходами до розв’язання задач динаміки рідини та динаміки вихрових структур, доволі повно представлені в монографіях В.І. Арнольда [3,4], С.М. Білоцерківского [14,15], А.Я. Бомби [25,26], Г.М. Вайникко [42], Ю.В. Ганделя [68], О.Г. Гомана [89], Д.М. Горелова [95], В.О. Горбаня [92], В.Т. Грінченка [98,99], С.О. Довгого [126,127], І.К. Ліфанова [14,15], І.І. Ляшка [120,176], І.А. Луковського [174], В.В. Мелешка [183], О.Г. Наконечного [191], М.І. Нішта [15], Л.Н. Полтавського [42], І.В. Сергієнка [210], В.В. Скопецького [213], І.Т. Селезова [209], О.М. Трофимчука [137].

Поглиблення досліджень у різних галузях гідродинаміки призвело до формування наукових напрямків та наукових шкіл, які відрізняються спеціальними підходами та методами розв’язування задач, у тому числі, з врахуванням в’язкості. Можливості застосування спеціальних підходів, представлено в роботах І.О. Бровченка [13, 38, 39], В.А. Ваніна [46-52], Г.О. Воропаєва [61-65], В.О. Горбаня [93,95], О.А. Гуржія [104,111], М.Г. Железняка [13], О.І. Жданова, С.О. Іщенка [149], С.І. Ляшка [283-285], Т.С. Краснопольської [159], В.С. Мадерича [177-179, 297], В.О. Міщенка [187, 214], Є.І. Никифоровича [111], А.В. Сетухи [119, 211, 212], О.Г. Стеценка [179], Е.В. Терлецької [178, 286], О.А. Приходько[197-199].

Доцільно окремо відмітити методи та топологічні підходи до побудови моделей вихрових структур, які були запропоновані в роботах В.А. Арнольда [4], H.K. Moffatt [289-291, 294], Ю.П. Ладікова-Роєва [164], G.J.F. van Heijst [279], P.G. Saffman [295] та отримали розвиток для розв'язування задач динаміки в роботах H.K. Aref [278, 288], Е.Ю. Баннікової [7-10], П.О. Васіна [54], С.О. Довгого [268], В.М. Канторовича [270], T. Kambe [280], F. Nakamura [280], С.А. Полтавского [42] , О.А. Гуржія [300], G.M. Zaslavsky [290], R.L. Ricca [294] та інш.

Для більшості прикладних задач, які розглядаються в областях зі складною геометрією, відсутні аналітичні розв'язки. Їх дослідження здійснюється з використанням різних чисельних методів для дискретних аналогів обраних моделей. Зазвичай, чисельні розв'язки задач масопереносу для довільних областей отримуються загальновідомими методами розв'язування початково-крайових задач для рівнянь з частинними похідними, такими, як метод скінчених різниць (МСР), метод скінчених елементів (МСЕ), безсіткових методами із групи методів граничних елементів (МГЕ) або гібридними методами. Приклади застосування таких підходів представлено в роботах В.А. Ваніна [46-52], Г.О. Воропаєва [61-64], Є.І. Никифоровича [281], В.І. Нікішова та О.Г. Стеценка [179].

В роботах Р.В. Беженара [177], І.О. Бровченка, та інших представників шкіл В.С. Мадерича [177-179, 286] і М.І. Железняка [13] також в роботах О.А. Гуржія [104-106, 265], В.В. Мелешка [259,182], Т.С. Краснопольскої [159], О.І. Кордас [106, 109, 281] продемонстровано високу ефективність моделей із застосуванням підходу Лагранжа при дослідженнях багатофакторних процесів пов'язаних із забрудненням водного середовища.

Це дозволяє зробити висновок, що стрімкий розвиток безсіткових методів на основі методу граничних елементів та гібридних методів із застосуванням підходу Лагранжу, сприяє прогресу в дослідженнях широкого кола прикладних задач механіки суцільного середовища.

Розвиток математичної та фізичної теорії масопереносу призвів до постановок задач хаотичної динаміки та адвекції домішок. Доцільно відзначити фундаментальні роботи H. Aref [288], В.Т. Грінченка [99, 102], О.А. Гуржія [104, 106, 300], В.В. Мелешка [287, 288], G.J.F. van Heijst [276, 279], Т.С. Краснопольскої [159], які вплинули на розвиток теоретичних представлень. Як продемонстровано в роботах Є.І. Никифоровича [281], О.А. Гуржія [300], О.І. Кордас [106,109], В.А. Воскобійника [244, 298, 299], для задач переносу забруднювача в акваторіях, високу ефективність показали моделі, які побудовані на основі методу дискретних особливостей (МДО).

Аналіз можливостей існуючих спеціалізованих програмних систем (ANSYS Fluent, ANSYS CFX, COMSOL Multiphysics, ADINA, LS-DYNA, PowerFLOW та XFlow, SIMULIA, Palabos, Linflow, 3DynaFS-Bem, Aeroflow і Mill, Autowing CATRAN, Wind Expert та інш.) показав, що існуючі програмні системи мають суттєві недоліки та обмеження, щодо класів задач прикладних задач, так і за обчислювальними можливостями, в частині швидкодії та інтеграції єлементів обчислювальних модулів в спеціалізовані технічні системи.

Поглиблення досліджень у різних галузях аерогідродинаміки призвели до розвитку спеціальних підходів та формуванню нових наукових напрямків та шкіл. На створення нових моделей та розвиток чисельно-аналітичних, функціонально-дискретних, чисельних методів, в значному ступені, вплинули досягнення в теорії потенціалу, теорії сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь, що пов’язано з працями T.A. Cruse, Г.М. Вайникко, Д.Ф. Гахова [73], С.О. Довгого [135, 136], І.К. Ліфанова [42, 14, 171, 172], В.Л. Макарова [176, 244], Н.І. Мусхелішвілі [189], Л.Н. Полтавського [14,15,42], F.J. Rizzo [203], Р.С. Хапко [244-246] та їх учнів.

Метод дискретних вихорів (МДВ) розроблявся С.М. Білоцерківським та М.І. Нішом як імпіричний, але його активний розвиток вже як методу дискретних особливостей (МДО) представлений в работах І.К. Ліфанова [14, 126, 171, 172], С.О. Довгого [121, 126, 134, 135, 139], Ю.В. Ганделя [68, 69], В.В. Мелешко [181], Д.Н. Горелова [95], О.І. Желаннікова [5, 6, 271, 145], В.В. Апарінова [2], В.В. Гуляєва [18], О.Г. Гомана [89, 90], В.І. Карплюка [89], В.М. Котовського [17], Р.М. Федорова [17], а також їх послідовників, серед яких О.М. Буланчук, Г.Г. Буланчук [135], А.Д. Головенко [80-87], Г.Я. Диннікова [142-144], О.В. Копіка [153-155], О.Г. Лебідь [167-170], О.В. Шеховцов [273], О.В. Сетуха [151, 211, 212], та багатьох інших. Традиційно метод дискретних вихорів використовувався для прикладних задач аеродинаміки та досліджень динаміки вихрових структур, що віддзеркалено в оглядах Т. Сарпкайя [205]. Переваги МДО при комп'ютерному моделюванні складних процесів та систем проявляються завдяки його фізичності та ефективності обчислювальних алгоритмів.

Актуальні питання обґрунтування методу дискретних особливостей, складовою частиною якого є метод дискретних вихорів (МДВ) були визначені ще на при кінці XX сторіччя, в працях Г.М. Вайникко [42], Б.Г. Габдулахаєва, О.Г. Гоман [89], С.О. Довгого [273], І.К. Ліфанова [14], Л.Н. Полтавського [14, 42], Я.Е. Полонського [14], J.L. Walsh [215] та їх учнів.

З розвитком промислових технологій виникла потреба в системах для забезпечення керування швидкоплинними процесами за умов реального часу. Це в повної мірі має відношення і до прогнозування виникнення катастрофічних ситуацій в природному середовищі. Швидке (online) моделювання, як інтелектуальна складова, є елементом систем управління запобігання розвитку катастрофічних процесів та вчасній ліквідації їх наслідків.

Стрімкий розвиток обчислювальної техники надав математичному моделюванню нові можливості для розв'язання великих задач, досліджень складних систем і швидкоплинних, богатофакторних процесів. Створення обчислювальних технологій, як нового наукового напрямку започаткував Г.І. Марчук. Цей науковий напрямок полягає в розробці спеціальних методів для розв'язування великих задач в умовах обмеження обчислювальних ресурсів. Основні методи з розпаралелення обчислень представлено в роботах В.В. Воєводіна та Вл.В. Воєводіна [57], методи та технології для багатопроцесорних систем та для кластерних обчислень представлено в роботах О.М. Хіміча [210, 217]. В роботах В.В. Апарінова [12], А.В. Гахова, С.О Дергачова, І.К. Марчевського, В.О. Міщенко [214], О.В. Сетухи [116, 119, 172, 210, 211], С.Л. Ставцева, Е.Е. Тертишнікова, показано, що ряд питань прискорення комп'ютерного моделювання вирішується спеціальною апроксимацією матриць великої розмірності, а також спеціальними технологіями разпаралелення основних обчислень.

Доцільно відмітити, що ресурсом для прискорення та забезпечення ефективності обчислень широкого класу задач може виявиться врахування в обчислювальних технологіях властивостей дискретних моделей, які утворені із застосуванням дискретизації сингулярних інтегралів, як це віддзеркалено в роботах С. О. Довгого [121, 123, 126, 135, 136], І. К. Ліфанова [14, 171, 126], О.В. Сетухи [172, 151, 166], Г.А. Щеглова та їх учнів.

1.2 Проблеми моделювання в'язких вихрових течій

У своєму загалі методи наукових досліджень поділяються на експериментальні та теоретичні. Ці два методи часто існують у тісному взаємозв'язку. Наприклад, у гідродинаміці: під час експерименту у водному каналі, або аеродинамічній трубі, може бути виявленим нове явище. Далі робиться спроба пояснити його в рамках теорії, що вже існує, побудувати математичну модель для явища і фізичних величин, які спостерігаються. Далі для верифікації моделі знову проводяться експерименти з метою підтвердити її коректність.

Експеримент може бути проведений у природному середовищі – це так званий натурний експеримент, або у лабораторії. Але такі експерименти завжди призводять до матеріальних витрат та організаційних труднощів. До того ж кожний експеримент – це окрема інженерна задача з забезпечення необхідних умов при проведенні експерименту (напр., певної сталої швидкості води у каналі), спостерігання якісної картини явища (напр., ліній току повітря за допомогою диму) та вимірювання фізичних величин (напр., тиску п'єзоелектричними датчиками). Як один з наслідків – такі експерименти обмежені у кількості точок спостереження та діапазоні зміни параметрів.

Створення і розвиток комп'ютерної техніки призвели до появи нового виду експерименту – комп'ютерного, або обчислювального, чисельного. На відміну від звичайного експерименту в лабораторії, або натурного експерименту, обчислювальний експеримент для його проведення потребує лише наявності необхідних обчислювальних потужностей. Для багатьох випадків достатньо звичайного персонального комп'ютеру. Більш того, комп'ютерна програма на відміну від витратних матеріалів та експериментального устаткування може бути використаною та копійованою необмежену кількість разів.

Обчислювальний експеримент не може стати повною заміною звичайному матеріальному експерименту, адже і сам потребує верифікації як метод. Але в багатьох випадках він може бути аргументовано його заміною. Таким чином обчислювальний експеримент займає своє місце у процесах наукових досліджень та інженерної розробки. Нижче на рис.1.1 наведено приклад схеми побудови математичних моделей та їх застосування у гідродинаміці, запозиченої із огляду С.К. Бетяєва [20].

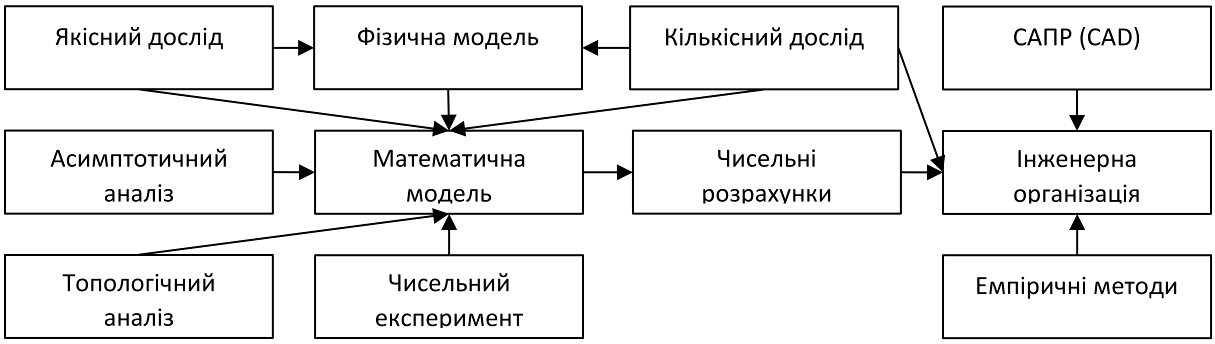


Рисунок 1.1. – Схема схеми побудови математичних моделей та їх застосування

Звичайно, економічно обґрунтована привабливість обчислювального експерименту не могла не призвести до його широкого застосування в інженерній справі для потреб промислового виробництва. Поява комп'ютерної техніки стимулювала розвиток чисельних методів. Чисельні методи лягали в основи обчислювальних технологій, які в свою чергу реалізувалися у формі комп'ютерних програм. Як і у випадках з багатьма програмними продуктами, що розробляються для власних потреб, в певний момент часу у розробників виникає ідея розширити програму для більшого кола користувачів та почати на ній заробляти. Так виникають комерційні пакети програм для інженерних розрахунків.

1.3 Існуючі системи комп'ютерного моделювання. Переваги та недоліки

Розробка комерційних програм для інженерних розрахунків ведеться ще з часів, коли комп'ютерна програма постачалася у вигляді ящиків з перфокартами. Сьогоднішні інженерні програмні пакети зробили великий крок вперед та рухаються у напрямку полегшення поєднання розрахунків з різних областей фізики та поглиблення автоматизації процесу комп'ютерної інженерної розробки та моделювання (CAE – computer-aided engineering).

ANSYS Fluent, ANSYS CFX

Мабуть, найвідомішими у цій сфері є програмні продукти компанії ANSYS, Inc. До того ж компанія є лідером з продажу програмного забезпечення в галузі обчислювальної гідродинаміки (Computational Fluid Dynamics, CFD) [205, 214]. Компанія була створена у 1970 р. у США інженером Dr. John A. Swanson. Це сталося після того, як його ідею створити програму загального призначення для розрахунків методом скінчених елементів не підтримала лабораторія, де він працював на той час. Сьогодні ця компанія налічує більш ніж 2900 співробітників, купує та поглинає менші компанії з цієї сфери та є одним з лідерів галузі.

Для задач CFD з великого розмаїття програмних продуктів ANSYS, Inc. можна виділити такі продукти як ANSYS CFX та ANSYS Fluent. Обидві програми використовують скінченно-елементні методи.

ANSYS CFX використовує гібридний підхід до дискретизації: скінченно-елементний та контрольних об'ємів. Як метод контрольних об'ємів він досягає глобального збереження шляхом вимоги збереження локально в кожному контрольному об'ємі. Метод скінчених елементів використовується для опису зміни розв'язку в кожному елементі. Адвективні потоки розраховуються схемою високої роздільної здатності. Схема обмежена та має другий порядок точності. Для несталих течій використовується неявна схема диференціювання по часу другого порядку точності. Для всіх швидкостей та усіх течій використовується один вирішувач (solver). Вирішувач багатосітковий (multigrid): використовується послідовність сіток, які грубшають, для розповсюдження розв'язку на всю область. Сітка може бути динамічною та адаптивною в задачах з рухомими границями. Також вирішувач є неявно спряженим (implicit coupled) – вирішує повну систему гідродинамічних рівнянь одночасно на всіх вузлах.

ANSYS Fluent використовує два вирішувача для отримання поля тиску: спряжений за тиском (pressure-based solver) та спряжений за густиною (density-based solver). У першому випадку тиск визначається з рівняння корекції тиску, яке отримується з рівнянь неперервності та збереження імпульсу. У другому випадку із рівняння неперервності отримується поле густини, а тиск визначається з рівняння стану. Історично вирішувач за тиском використовувався для низькошвидкісних нестисливих течій, а за густиною – для високошвидкісних стисливих, але останнім часом вони обидва були розширені на широкі діапазони режимів течії.

Різниця між ANSYS CFX та ANSYS Fluent у тому, що в ANSYS CFX об'єми центруються по вузлам сітки (node-centered), а в ANSYS Fluent – об'єми збігаються з сіткою (cell-centered). Обидві програми здатні розв'язувати як двовимірні, так і тривимірні задачі, проводити обчислення паралельно. Існують також готові рішення для хмарних обчислень.

Для задач з вільною границею та багатофазних потоків застосовується метод об'єму рідини (Volume of Fluid Method, VOF) в рамках підходу Ейлера. А також метод дискретної фази (discrete phase model, DPM) в рамках підходу Лагранжа – для моделювання диспергованої фази. Для задач шару, що кипить, використовується метод дискретних елементів (Discrete Element Method, DEM). Останні два методи моделюють рух окремо взятих частинок.

Фізична модель: для усіх течій ANSYS розв'язує рівняння збереження маси та імпульсу. Для стисливих течій, або задач теплопереносу додається рівняння збереження енергії.

Ось деякі із задач гідродинаміки, які можна обраховувати за допомогою продуктів компанії ANSYS, Inc.: стисливі та нестисливі течії, течії з рухомою границею, течії з вільною границею, взаємодія з твердими тілами, занурені тіла, пористі середовища, турбулентність, кавітація, акустика, теплообмін, турбіни, (машини, що обертаються), багатофазні течії, кипіння, течії, які хімічно реагують між собою, та згоряння.

Багато зусиль розробників пакету ANSYS було прикладено до полегшення розв'язку задач, в яких моделюється одразу декілька пов'язаних фізичних процесів. Для цієї потреби у пакеті існує додаток ANSYS Workbench, у графічному інтерфейсі якого за допомогою звичної дії перетягування (drag-and-drop) дослідник створює схему розрахунку задачі, задає зв'язки між вирішувачами різних фізичних процесів.

Простий приклад таких задач – задачі обтікання з рухомими границями, або взаємодії рідини з твердими тілами (fluid-structure interaction, FSI). Нижче на рис.1.2 представлено приклад схеми проекту, побудованої у ANSYS Workbench для розв'язування задачі взаємодії рідини з рухомою границею, взятий з технічного звіту Tameirão Sampaio Rodrigues та ін. про моделювання штучного клапану серця.

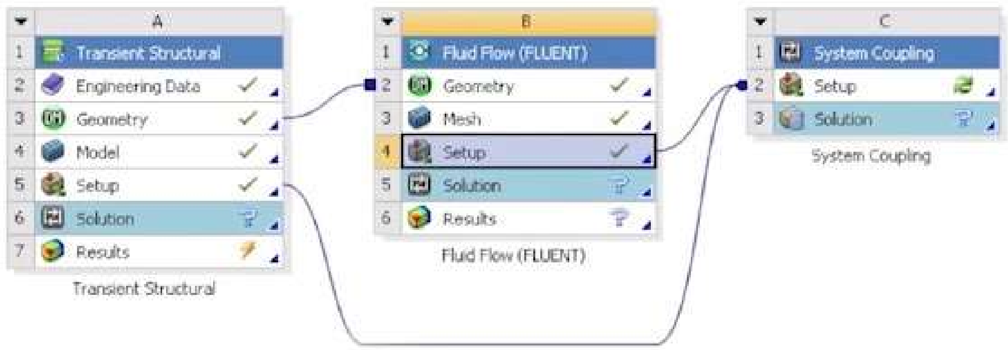


Рисунок 1.2 – Схема розв'язування задачі взаємодії рідини з рухомою границею у ANSYS Workbench [2]

Як видно з рис.1.2, різні додатки з пакету: Fluent та Transient Structural (додаток для розрахунку динамічних навантажень конструкцій) використовують для розрахунків одну спільну геометрію (Geometry). Але що важливіше – їх компоненти, призначені для задання початкових та граничних умов (Setup), є пов'язаними через спеціальний додаток – System Coupling. Завдяки останньому поле тиску, отримане за допомогою додатка Fluent використовується як навантаження для розрахунку напружено-деформованого стану клапану. Також в ANSYS (рис. 1.3) є можливість зробити такий зв'язок двонаправленим – розраховану за навантаженнями деформацію повернути у додаток Fluent як зміну положення границь в задачі обтікання.

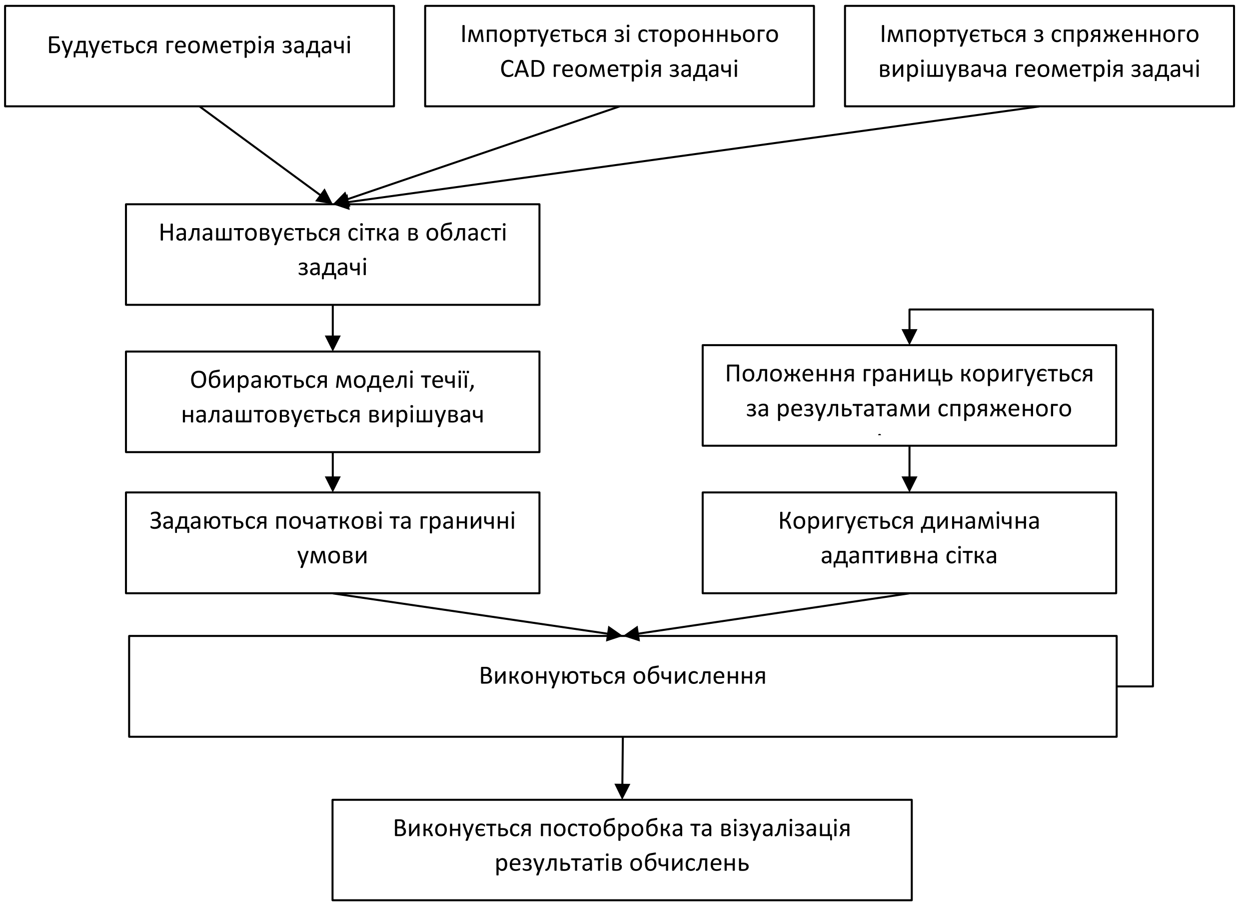


Рисунок 1.3. – Загальна схема процесу проведення обчислень у пакеті ANSYS

На рис. 1.3 в загальному вигляді представлено процес проведення розрахунків у програмному пакеті ANSYS [88].

1.4 Проблеми побудови обчислювальних технологій для систем моделювання в реальному масштабі часу

Слід проілюструвати одну з особливостей використання скінченно-елементного ПЗ. Таке ПЗ вимагає від інженера, або дослідника наявність досвіду застосування методу скінчених елементів. Цей факт підтверджується в момент побудови сітки. Нижче на рисунку 4 наведені поля швидкостей для класичної двовимірної задачі обтікання циліндру. Задача чисельно розв'язувалася у безкоштовній версії пакету – ANSYS Academic 19.1, у додатку ANSYS Fluent. Зліва течія поза циліндром обчислена з використанням сітки, на віддаленні від циліндру, з розміром, який побудував додаток Meshing. Зправа обрано біль мілку сітку.

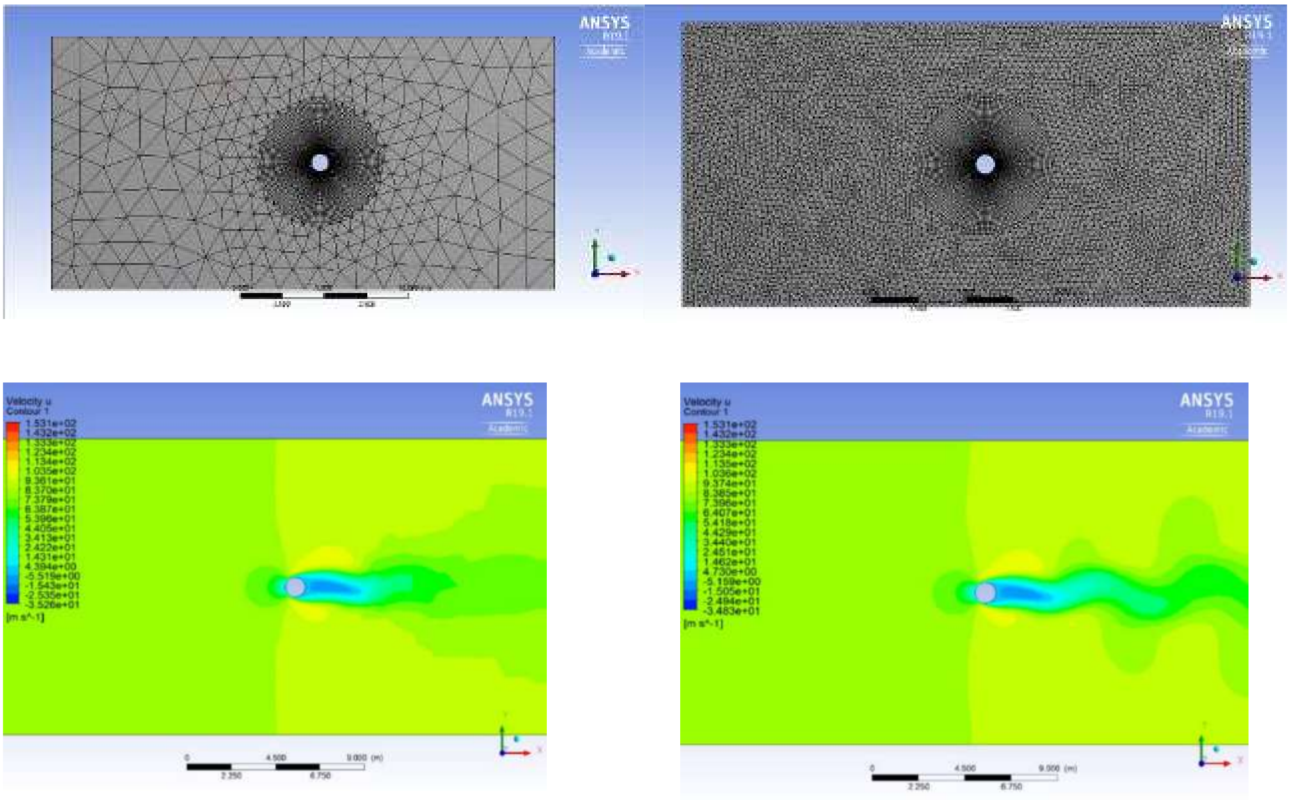


Рисунок 1.4. – Груба сітка та розраховане по ній поле швидкостей (зліва), більш мілка сітка і розраховане по ній поле швидкостей (справа)

З рисунку видно наскільки якісно схожі обидві картини обтікання в околі циліндру, де спеціально була побудована мілка сітка навколо циліндру і вона однакова в обох випадках. Але на віддаленні від циліндру картина відрізняється і видно, що більш груба сітка не здатна “вловити” так звану вихрову доріжку Кармана, яку можна побачити на рисунку справа. Тобто- питання побудови розрахункової сітки є окремою проблемою усіх сіткових методів.

Вартий уваги також ANSYS ACT – набір інструментів для автоматизації розрахунків, розширення функціоналу пакету та приєднання сторонніх додатків для розрахунків. В ANSYS ACT можна створювати свої додатки на базі пакету ANSYS з використанням мови розмітки XML та мови програмування – IronPython. Ця технологія дозволяє створювати додатки з вже налаштованими розрахунками для конкретних застосувань, що в свою чергу веде до пониження “порогу входу” для користувача – йому не буде потрібно мати серйозні знання гідродинаміки та чисельних методів для проведення розрахунків.

Отже ANSYS – потужний комерційний промисловий пакет програм, над яким працює велика кількість розробників. Відповідно до цього, пакет добре відлагоджений, та має зручний інтерфейс. Пакет покриває широкий спектр задач гідродинаміки та здатний проводити розрахунки спряжених задач з різних областей фізики. Але пакет має відчутний недолік – вартість ліцензії. До того ж пакет має суттєвий “поріг входу”: для проведення надійних розрахунків користувачу пакету необхідно мати досвід застосування методу скінчених елементів, що вже було проілюстровано вище. Також для користувача необхідними є базові знання в галузі гідродинаміки для коректної постановки задачі (вибору моделі течії, граничних умов) та чисельних методів (для обрання алгоритму і схеми розрахунку). Пакет працює в ОС Windows.

OpenFOAM

При розгляді програмного забезпечення для задач CFD не можна не згадати про OpenFOAM (англ. абр. Open Source Field Operation And Manipulation) – платформу, або бібліотеку з відкритим кодом на мові програмування C++, призначену для розв'язування задач механіки суцільних середовищ [27,30,88,91]. Бібліотека орієнтована на операційні системи з сімейства Unix (в т.ч. Linux). Бібліотека розробляється з 2004-го року. Зараз її розробляють паралельно дві англійські компанії OpenCFD Limited та OpenFOAM Foundation Limited [88]. OpeanFOAM є достатньо відомою та поширеною бібліотекою в академічній спільноті. На відміну від дорогих пакетів промислового призначення ліцензія OpeanFOAM безкоштовна.

Платформа початково не має графічного інтерфейсу, дослідник описує задачу у текстовому файлі в певному форматі. Для виконання обчислень необхідно підготувати каталог з файлами певної структури, які будуть містити опис параметрів задачі, фізичні властивості досліджуваної системи, початкові та крайові умови. Обчислення запускаються з командного рядка операційної системи.

OpenFOAM структурно складається з вирішувачів та утиліт. Утиліти – це окремі програми для перед- та пост-обробки даних, наприклад – конвертації файлу з сіткою, побудованого у сторонній програмі. Маючи необхідні знання програмування, алгоритмів, математичних моделей та чисельних методів дослідник може сам створювати нові вирішувачі та утиліти для розширення наявного функціоналу бібліотеки. Як наслідок – існує спільнота людей, які викладають свої доробки та розширення бібліотеки у відкритий доступ з відкритим кодом, наприклад, проект foam-extend.

Для побудови сітки для обчислень в OpeanFOAM можуть бути використаними як програми з бібліотеки, що запускаються з командного рядка, так і сторонні програми з подальшою конвертацією у формат, який підтримує OpenFOAM. Деякі з таких сторонніх програм мають графічний інтерфейс, наприклад, Gmsh.

В OpeanFOAM немає загального універсального вирішувача, що покривав би усі випадки – користувач повинен сам обрати вирішувач відповідно до класу задачі, яку потрібно розв'язати. Вирішувачі відрізняються між собою за алгоритмом обчислень, або за фізичною моделлю, яку вони реалізують. Кожен вирішувач – це самостійна програма, що запускається з командного рядка. Ряд вирішувачів підтримує динамічну адаптивну сітку. Бібліотека підтримує паралельні обчислення з використанням бібліотеки Open MPI. Існують навіть хмарні рішення для швидких розрахунків. Аналогічно вибору вирішувача, дослідник самостійно обирає граничні умови, яких у версії від компанії OpenCFD більше 70-ти різних типів.

За списком доступних вирішувачів OpenFOAM можна скласти наступний список задач гідродинаміки, яку покриває бібліотека:

1. нестисливі течії: ламінарні ньютонівської та неньютонівської рідини, турбулентні, модель мілкої води;
2. стисливі течії: ламінарні і турбулентні, трансзвукові, надзвукові;
3. багатофазні течії та течії з вільною границею;
4. відслідковування окремих частинок (підхід Лагранжа);
5. течії, що реагують між собою та згоряння;
6. течії, що обертаються (з багатьма системами відліку);
7. пористі середовища;
8. кавітація;
9. теплоперенос.

Окрім гідродинаміки в бібліотеці також є вирішувачі для задач напружено-деформованого стану твердого тіла, електромагнетизму та навіть модель Блека-Шоулза з економіки.

Для перегляду та пост-обробки результатів використовується безкоштовне графічне середовище ParaView.

Таким чином, можна сказати, що OpenFOAM – потужний інструмент для обчислень у галузі гідродинаміки, але який має великий "поріг входу". Користувач бібліотеки окрім структури та функціонування самої бібліотеки повинен мати не лише впевнені знання в області гідродинаміки (для правильного обрання вирішувача та граничних умов) і досвід використання методу скінчених елементів (для правильної побудови сітки), а і бути досвідченим користувачем ОС Linux, особливо – з командного рядку. Для більш складних випадків, коли задача не вписується у стандартні вирішувачі, або граничні умови, необхідно мати базове знання та досвід програмування на мові C++.

Скінченно-елементні пакети

Існує ще чимало інших пакетів для розрахунків методом скінченних-елементів: як комерційні, так і відкриті безкоштовні. В даній статті докладно розглянуто по одному з кращих представників комерційного та відкритого безкоштовного ПЗ: пакет компанії ANSYS та бібліотеку OpenFOAM відповідно. Під час підготовки огляду окрім цих пакетів також були розглянуті інші пакети. Вони мають деякі відмінності, але в загальному повторюють принципи та функціонал двох розглянутих вище пакетів.

Один з лідерів промислової галузі CFD після ANSYS – STAR-CCM+ (розробляється з 2004 р., зараз належить Siemens PLM Software) за своїми описами повторює багато функціоналу з ANSYS, також приділяючи багато уваги мультифізичним розрахункам. Пакет працює в ОС Windows та Linux, підтримує паралельні та хмарні розрахунки. Інший продукт від Siemens PLM Software – Femap (розробляється з 1985 р.). Він виконує роль пре- та постпроцесору, як шар між САПР та скінченно-елементними вирішувачами. Але має і власний вирішувач для задач CFD – Femap Flow Solver, який повторює багато функціоналу для суто гідродинамічних задач, а з задач мультифізики вирішує лише задачі теплопереносу. Пакет працює в ОС Windows.

ADINA [88] (з 1974 р., США) – ще один комерційний пакет ПЗ з галузі CFD. Має вже дещо застарілі графічний інтерфейс та візуалізацію результатів. З можливостей, яких немає в ANSYS: підтримка густини рідини, залежної від тиску, або від часу. Пакет також розв'язує задачі мультифізки на рівні ANSYS, підтримує імпорти зі сторонніх САПР. Пакет працює в ОС Windows та Linux, підтримує паралельні обчислення.

Ще один виробник комерційного пакетів – MSC Software (США), який також розробляє оригінальну версію відомого пакету Nastran для розрахунків напружено-деформованого стану тіла. Серед продуктів цього виробника є ряд пакетів для задач CFD [88]: SC/Tetra, scFLOW, scSTREAM, HeatDesigner та ін. Вони розв'язують широкий спектр промислових CFD-задач, а також деякі задачі мультифізики (FSI, теплоперенос). Цікава особливість пакету – є можливість робити повну автоматизацію процесів інженерних розрахунків з використанням мов Visual Basic, Python та інших. Також в пакеті реалізовано автоматичне адаптивне уточнення сітки в зонах великих градієнтів та складної геометрії. Пакети працюють в ОС Linux та Windows, є підтримка паралельних та хмарних обчислень.

COMSOL Multiphysics – пакет від компанії COMSOL (засн. у 1986 р. у Швеції). Аналогічно пакетам лідерів галузі, чимало уваги в даному пакеті приділено мультифізичним задачам (fsi, теплоперенос, течії, які реагують, згоряння, спряжені задачі акустики та електромагнетизму). Пакет підтримує паралельні та хмарні обчислення. Одна з цікавих особливостей пакету – застосування методу граничних елементів у задачах корозії, електроосадження, електростатики та акустики. Такі особливості цього методу як пітримка нескінченної області розрахунку, легкість розрахунку поля в будь-якій точці та інші мотивували розробників включити метод у пакет для використання як у поєднанні з методом скінчених елементів, так і окремо.

Ще один відкритий безкоштовний пакет для задач CFD – SU2, створений у Стенфордському університеті. Але під час огляду було зроблено висновок, що він не має переваг перед пакетом OpenFOAM за своїми можливостями, тому не будемо його розглядати у статті детально.

Пакети, що застосовують метод ґраткових рівнянь Больцмана

Останнім часом користується популярністю метод ґраткових рівнянь Больцмана (Lattice Boltzmann method, LBM, [88]). На відміну від звичайних сіткових методів в яких розв'язується рівняння Нав'є-Стокса, у даному методі використовується кінетичне рівняння Больцмана в рамках Підходу Лагранжа. Метод має переваги над сітковими методами, як, наприклад, відсутність трудомісткого процесу задання сітки для досягнення необхідної точності, здатність розв'язувати задачі для великих значень числа Кнудсена, та ін. Але метод має і певні обмеження – є проблеми у випадках великих числах Рейнольдса. Наразі існує невелика кількість комерційних та безкоштовних відкритих пакетів для розв'язування задач гідродинаміки даним методом, їх ми опишемо нижче. Хоча все ж таки традиційних "сіткових" пакетів набагато більше.

PowerFLOW та XFlow

Розвитком LBM для промислового застосування у комерційних пакетах зараз займається компанія Dassault Systèmes (заснована у 1981 р., Франція). Компанія серед своїх продуктів для CFD має скінченно-елементні модулі SolidWorks Flow Simulation (доречі, досить популярний в індустрії), а також Abaqus/CFD. На рахунок LBM – компанія має у пакеті програм SIMULIA два продукти, які реалізують цей метод – PowerFLOW (продукт приєднаної у 2017 р. компанії Exa Corporation) та XFlow (підрозділ цього продукту було придбано у 2016 р. у компанії Next Limit Technologies).

XFlow має графічний інтерфейс, підтримує паралельні та хмарні розрахунки. Пакет працює в ОС Windows та Linux.

Можливості XFlow:

1.стисливі та вимушено нестисливі течії;

2.внутрішні та зовнішні задачі;

3.течії з вільною границею;

4.мультифазні течії;

5.задачі теплопереносу;

6.взаємодія з твердими тілами, плавучість, FSI;

7.моделі надзвукових течій;

8.турбулентні течії;

9.задачі акустики;

10.моделі неньютонівської в'язкості.

Пакет PowerFlow за своїми описами має дещо менші можливості, ніж XFlow, а в задачах мультифізики більшу увагу в цьому пакеті приділено задачам аероакустики та теплопереносу.

Palabos

Бібліотека з відкритим кодом Palabos [88] – продукт партнерства Женевського університету, який займається дослідженнями для розвитку бібліотеки, та компанії FlowKit Ltd., яка займається її підтримкою та розробкою. Розробляється з 2009 р. як відгалудження від бібліотеки OpenLB. Бібліотека OpenLB в свою чергу розробляється з 2005 р., досі існує та підтримується, але є менш відомою, ніж Palabos.

Бібліотека Palabos пропонує програмний інтерфейс на мові C++, для її застосування обов'язково потрібні навички програмування. Окрім цього передбачається, що користувач має гарні знання в області CFD. Бібліотека майже не має сторонніх залежностей, тому легко розгортається у багатьох ОС та платформах. Також бібліотека має програмні інтерфейси на мовах Java та Python. Є підтримка паралельних обчислень з використанням програмного інтерфейсу MPI. Геометрична область задається “вручну” в програмному коді обчислень, або імпортується з STL-файлу. В бібліотеці можливе виведення результатів у текстові та бінарні файли, файли зображень, або VTK-файли, які можливо переглядати у безкоштовному середовищі ParaView (аналогічно OpenFOAM).

Можливості бібліотеки:

1. нестисливі та слабко стисливі течії;
2. течії з вільною границею;
3. неньютонівська в'язкість;
4. турбулентність;
5. теплоперенос;
6. пористі середовища;
7. багатофазні течії.

Можна сказати, що у галузі ґраткових рівнянь Больцмана ситуація схожа на ситуацію зі скінченно-елементними пакетами з тією різницею, що пакети даної галузі покривають менший функціонал та менш популярні. Але вони розв'язують деякі з задач, які неможливо розв'язати шляхом чисельного розв'язування рівнянь Нав'є-Стокса, наприклад, течії малих масштабів та випадки коли не виконується гіпотеза неперервності (для великих значень числа Кнудсена). Комерційні пакети зручніші, але дорогі. Безкоштовний пакет менш потужний та потребує знання та навички програмування та досвід в обчислювальній гідродинаміці.

Пакети, що застосовують метод граничних елементів

Метод граничних елементів (boundary element method, BEM) не користується популярністю в задачах гідродинаміки, але варто розглянути пакети, в якому його реалізовано. Одні з особливостей методу – те, що він безсітковий та приводить до менших за розміром СЛАР. Також, як було вказано вище при розгляді пакету COMSOL, метод легко працює з нескінченними областями та дозволяє легко порахувати поле в будь-якій точці області.

Linflow

Linflow [28,88] – ПЗ для задач гідродинаміки, яке розроблялося з 1999 р. (версія 1) по 2004 р. (остання версія – 1.4) у Швеції компанією ANKER–ZEMER Engineering AB. Пакет використовує метод граничних елементів для дискретизації потенціалу швидкості. Можливості пакету: нев'язка рідина, течія безвихрова, стисливі та нестисливі течії. Задачі, що розв'язує пакет: задачі обтікання, аеропружність, аероакустика, взаємодія рідин та твердих тіл (FSI). ПЗ передбачалося застосовувати як додатковий модуль до пакету ANSYS (остання підтримувана версія ANSYS – 8.1), або разом з пре- та постпроцесором Femap, про які вже було згадано вище.

3DynaFS-Bem

3DynaFS-Bem [88] – модуль пакету 3DynaFS компанії Dynaflow, Inc. для дослідження течій з вільною границею та їх взаємодії з твердими тілами (FSI). Застосування пакету: кавітація, гідроакустика, хвилі, ефекти мілкої води. Швидше за все пакет розроблявся для потреб кораблебудування, постачається як для застосування в ОС Windows, так і Linux. Останні доступні згадування про розробку та підтримку пакету 3DynaFS датуються 2014 р.

З розвитком обчислювальної техніки математичне моделювання стає одним з основних інструментів прогнозування швидкоплинних процесів. Так, при виникненні метеорологічних та гідрологічних катаклізмів, надзвичайних ситуацій на підприємствах, що сталися внаслідок техногенних або природних катастроф, з викидом забруднюючих речовин в повітря або водне середовище, саме прогнозування їх розповсюдження під впливом різноманітних факторів стає основною задачею для вчасного визначення сценаріїв ефективного запобігання небезпечному впливу. Потреба в обчислювальних технологіях, здатних забезпечувати моделювання динамічних процесів та виявлення критичних впливів у масштабі реального часу, визначається гострою необхідністю їх застосування в спеціалізованих моделюючих системах, призначених для виявлення загроз небезпечних аварій і катастроф та прогнозування їх наслідків. Ці технології призначені для систем оперативного прогнозування, інформаційного забезпечення систем підтримки прийняття рішень та управління швидкоплинними процесами.

Розглянувши програмно-моделючі системи лідерів галузі обчислювальної гідродинаміки можна зробити висновок про те, що перспективний напрям розробки ПЗ для цієї галузі – автоматизація процесів розрахунків, пониження кваліфікаційного “порогу входу” у технологію та модульность побудови систем.

Доцільно звернути увагу на те, що найменьший час на виконання обчислень вітрачается при застосування інтегральних моделей та методів. До яких можна віднести методи теорії потенціалу.

Методологія побудови обчислювальних технологій призначених забезпечувати ефективне (за часом) моделювання повинна спиратися на універсальність математичних постановок та застосуванню чисельно-аналітичних методів (з найменьшою кількість обчислювальних операцій).

Для побудови моделей доцільно застосувати методологічну схему побудови математичних моделей для обчислювальних технологій (рис. 1.5).

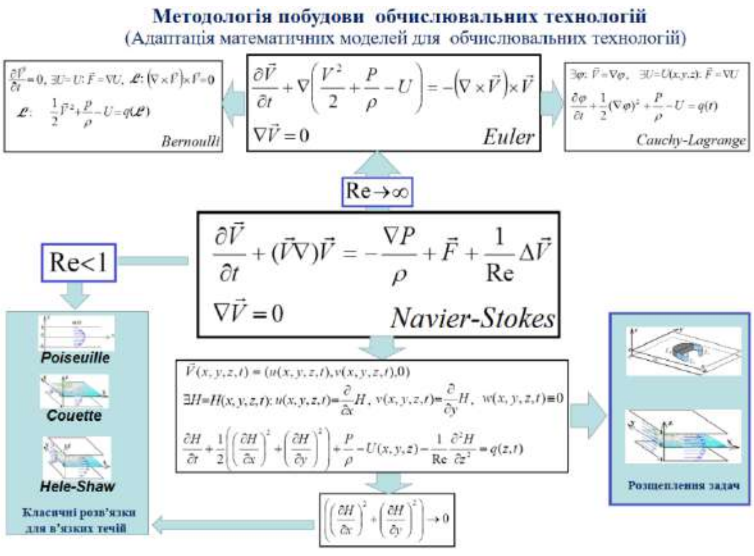


Рисунок 1.5. – Методологічна схема побудови математичних моделей для обчислювальних технологій

Методи із сімейства методів граничних елементів мають високий та не до кінця розкритий потенціал застосування у задачах обчислювальної гідродинаміки. Схема видів математичного моделювання за цільовим призначенням наведена на рис. 1.6.

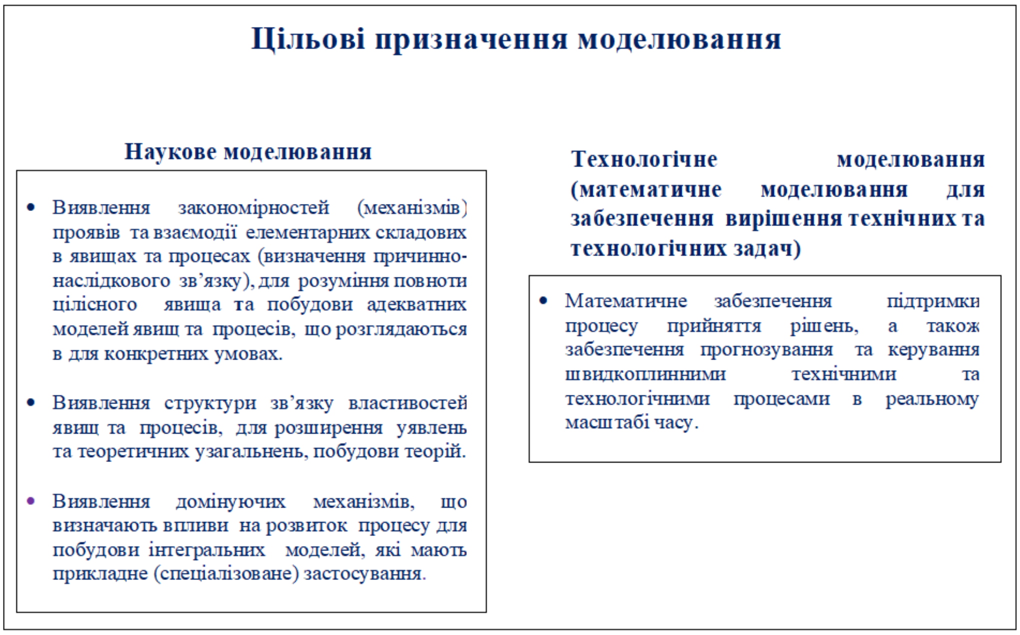


Рисунок 1.6 – Схема видів математичного моделювання за призначенням

Зважаючи на те, що пакети з використанням даних методів слабко представлені у галузі досліджень, дослідникам та розробникам варто звернути на нього увагу.

1.5 Висновки до розділу

Підсумовуючі вищеприведене, приходимо до висновку, що основною метою дисертаційної роботи є розв'язання науково-прикладної проблеми підвищення ефективності моделювання аерогідродинамічних процесів та систем, шляхом врахування їх особливостей і спеціальних властивостей при створення технологій моделювання, придатних для застосування в комп'ютерних системах прогнозування та керування швидкоплинними процесами в реальному масштабі часу.

Для досягнення поставленої мети в роботі необхідно вирішити наступні завдання:

5. Застосувати методологію врахування особливостей і спеціальних властивостей явищ та процесів, що при створення моделей та побудові обчислювальних технологіï моделювання, придатних для застосування в комп'ютерних системах online прогнозування, інформаційної підтримки прийняття рішень та забезпечення керування швидкоплинними процесами;

6. Розробити математичні моделі течій, з врахуванням в'язких, тривимірних та відривних ефектів, які придатні для використання в обчислювальних технологіях моделювання швидкоплинних аерогідродинамічних процесів в реальному масштабі часу.

7. Розробити методи та алгоритми обчислень кінематичних та динамічних характеристик аерогідродинамічного процесу, які придатні для моделювання швидкоплинних аерогідродинамічних змін в реальному масштабі часу;

8. Побудувати обчислювальну технологію призначену для застосування в спеціалізованих комп'ютерних системах моделювання та забезпечення прогнозування швидкоплинних аерогідродинамічних процесів в реальному масштабі часу.

РОЗДІЛ 2
ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ТА МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ

Найбільшу потребу в прогнозі еволюції таких процесів, як поширення забруднень на водної поверхні, масоперенос (з урахуванням забруднень) в обмежених акваторіях під впливом змін гідрологічних і атмосферних умов відчувають служби, покликані оперативно попереджати розвиток природних і техногенних катастроф та зменшувати / запобігати їх вплив на навколишнє середовище. Таких прогнозів потребують гідрометслужби, служби із запобігання та подолання наслідків надзвичайних ситуацій, установи проектанти гідротехнічних споруд , мостобудівники, будівники технологічних споруд, лоцманська служба та інш. Але проблемі, які виникають в акваторіях, мають, як різні за масштабами та причини виникнення, так і різні масштаби проявів.

За для забезпечення роботи прогнозуючих інформаційних систем необхідно, в моделюючому модулі, застосування ефективних математичних моделей, які в реальному масштабі часу здатні враховувати домінуючі фактори процесів. При дослідженні течій в акваторіях, як правило, головний інтерес представляє швидкість осереднена по товщині шару, а також поверхнева та придонна швидкість. При такому підході доцільно мати математичні моделі течій, які не потребують великого обсягу обчислень та великих обчислювальних ресурсів та придатні для застосування в офісних комп’ютерних моделюючих та інформаційних системах.

Нижче представлено метод побудови математичних моделей для плоскопаралельних течій в шару. В побудованих нелінійних моделях враховано в’язкість, нестаціонарність та інерційність течії. Показано, що математичні моделі для граничних випадків являють собою класичні розв’язки для шаруватих течій**.**

2.1 Аналіз структур течій та загальний концептуальний методологічний підхід (зведення до розщеплення) та постановка задач

Розглядається течія, яка описується рівняннями Нав'е-Стокса (2.1), (2.2). При дослідженні течій в акваторіях, як правило, головний інтерес представляє швидкість осереднена по товщині шару, а також поверхнева та придонна швидкість. При такому підході доцільно розглядати математичні моделі шаруватих течій.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{F} + \frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{V} \tag{2.1}$$

$$\nabla \vec{V} = 0\,, \tag{2.2}$$

2.2. Постановки задач для різномасштабних процесів. Методологія т розщеплення тривимірних вихрових в'язких течій та нові модельні рішення

2.2.1. Загальна постановка задачі для тривимірної течії в шару

При розгляді в'язких шаруватих нестаціонарних течій паралельних плоскості OXY, компонента швидкості w уздовж осі OZ (перпендикулярна цій площині) вважається рівною нулю: $w(x, y, z, t) \equiv 0$.

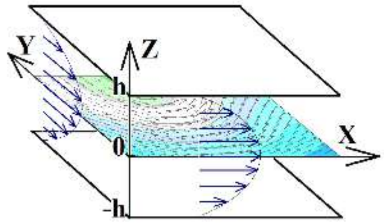


Рисунок 2.1 – Схема шаруватої течії між двох площин

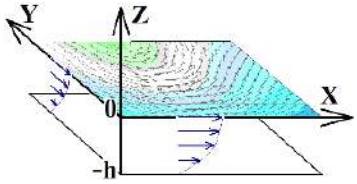


Рисунок 2.2 – Схема шаруватої течії над площиною

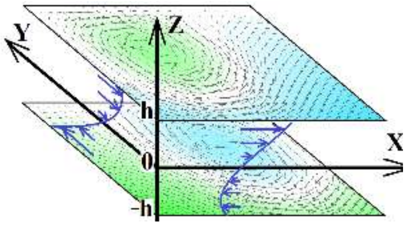


Рисунок 2.3 – Схема плоскопаралельної шаруватої течії

У припущенні про консервативність поля зовнішніх сил, вважається, що існує $U = U(x, y, z)$, така що $\vec{F} = \nabla U$. В цьому випадку, рівняння (2.1), (2.2) в проекціях на осі координат записуються у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.6}$$

Припускається, що при будь-яких z і t існує безперервно диференційована функція $H = H(x, y, z, t)$ така, що для компоненти швидкості $u(x, y, z, t)$ и $v(x, y, z, t)$ справедливо:

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial x}H(x, y, z, t), \quad v(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial y}H(x, y, z, t), \quad w(x, y, z, t) \equiv 0 \ . \tag{2.7}$$

При таких припущеннях, рівняння (2.3) і (2.4) можуть бути представлені у виді:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right)+\frac{p}{\rho}-U-\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right)\right\}=0, \qquad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right)+\frac{p}{\rho}-U-\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right)\right\}=0 \qquad (2.9)$$

При підстановці (2.7) в (2.6) стає видно, що функція $H=H(x,y,z,t)$ є гармонійною, при будь-яких фіксованих *z* и *t*

$$\frac{\partial^2 H(x,y,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H(x,y,z,t)}{\partial y^2}=0. \qquad (2.10)$$

Тому, в силу (10), для (8) і (9) справедливо:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right)+\frac{p}{\rho}-U-\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right)\right\}=0, \qquad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right)+\frac{p}{\rho}-U-\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right)\right\}=0. \qquad (2.12)$$

В результаті, при зробленому припущенні (2.7), в силу (2.10) з рівнянь (2.11), (2.12) отримуємо інтеграл руху:

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right)+\frac{p}{\rho}-U(x,y,z)-\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=q(z,t) \qquad (2.13)$$

Де деяка функція $q(z,t)$ є залежною тільки від *t* при будь-якому фіксованому *z* і визначається з вхідних даних завдання.

Проінтегроване рівняння (2.5) має вигляд:

$$p=\rho U(x,y,z)+P(x,y,t) \qquad (2.14)$$

При підстановці (15) в (14) маємо:

$$\frac{\partial}{\partial t}H(x,y,z,t)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}H(x,y,z,t)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}H(x,y,z,t)\right)^2\right)+\frac{P(x,y,t)}{\rho}-\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial z^2}H(x,y,z,t)=q(z,t) \qquad (2.15)$$

Вираз (2.15) представляє собою перший інтеграл для системи рівнянь (1),(2) при умовах (2.7).

2.2.1.1. Асимптотичний аналіз та граничні випадки. Задачі для різномасштабних процесів.

Стаціонарні шаруваті течії

Стаціонарні повільні шаруваті течії (повзучі течії) [2], паралельні площини 0ХУ, характеризуються умовою $\frac{\partial}{\partial t}=0$ та нехтуванням доданком $\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2$, внаслідок чого (15) набуде вигляду звичайного диференціального рівняння другого порядку (відносно похідної по z):

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}H(x,y,z)=\frac{P(x.y)}{\mu}-\frac{\rho}{\mu}q(z). \qquad (2.16)$$

Двічі інтегруючи (16) по z, отримуємо

$$H(x,y,z)=\frac{z^2}{2\mu}P(x,y)+zH_1(x,y)+H_0(x,y)-\frac{\rho}{\mu}Q(z), \qquad (2.17)$$

де $H_0=H_0(x,y)$ и $H_1=H_1(x,y)$ - функціональні коефіцієнти, а для останнього доданку у правій частині (2.17) справедливо:

$$q(z)=\frac{\partial^2}{\partial z^2}Q(z)\,. \tag{2.18}$$

Для визначення в (2.17) значень функціональних коефіцієнтів $H_0=H_0(x,y)$ и $H_1=H_1(x,y)$ необхідно задати крайові умови: наприклад значення функцій $\varphi=\varphi(x,y,z)$ на границях шару $z=\pm h$ $H_{\pm h}=H(x,y,\pm h,t)$, або їх похідні. Для в'язких рідин, зазвичай задаються значення швидкостей на границях шару, відомих з умови прилипання на рухомих і нерухомих границях.

Будемо розглядати оператор $\nabla_{xy}=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},0)$, як діючий тільки у плоскості *Oxy*, тому компоненти вектору швидкості $u(x,y,z)$ и $v(x,y,z)$ представим у вигляді похідних $(u(x,y,z),v(x,y,z))=\nabla_{xy}H(x,y,z)$,або інакше:

$$\vec{V}(x,y,z)=\nabla_{xy}H(x,y,z)\,. \tag{2.19}$$

Різні крайові умови будуть визначати функціональні коефіцієнти та будуть визначати різні розв’язки задач.

Стаціонарна шарувата повзуча течія між двома нерухомими паралельними площинами (аналог течії Пуазейля).

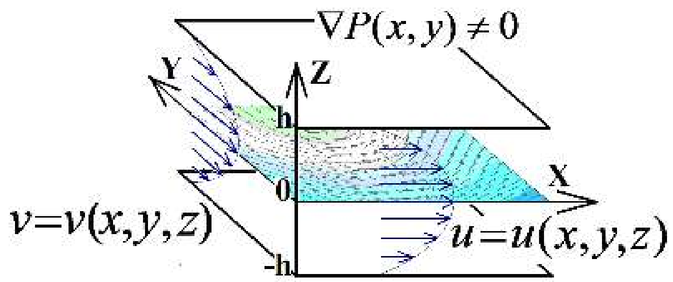


Рисунок 2.4 – Схема шаруватої течії між двох площин

У задачі про стаціонарну шарувату повзучу течію між двома нерухомими паралельними площинами крайові умови прилипання для швидкостей визначаються, як у (2.19), після застосування оператора ∇_{xy} до (2.17):

$$\nabla_{xy} H(x,y,z) = \frac{z^2}{2\mu} \nabla_{xy} P(x,y) + z\vec{V}_1(x,y) + \vec{V}_0(x,y), \tag{2.20}$$

де $\vec{V}_0$ и $\vec{V}_1$ векторні функції (двовимірні) не залежні від z.

$$\vec{V}_0(x,y) = \nabla_{xy} H_0(x,y), \tag{2.21}$$

$$\vec{V}_1(x,y) = \nabla_{xy} H_1(x,y), \tag{2.22}$$

Граничні умови прилипання на площинах, при $z = \pm h$:

$$(u,v)\big|_{z=\pm h} = \nabla_{xy} H\big|_{z=\pm h} = (0,0). \tag{2.23}$$

Підстановка у (2.21) граничних умов (2.24) призводить до системи лінійних рівнянь для визначення векторних функцій $\vec{V}_0$ і $\vec{V}_1$:

$$\nabla_{xy} H(x,y,h) = \frac{h^2}{2\mu} \nabla_{xy} P(x,y) + h\vec{V}_1(x,y) + \vec{V}_0(x,y) = (0,0), \tag{2.25}$$

$$\nabla_{xy} H(x,y,-h) = \frac{h^2}{2\mu} \nabla_{xy} P(x,y) - h\vec{V}_1(x,y) + \vec{V}_0(x,y) = (0,0), \tag{2.26}$$

Із системи рівнянь (2.25), (2.26) для $\vec{V}_0$ и $\vec{V}_1$ отримуємо вирази:

$$\vec{V}_0 = -\frac{h^2}{2\mu} \nabla_{xy} P(x,y) \tag{2.27}$$

$$\vec{V}_1 = (0,0), \tag{2.28}$$

Підстановка (2.27) і (2.28), у (2.20) надає часткове рішення, з симетричним по осі *OZ* профілем швидкості:

$$(u,v) = \nabla_{xy} H(x,y,z) = -\frac{h^2}{2\mu} \nabla_{xy} P(x,y)\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right) \tag{2.29}$$

В силу (2.27) і (2.28), для значень функціональних коефіцієнтів $H_0 = H_0(x,y)$ і $H_1 = H_1(x,y)$ справедливо:

$$H_0(x,y) = -\frac{h^2}{2\mu} P(x,y) + C_0 \tag{2.30}$$

$$\varphi_1 = C_1 = Const \text{ -} \tag{2.31}$$

Підстановка (2.30) і (2.31) у (2.18) дає приватне рішення виду:

$$H(x,y,z) = -\frac{h^2}{2\mu} P(x,y)\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right) + zC_1 + C_0 - \frac{\rho}{\mu} Q(z)\,, \tag{2.32}$$

Граничні умови прилипання на нерухомих площинах призводять до постійності значень потенціалу на кожній із цих площин:

$$\text{при } z=-h: \quad H(x,y,-h) = -hC_1 + C_0 - \frac{\rho}{\mu} Q(-h) = C_{-h} = Const \tag{2.33}$$

$$\text{при } z=h: \quad H(x,y,h) = hC_1 + C_0 - \frac{\rho}{\mu} Q(h) = C_h = Const \tag{2.34}$$

дозволяють визначити константи C_0 і C_1.

$$C_0 = \frac{1}{2}(H(x,y,h) + H(x,y,-h)) + \frac{\rho}{2\mu}(Q(h) + Q(-h)) \tag{2.35}$$

$$C_1 = \frac{1}{2h}(H(x,y,h) - H(x,y,-h)) + \frac{\rho}{2\mu h}(Q(h) - Q(-h)) \cdot \qquad (2.36)$$

Підстановка отриманих коефіцієнтів у (2.32) призводить до виразу для потенціалу

$$H(x,y,z) = -\frac{h^2}{2\mu}P(x,y)\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right) + \frac{1}{2}\left(C_h + \frac{\rho Q(h)}{\mu}\right)\left(1+\frac{z}{h}\right) + \frac{1}{2}\left(C_{-h} + \frac{\rho Q(-h)}{\mu}\right)\left(1-\frac{z}{h}\right) - \frac{\rho}{\mu}Q(z) \qquad (2.37)$$

З (2.36) видно, що коефіцієнт C_1 породжує несиметрію відносно плоскості z = 0 у виразі для потенціалу (2.37). При рівності постійних значень функцій $\varphi(x,y,z)$ і $Q(z)$ на обох границях (умова симетрії течії)

$$H(x,y,h) = H(x,y,-h) = C_h, \quad Q(z) = Q(-z) \qquad (2.39)$$

для констант C_0 і C_1 справедливо:

$$C_0 = C_h + \frac{\rho}{\mu}Q(h), \quad C_1 = 0. \qquad (2.40)$$

Вираз для $H = H(x,y,z)$ істотно спрощується:

$$H(x,y,z) = -\frac{h^2}{2\mu}P(x,y)\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right) + \left(C_h + \frac{\rho(Q(h) - Q(h))}{\mu}\right) \qquad (2.41)$$

В силу умов симетрії (2.39), для екстримального (при z = 0) значення потенціалу виходить:

$$H_{\max_z}(x,y,z) = -\frac{h^2}{2\mu}P(x,y) + \left(C_h + \frac{\rho(Q(h) - Q(0))}{\mu}\right) \qquad (2.42)$$

або інакше

$$H_{\underset{z}{\max}}(x,y,z) = H(x,y,0) = -\frac{h^2}{2\mu}P(x,y) + Const \qquad (2.43)$$

Для усередненого по товщині шару значення потенціалу виходить:

$$\overline{H}(x,y) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} H(x,y,z)dz = -\frac{h^2}{2\mu}\int_{-h}^{h} P(x,y)\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)dz + \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} Conct_1 dz \qquad (2.44)$$

$$\overline{H}(x,y) = -\frac{h^2}{3\mu}P(x,y) + Const_2 \qquad (2.45)$$

Таким чином, з (2.43), (2.45) випливає, що поля швидкостей для максимального і усередненого по товщині шару, відповідають течіям із заданими потенціалами (2.43), (2.45), що є класичним рішенням для течії Hele-Shaw [158,173].

З (2.29) випливає, що в шарі швидкості приймають найбільші значення при z = 0

$$(u_{\max}, v_{\max}) = \nabla_{xy} H(x,y,0) = -\frac{h^2}{2\mu}\nabla_{xy}P(x,y), \qquad (2.46)$$

а осереднені по товщині шару значення швидкості

$$(\overline{u},\overline{v}) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \nabla_{xy}H(x,y,z)dz = -\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \frac{h^2}{2\mu}\nabla_{xy}P(x,y)\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)dz = -\frac{h^2}{3\mu}\nabla_{xy}P(x,y). \qquad (2.47)$$

Значення $Const_1$ і $Const_2$ у (2.43) і (2.45) визначаються з (2.41):

$$Const_1 = C_h + \frac{\rho}{\mu}(Q(h) - Q(0)) \qquad (2.48)$$

$$Const_2 = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left(C_h + \frac{\rho}{\mu}(Q(h) - Q(z))\right)dz \cdot \qquad (2.49)$$

Стаціонарна шарувата повзуча течія між двома паралельними площинами. Течія викликається рухом дотичних швидкостей в площині однієї з меж (аналог течії Куетта) і заданим градієнтом тиску в площині течії.

Задача про знаходження рішення для шаруватої повзучої течії над нерухомою площиною, із заданим розподілом дотичних швидкостей на верхній межі при заданому градієнті тиску $\nabla P(x, y) \neq 0$ (рис.2.2), зводиться до знаходження функціональних коефіцієнтів $H_0(x, y)$, $H_1(x, y)$, для функції $H = H(x, y, z)$, представленої у вигляді (2.17), з граничними умовами прилипання до нерухомої і рухомої границям – паралельним площинам (при z=0 і при $z=h$, рис. 2.2).

Вираз для швидкостей в шарі визначається через похідні від представлення (2.17) і мають вигляд

$$\nabla_{xy} H(x, y, z) = \frac{z^2}{2\mu}\nabla_{xy} P(x, y) + z\vec{V}_1(x, y) + \vec{V}_0(x, y), \qquad (2.50)$$

з умовами прилипання:

$$(u, v)\big|_{z=0} = \nabla_{xy} H(x, y, 0) = (0,0) \text{ при } z = 0, \qquad (2.51)$$

$$(u, v)\big|_{z=h} = \nabla_{xy} H(x, y, h) = \vec{V}_h(x, y) \text{ при } z = h. \qquad (2.52)$$

При підстановці в (2.50) в крайові умови (2.51) і (2.52) отримуємо систему лінійних рівнянь щодо визначення $\vec{V}_1$ і $\vec{V}_0$ векторних функцій:

$$\vec{V}_0 = (0,0), \qquad \text{при } z = 0 \qquad (2.53)$$

$$\frac{h^2}{2\mu}\nabla_{xy}P + h\vec{V}_1 + \vec{V}_0 = \vec{V}_h(x,y)\,,\ \text{при}\ z = h \tag{2.54}$$

Рішення для векторних функцій $\vec{V}_0$ і $\vec{V}_1$ має вигляд:

$$\vec{V}_0 = (0{,}0)\,, \tag{2.55}$$

$$\vec{V}_1 = \frac{1}{h}(\vec{V}_h(x,y) - \frac{h^2}{2\mu}\nabla_{xy}P(x,y))\,, \tag{2.56}$$

При підстановці отриманих векторних функцій $\vec{V}_0$ і $\vec{V}_1$ в (2.50) маємо розв'язок вигляду

$$(u,v) = \nabla_{xy}H(x,y,z) = \frac{z}{h}\vec{V}_h(x,y) - \frac{h^2}{2\mu}\nabla_{xy}P(x,y)\frac{z}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right). \tag{2.57}$$

У випадку, коли поле швидкостей $\vec{V}_h(x,y)$ при z=h допускає потенціал $\Phi = \Phi(x,y)$, такий, що $\vec{V}_h(x,y) = \nabla_{xy}\Phi(x,y)$, розв'яок (2.57) може бути представлений у вигляді:

$$(u,v) = \nabla_{xy}H(x,y,z) = \nabla_{xy}\left(\frac{z}{h}\Phi(x,y) - \frac{h^2}{2\mu}P(x,y)\frac{z}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)\right) \tag{2.58}$$

Причому, при z=h, видно, що $\Phi(x,y) \equiv H(x,y,h) + const$,

З (2.46), умови при $z = 0$, витікає, що

$$H_0(x,y) = C_0 = Const\,, \tag{2.59}$$

З (2.47), умови при $z = h$, витікає, що

$$H_1(x,y)=\frac{1}{h}(H(x,y,h)-\frac{h^2}{2\mu}P(x,y))+C_1\,, \tag{2.60}$$

в силу чого

$$H(x,y,z)=-\frac{h^2}{2\mu}P(x,y)\frac{z}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)+\frac{z}{h}\left(H(x,y,h)+C_1\right)+C_0-\frac{\rho}{\mu}Q(z) \tag{2.61}$$

У припущенні, що поверхнева течія потенційна

$$\vec{V}_h(x,y)=\nabla_{xy}H(x,y,h)\,, \tag{2.62}$$

розв'язок (58) може бути представлений у вигляді:

$$(u,v)=\nabla_{xy}H(x,y,z)=\nabla_{xy}\left(\frac{z}{h}H(x,y,h)-\frac{h^2}{2\mu}P(x,y)\frac{z}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)\right) \tag{2.63}$$

У такому разі, для усередненого по шару руху,

$$(\overline{u},\overline{v})=\frac{1}{h}\int_0^h\ \nabla_{xy}H(x,y,z)dz=\frac{1}{h}\int_0^h\ \nabla_{xy}\left(\frac{z}{h}H(x,y,h)-\frac{h^2}{2\mu}P(x,y)\frac{z}{h}\left(1-\frac{z}{h}\right)\right)dz \tag{2.64}$$

видно, що значення усереднених по шару швидкостей визначається рухом на поверхні шару

$$(\overline{u},\overline{v})=\frac{1}{h}\int_0^h\ \nabla_{xy}H(x,y,z)dz=\frac{1}{2}\vec{V}_h(x,y)+\frac{h^2}{12\mu}\nabla_{xy}P(x,y)\,. \tag{2.65}$$

або

$$(\bar{u},\bar{v}) = \frac{1}{h}\int_0^h \nabla_{xy} H(x,y,z)dz = \nabla_{xy}\left(\frac{1}{2}H(x,y,h) + \frac{h^2}{12\mu}P(x,y)\right). \qquad (2.66)$$

А усереднений по шару «потенціал течії» [21-25, 27] визначається поверхневим потенційним перебігом та розподіленням тисків у вигляді

$$\overline{H}(x,y) = \frac{1}{h}\int_0^h H(x,y,z)dz = \frac{h^2}{6\mu}P(x,y) + \frac{1}{2}\left(H(x,y,h) - \frac{h^2}{2\mu}P(x,y) + C_1\right) + C_3 \qquad (2.67)$$

або

$$\overline{H}(x,y) = \frac{1}{h}\int_0^h \overline{H}(x,y,z)dz = \frac{1}{2}H(x,y,h) - \frac{h^2}{12\mu}P(x,y) + \frac{1}{2}C_1 + C_3 \qquad (2.68)$$

де

$$C_3 = \frac{1}{h}\int_0^h \left(C_0 + \frac{\rho}{\mu}Q(z)\right)dz \qquad (2.69)$$

Нестаціонарні шаруваті течії

Розглядається нестаціонарна шарувата повзуча течія між двома нерухомими паралельними площинами. Вважаться, що течія викликається градієнтом тиску. Для випадку повільної нестаціонарної шаруватої течії [173,239] рівняння (2.15) набуде вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t}H(x,y,z,t) = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial z^2}H(x,y,z,t) + q(z,t) - \frac{P(x,y,t)}{\rho} \quad , \qquad (2.70)$$

або, в термінах рівняння для швидкостей $(u,v) = \nabla_{xy}\varphi$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_{xy}H(x,y,z,t)=\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\nabla_{xy}H(x,y,z,t)-\frac{\nabla P(x,y,t)}{\rho} \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{V}(x,y,z,t)=\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{V}(x,y,z,t)-\frac{\nabla P(x,y,t)}{\rho} \quad (2.71')$$

з граничними умовами прилипання на площинах

при $z=\pm h$: $\vec{V}\Big|_{z=\pm h}=(u,v)\ \Big|_{z=\pm h}=\nabla_{xy}\varphi=(0,0)$. (2.72)

Наслідком яких буде

при $z=h$: $H(x,y,h,t)=C_{+h}(t)$ (2.73)

при $z=-h$: $H(x,y,-h,t)=C_{-h}(t)$ (2.74)

при однакових значеннях

$$z=\pm h:\ H(x,y,h,t)=H(x,y.-h,t)=Const(t)\,. \quad (2.75)$$

З початковими умовами :

при $t=0$:

$$H(x,y,z,0)=\Phi(x,y,z)=-\frac{h^2}{2\mu}P(x,y)\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)+zC_1+C_0-\frac{\rho}{\mu}Q(z)\,, \quad (2.76)$$

чи

$$P(x,y,0)=P(x,y),\ \varphi(x,y,z,0)=\Phi(x,y,z)=-\frac{h^2}{2\mu}P(x,y,0)\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)+zC_1+C_0-\frac{\rho}{\mu}Q(z) \quad (2.77)$$

З початковими умовами в термінах для швидкостей $(u,v)=\nabla_{xy}H$:

При $t=0$:

$$\vec{V}\Big|_{t=0} = \vec{V}(x,y,z,o)\Big| = (u(x,y,z,0), v(x,y,z,0))\ \Big|_{t=0} = \nabla_{xy}\Phi(x,y,z) = \frac{h^2}{2\mu}\nabla_{xy}P(x,y,0)\left(\frac{z^2}{h^2}-1\right) \quad (2.78)$$

Розв’язок початково-краєвої задачі для параболічного рівняння має представлення у вигляді:

$$\vec{V}(x,y,z,t) = (u(x,y,z,t), v(x,y,z,t)) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\vec{V}(x,y,\xi,0)\sin\frac{\pi n}{h}\xi d\xi\right)e^{-\left(\frac{\pi n\sqrt{\mu}}{h\sqrt{\rho}}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{h}z + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{h\rho}\int_{0}^{t}\int_{-h}^{h}\nabla_{xy}P(x,y,\tau)e^{-\left(\frac{\pi n\sqrt{\mu}}{h\sqrt{\rho}}\right)^2(t-\tau)}\sin\frac{\pi n}{h}\xi d\xi d\tau\right)\sin\frac{\pi n}{h}z \quad (2.79)$$

або

$$\vec{V}(x,y,z,t) = (u(x,y,z,t), v(x,y,z,t)) = \frac{h^2}{2\mu}\nabla_{xy}P(x,y,0)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}(\frac{\xi^2}{h^2}-1)\sin\frac{\pi n}{h}\xi d\xi\right)e^{-\left(\frac{\pi n\sqrt{\mu}}{h\sqrt{\rho}}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{h}z \quad (2.80)$$

$$\vec{V}\Big|_{t=0} = \vec{V}(x,y,z,o)\Big| = (u(x,y,z,0), v(x,y,z,0))\ \Big|_{t=0} = \nabla_{xy}\Phi(x,y,z) = \frac{h^2}{2\mu}\nabla_{xy}P(x,y,0)\left(\frac{z^2}{h^2}-1\right) \quad (2.81)$$

Нижче представлено систему розщеплення вихідної задачі на систему задач та представлено математичні моделі. Вихідна задача вважається поставленою, при визначені для рівнянь, крайових та початкових умов.

Задачі для різномасштабних процесів.

Задача 1. Вихідними рівняннями (в безрозмірному вигляді) з визначеними початковими та крайовими умовами прилипання, заданими на границях області, є рівняння Нав’е-Стокса, які описують рух в’язкої нестисливої рідини:

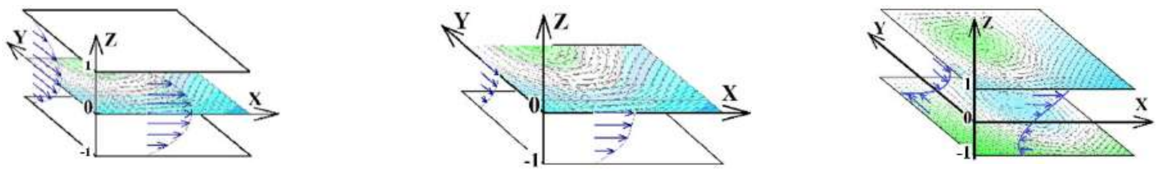
$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)\vec{V} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{F} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\vec{V}, \quad (2.82)$$

$$\nabla\vec{V} = 0, \quad (2.83)$$

де ∇ – оператор Гамільтона, $\vec{V}(x,y,z,t) = (u(x,y,z,t), v(x,y,z,t), w(x,y,z,t))$ – вектор швидкостей рідини в тривимірному просторі, ρ – щільність рідини, $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ – вектор масових сил, $P = P(x,y,z,t)$ – скалярна функція тиску, $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho L V_0}{\mu}$ -число Рейнольдса, де μ – коефіцієнт динамічної в'язкості рідини, L – характерний розмір задачі, V_0 – характерна швидкість задачі.

Задача 2 формулюється при виконанні системи припущень. Так, для течій поміж паралельних площин (рис. 2.5) припускається, що компонента швидкості уздовж осі OZ вважається такою, що дорівнює нулю. Також вважається, що при будь-яких *z* і *t* існує безперервно диференційована функція $H = H(x,y,z,t)$ така, що для компоненти швидкості справедливо:

$$u(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial x} H(x,y,z,t),\; v(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial y} H(x,y,z,t),\; w(x,y,z,t) \equiv 0 .$$



а) Течія поміж двох нерухомих паралельних площин

б) Течія над нерухомою площиною

в) течія в шару між двох рухомих паралельних площин з заданим розподілом швидкостей

Рисунок 2.5 – Схема течій поміж двох паралельних площин

У припущенні про консервативність поля зовнішніх сил маємо на увазі, що існує $U = U(x,y,z)$, така що $\vec{F} = \nabla U$. В даному випадку рівняння (2.82), (2.83) призводять до наступної задачі – моделей течії в плоскому каналі з криволінійними межами та перешкодами (рис. 2.5)

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right)+\frac{p}{\rho}-U(x,y,z)-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=q(z,t)\ , \qquad (2.84)$$

з граничними умовами прилипання на паралельних площинах (згідно рис. 2.5):

а) $\left(H_x^{'}(x,y,\pm 1,t),H_y^{'}(x,y,\pm 1,t),0\right)=(0,0,0)$; (2.85)

б) $\left(H_x^{'}(x,y,0,t),H_y^{'}(x,y,0,t),0\right)=\vec{V}_0(x,y,0,t)$,

$\left(H_x^{'}(x,y,-1,t),H_y^{'}(x,y,-1,t)\right)=(0,0,0)$; (2.85')

в) $(u,v,0)\big|_{z=\pm 1}=\left(H_x^{'}(x,y,\pm 1,t),H_y^{'}(x,y,\pm 1,t),0\right)=\vec{V}_{\pm 1}(x,y,t)$. (2.85")

де $\vec{V}_{\pm 1}(x,y,t)$, $\vec{V}_0(x,y,t)$ –векторні функції, які визначені умовами приліпання.

В межах шару між площинами визначається умова непроникнення

$$\left((H'_x\,,H'_y\,,0)\cdot\vec{n}\right)\Big|_{L_D}=\vec{W}_n\Big|_{L_D}\ , \qquad (2.86)$$

де $\vec{n}\big|_{L_D}=(n_x,n_y,o)$ є паралельним площинам, а в правій частині визначено, нормальну компоненту руху $\vec{W}_n\big|_{L_D}$ межі $L_d(t)$ (перешкоди, з направляючою $L_d(t)$, Рис. 2.5 – 2.6) та заданими нижче початковими умовами:

$$t=0:\ \vec{V}(x,y,z,0)=0. \qquad (2.87)$$

Права частина рівняння (2.84) визначає незалежність усього комплексу зліва від пари координат $(x,\,y)$, тому припускається, що невідома функція може мати представлення у вигляді

$$H(x,y,z,t)=\phi(x,y,t)R(z)\ , \qquad (2.88)$$

При визначених $P_0 = P(x_0, y_0, z, t)$, $H_0 = H(x_0, y_0, z, t) = \phi(x_0, y_0, t)R(z)$, $\vec{V}_0 = \nabla\phi(x_0, y_0, t)$ в точці (x_0, y_0) рівняння (2.84) набуває вигляду звичайного диференційного рівняння відносно функції $R = R(z)$:

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}(\phi-\phi_0)\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = \frac{R^2}{2}\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 - V_0^2\right) + R\frac{\partial(\phi-\phi_0)}{\partial t} + \frac{P(x,y,t)-P_0}{\rho} \quad . \qquad (2.89)$$

Тобто, для визначення $R = R(z)$, при заданих a,b,c коефіцієнтах маємо

Задача 2.1

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2R}{dz^2} = aR^2 + bR + c\,. \qquad (2.90)$$

Рівняння вигляду (2.90) має розв'язок в квадратурах та визначає $R = R(z)$ при умовах, прилипання на площинах (згідно рис. 2.5):

$$\text{а) } R(\pm 1) = 0; \text{ б) } R(0) = 1,\ R(-1) = 0; \text{ в) } R(\pm 1) = 1\,. \qquad (2.91)$$

Частковий розв'язок рівняння (2.90) може бути представлено в вигляді

$$\mathrm{R(z)} - \mathrm{R}_0 = \frac{6}{a(z-z_0)^2\,\mathrm{Re}}$$

Видно, що в залежності від констант R_0 z_0 та коефіцієнту, a крива графіка рис. 2.6 буде співпадати з профілем швидкості при помірних числах Рейнольдса, наведеному на рис. 2.7.

$$\wp(\mathrm{z}) = \wp(\mathrm{z}|\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\mathrm{z}^2} + \sum_{\mathrm{m,n}} \left[\frac{1}{(\mathrm{z} - m\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)} \right]$$

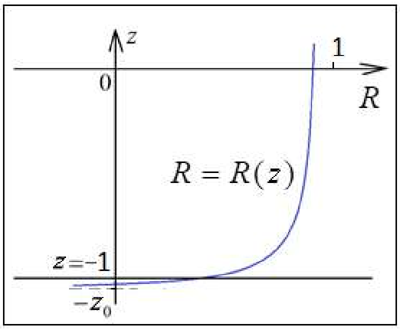


Рисунок 2.6 –

Профіль швидкостей в шару, що відповідає частковому розв’язку

$$\mathrm{R(z)} - \mathrm{R}_0 = \frac{6}{a(z - z_0)^2 \,\mathrm{Re}}$$

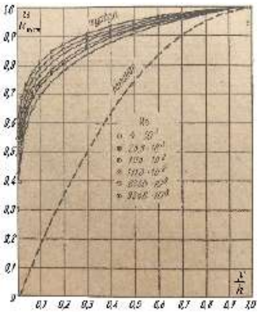


Рисунок 2.7 –

Профіль швидкості навколо стінки при помірних числах Рейнольдса [173].

Слід зазначити, що тільки один частковий розв’язок нелінійного рівняння (2.90) відповідає профілю швидкості при помірних числах Рейнольдса, наведеному на рис. 2.7 .

При $R = 1$ (2.84), з функцією (2.88) перетворюється на інтеграл Коші-Лагранжа:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \right) + \frac{p}{\rho} - U(x, y, z) = q(z_0, t) = const \quad . \qquad (2.92)$$

Для визначення циркуляційної течії ідеальної нестисливої рідини, в області, поза рухомих границь $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ (рис. 2.8 – рис. 2.9, де $L_d(t)$ – границя, рух точок якої задається швидкістю $\vec{W}_d$, $L_v(t)$ – вільна границя – лінія розриву дотичних швидкостей, а швидкість її руху $\vec{W}_v$ визначається з розв'язку задачі), формулюється задача знаходження функції $\phi = \phi(x, y, t)$ з параметром *t*, в двовимірної області з непроникною рухомою границею.

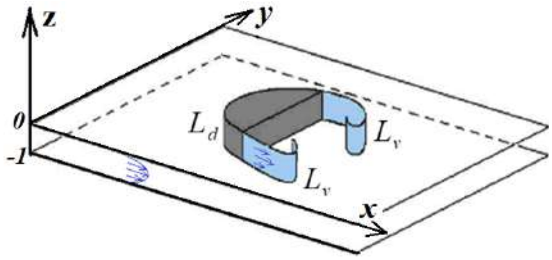


Рисунок 2.8 –
Схема течії над площиною, в шару з перешкодою

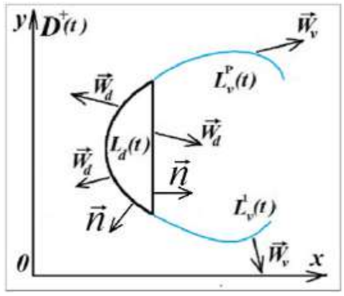


Рисунок 2.9 –
Схема течії в шару над площиною з перешкодою

Задача 2.2 Знайти гармонічну в площині ОХУ функцію $\phi = \phi(x, y, t)$ (таку, що $\vec{V} = \nabla\phi$ та яка має параметричну залежність від часу *t)* , яка задовольняє рівнянню:

$$\text{при } t \ge t_0 :\ \Delta\phi = 0 \text{ , для } \vec{r} \in D^+ , \tag{2.93}$$

з крайовими умовами на рухомих границях $L_d(t)$:

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{L_d} = \left.\left(\vec{W}_d, \vec{n}\right)\right|_{L_d} \tag{2.94}$$

з крайовими умовами на вільних границях $L_v(t)$:

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{L_v}^{+} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{L_v}^{-} \tag{2.95}$$

$$\frac{d}{dt}\left.\left(\phi^+ - \phi^-\right)\right|_{L_v} = 0 \tag{2.96}$$

з умовами для зовнішній задачі: $\lim\limits_{|r-r_L|\to\infty} \nabla\phi = \vec{V}_\infty$. (2.97)

Для внутрішньої задачі задаються умови на проникний частині границі області $L_Q \in L_d(t)$ (на вході в область D^+):

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{L_Q} = W_Q \text{ , або } \int\limits_{L_Q} \frac{\partial\phi}{\partial n} ds = Q \qquad (2.97')$$

де W_Q – швидкість течії скрізь $L_Q \in L_d(t)$, або задається миттєва витрата через перетин $L_Q \in L_d(t)$ і з початковими умовами, при $t = t_0$:

$$L_d(t_0) = L_{od}, L_v(t_0) = L_{0v} . \qquad (2.98)$$

Розв’язок φ завдання розглядається в класі $C^2(D^+(t)) \cap C^1(\overline{D}^+(t))$,

$$\text{тобто } |\Delta\phi| < \infty \text{ на } L(t), \qquad (2.99)$$

Остання умова є еквівалентною умові Кутта-Жуковського на кінцівках та на зламах контуру $L_d(t)$, яка природно задовольняється у відривних течіях, з породженням на гострих кінцівках і зламах контуру $L_d(t)$ нових елементів вільних границь $L_v(t)$.

Слід зазначити, що задача (2.93) – (2.99), з умовами Неймана (2.94) на $L_d(t)$, з умовами Неймана (2.95) і умовами (2.96) типу Діріхле, на $L_v(t)$, а так само з умовами (2.97) на ∞ є нелінійної задачею з вільною, рухомою границею $L_v(t)$.

В таких задачах рух невідомої вільної границі $L_v(t)$ визначається полем швидкостей $\vec{V} = \nabla\phi$, яке знаходиться з рішення задачі (2.93) – (2.99).

Форма області $\overline{D}^{+}(t)$ визначається геометрією рухомих границь $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$. Зміна $L_d(t)$ задається переміщення точок $r_d \in L_d$ за законом руху, або визначається із задачі Коші при заданій правій частині

$$\frac{d\vec{r}_d}{dt} = \vec{W}_d(\vec{r}_d, t), \tag{2.100}$$

з початковими умовами при $t = t_0 : L_d(t_0) = L_{0d}$. (2.101)

Зміна вільної границі $L_v(t)$ визначається з рішення задачі Коші для частинок, $\vec{r}_v(t) \in L_v(t)$ які визначають її рух:

$$\frac{d\vec{r}_v}{dt} = \vec{W}_v(\vec{r}_v, t), \tag{2.102}$$

при заданих початкових умовах $t = t_0 : L_v(t_0) = L_{0v}$, (2.103)

де права частина, для (22): $\vec{W}_v(\vec{r}_v, t) = \frac{1}{2}(\nabla\varphi^{+}(\vec{r}_v, t) + \nabla\varphi^{-}(\vec{r}_v, t))$ (2.104)

Розв'язання задач (2.93) – (2.99) і (2.100) – (2.104) в виділеному класі функцій (2.99) можливо при виконанні умов гладкості меж, яка забезпечується основним фактором фізичного процесу – виникненням відриву, який задовольняє критерію гладкості Вілля. Таким чином, умова Кутта-Жуковського на всіх зламах і кінцях кордонів виконується при природному виникненні відривів.

Розв'язок Задачі 2.2 суттєво залежить від порядку зв'язності області.

В силу мінливості області із заздалегідь невідомою формою частини границь, рішення конкретної задачі про нестационарном обтіканні непроникних рухомих меж можливо тільки чисельними методами.

2.2.1.2. Постановка двовимірної задачі масопереносу (адвекції) в шару із додатковими впливами

Перемішування виділеної пасивної рідини в різних течіях є складним природним явищем, яке включає два найважливіших процеси: деформацію плями в заданому полі швидкості і розмив границі плями молекулярною дифузією. Аналіз геометричних і часових масштабів течій дозволяє в деяких випадках знехтувати дифузійними ефектами, і проблема перемішування зводиться до аналізу деформації виділених областей рідини в заданому полі швидкості. Така завдача в науковій літературі отримала назву задачі про адвекцію [104,105,182,288]. Пасивна рідка частинка завжди переміщається зі швидкістю зовнішнього навколишнього потоку.

Отже, адвекція рідини фактично зводиться до аналізу траєкторій системи лагранжевих частинок в ейлеровом полі швидкості [107,110,281]. Головна складність цієї задачі пов’язана з переходом від руху дискретної системи рідких частинок до деформацій неперервних ліній, що обмежують виділену рідину.

Аналіз процесу адвекции істотно спрощується, якщо в початковий момент виділити границю області забруднення системою пасивних точок (маркерів) і стежити за їх еволюцією в часі. Впорядковане з’єднання послідовності маркерів для поточного моменту часу дозволяє сформувати нове положення межі виділення течії, які при інтенсивних режимах адвекції зазнають істотного розтягу.

Задача (2.105), (2.106) – задача масопереносу та адвекції. Масоперенос, у даному випадку, розглядається як адвекція пасивної домішки (виділеного об’єму маркування частинок) в заданому полі швидкостей.

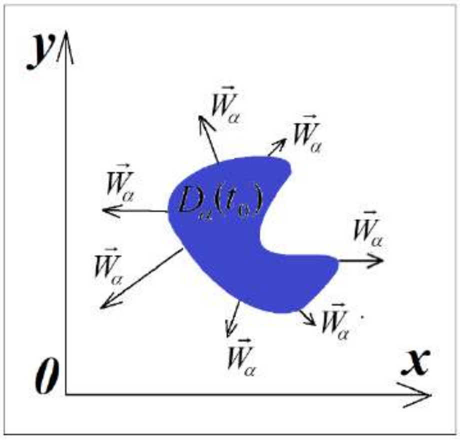


Рис.2.9’. Рух виділеного об’єму маркування частинок.

Визначення переміщення виділеного об’єму частинок визначається переміщенням маркованих частинок, які утворюють контур границі виділеного об’єму в заданому полі швидкостей $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$. Із застосуванням підходу Лагранжа задача адвекції зводиться до задачі Коші, з визначення руху кожної маркованої $\vec{r}_\alpha(t) \in D_\alpha(t)$ частинки з виділеного і маркованого об’єму $D_\alpha(t)$:

$$\frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = \vec{W}_\alpha(\vec{r}_\alpha, t), \tag{2.105}$$

$$\vec{r}_\alpha(t_0) \in D_\alpha(t_0) \tag{2.106}$$

має назву рівняння адвекції в задачах масопереносу.

Для визначення масопереносу та адвекції необхідно розв’язувати дві задачі одночасно: задачу (2.93)-(2.104) з визначення миттєвого поля швидкостей в області із заданими властивостями її границь (непроникність, рухомість, розтягнення з породженням нових елементів границь області – ліній розриву неперервного поля швидкостей), та задачу (2.105), (2.106) з визначення геометричної форми підобласті $D_\alpha(t)$ з маркованими частинками, рух яких визначається розрахованим, змінним в часі, полем швидкостей $\vec{W}_\alpha(\vec{r}_\alpha(t),t) = \vec{V}(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, t)$.

Іншими словами, адвекція рідини фактично зводиться до аналізу траєкторій системи лагранжевих рідких частинок в ейлеровому полі швидкості [28]. Головна складність цієї задачі пов’язана з переходом від опису руху дискретної системи рідких частинок до опису деформації неперервних ліній (в двомірному випадку) і поверхонь (в тривимірному випадку), що обмежують виділену рідину.

Вивчення процесу адвекції істотно спрощується, якщо в початковий момент виділити границю області забруднення на морській поверхні системою пасивних точок (маркерів) і стежити за їх еволюцією в часі. Впорядковане з’єднання послідовності маркерів для поточного моменту часу дозволяє сформувати нове положення границі виділеної області течії.

Визначення правої частині рівняння (2.105) є окремою гідродинамічною задачею. Необхідно визначити вектор $\vec{V} = \vec{V}(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, t)$ в області зі складною геометрією обмежуючих поверхонь. Для знаходження розв’язку цієї задачі можна застосувати метод дискретних особливостей, адаптований до проблем адвекції [108,109]. Надалі для ідентифікації позначень вкажемо нижче основні етапи розв’язування гідродинамічної задачі.

Найпоширенішими методами аналізу деформації контурів при адвекції рідин є інтерполяційні методи, наприклад, метод нормованої кубічної інтерполяції [12], які по конфігурації маркерів визначають просторове положення додаткових маркерів на даному контурі. Однак, при хаотичних режимах адвекції, часто виникають злами контурів. Інтерполяція таких ділянок неперервними функціями призводить до появи великих обчислювальних похибок, які зростають у часі надзвичайно швидко.

Цей недолік усунуто в методі кускової сплайн-інтерполяції [281], який спочатку виділяє гладкі фрагменти контурів і потім на них будує кубічний сплайн згладжувального типу. Порівняння точності інтерполяції різними методами показало, що найкраща інтерполяція досягається при використанні методу кускової сплайн-інтерполяції, який і використовується в подальших обчисленнях.

2.2.2. Постановка двовимірної задачі для динамічної системи

В якості динамічної системи розглядається вітроротор з вертикальною віссю. Аналіз структури течії навколо ротору з вертикальною віссю надає можливість застосовувння методу плоских перерізів при постановці задач та зведення тривимірної задачі до двовимірної. Модель тривимірного ротору з рухомими лопатями може бути приведено(в плщині переру) до моделі із системою двовимірних рухомих контурів [167,169,170].

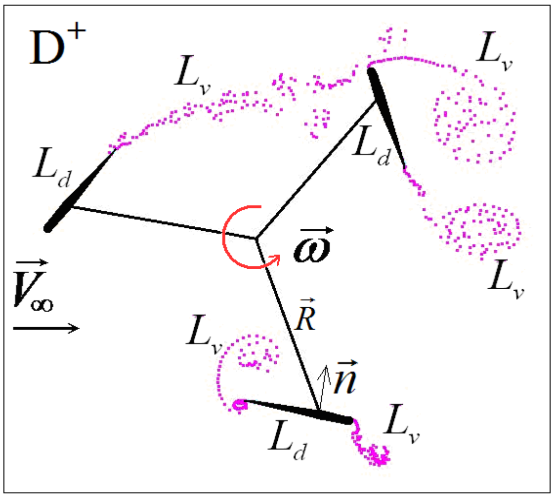


Рисунок 2.10. – Схема ротора Дар’є.

Для потенційної течії всередині області $D^+(t)$ зовні рухомих границь: $L_d(t)$ – детермінованої, $L_v(t)$ – вихрової (рис. 2.10) розглядається математична задача для знаходження потенціалу φ, для якого швидкість течії $\vec{V} = \nabla\varphi$:

$$t \geq t_0 : \ \Delta\varphi = 0 \ \text{в} \ D^+ \qquad (2.107)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = W_n^* \quad \text{на } L_d(t) \text{ – рухомих крилах} \qquad (2.108)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^+ = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^- \quad \text{на } L_v(t) \text{ –вільної (вихоровій) границі} \qquad (2.109)$$

$$P^+ = P^- \ \text{на } L_v \text{ -вільної (вихрової) границі} \qquad (2.110)$$

$$\text{де } \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{P}{\rho} = \frac{P_\infty}{\rho} + \frac{1}{2}V_\infty^2 + \frac{\partial\varphi_\infty}{\partial t} \qquad (2.111)$$

$$\lim_{|r-r_L|\to\infty} \nabla\varphi = \vec{V}_\infty \quad \text{на } \infty \qquad (2.112)$$

$$\lim_{|r-r_L|\to\infty} P = P_\infty \quad \text{на } \infty \qquad (2.113)$$

$$\lim_{|r-r_L|\to\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi_\infty}{\partial t} \quad \text{на } \infty \qquad (2.114)$$

$$\text{при } t = t_0 : \ L_d(t_0) = L_{d0}, L_v(t_0) = L_{v0}, \varphi \Big|_{t=0} = \varphi_0 \qquad (2.113)$$

Розв’язок шукається у класі функцій

$$\left|\nabla\varphi\right| < \infty, \qquad (2.114)$$

що на гострих кромках крил відповідає умові Жуковського-Кутта.

Нормальна швидкість W_n^* в кожної точці лопаті-крила визначається проекцією на нормаль $\vec{n}$ до лопаті-крила $L_d(t)$ векторного здобутку швидкості її обертання $\vec{\omega}$ навколо вісі на вектор $\vec{R}(t)$, який визначає відстань від вісі обертання

$$W_n^* = [\vec{\omega} \times \vec{R}(t)] \cdot \vec{n} \qquad (2.115)$$

2.2.3. Постановка тривимірної задачі для струменевих та вихрової структур

Тривимірні задачі з відривними циркуляційними та струменевими течіями розглядаються в припущені, що число Рейнольдса $\mathrm{Re} \to \infty$ та вихор швидкості $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$ є фінітною функцією, носій якою є локалізованою (та в загальному випадку неоднозв'язною) областю.

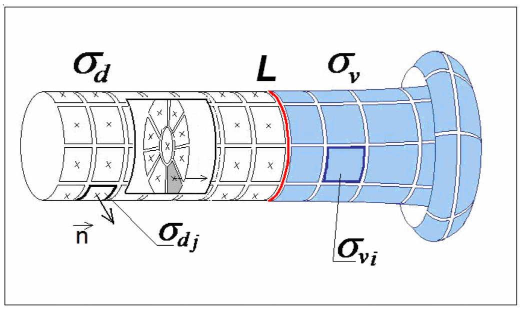


Рисунок 2.11. – Схема для моделі з не однозв'язаною границею.

Розглядаючи рухомі границі $\sigma(t) = \sigma_d(t) + \sigma_v(t)$ вже, в якості гладких обмежуючих поверхонь, отримуємо

Задачу (2.116) - (2.121) щодо знаходження функції $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ – потенціалу, для якого швидкість $\vec{V} = \nabla\varphi$:

при $t \geq t_0$: $\Delta\varphi = 0$, для $\vec{r} \in D^+$, (2.116)

з крайовими умовами на рухомих границях $\sigma_d(t)$:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\sigma_d} = \left.\left(\vec{W}_d, \vec{n}\right)\right|_{\sigma_d} \qquad (2.117)$$

з крайовими умовами на вільних границях $\sigma_v(t)$:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\sigma_v}^{+} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\sigma_v}^{-} \qquad (2.118)$$

$$\left.\frac{d}{dt}\left(\varphi^+ - \varphi^-\right)\right|_{L_v} = 0 \qquad (2.119)$$

з умовами для зовнішній задачі: $\lim\limits_{|r - r_L| \to \infty} \nabla\varphi = \vec{V}_\infty$. (2.120)

Умови для внутрішньої задачі задаються на проникній частині границі області $\sigma_Q(t) \in \sigma_d(t)$ (на вході в область D^+):

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\sigma_Q} = W_Q \text{ , або } \int\limits_{\sigma_Q} \frac{\partial\phi}{\partial n} d\sigma = Q \qquad (2.120')$$

де W_Q – швидкість течії крізь $\sigma_Q(t) \in \sigma_d(t)$, або задається миттєвий викид через перетин $\sigma_Q(t) \in \sigma_d(t)$ і з початковими умовами, при $t = t_0$:

$$\sigma_d(t_0) = \sigma_{d0}(t), \quad \sigma_v(t_0) = \sigma_{v0} \text{ ,} \qquad (2.121)$$

Розв'язок $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ розглядається в класі $C^2(D^+(t)) \cap C^1(\overline{D}^+(t))$.

Зміна вільної границі $\sigma_v(t)$ також, визначається з рішення задачі Коші (2.105)-(2.106) для частинок, $\vec{r}_v(t) \in \sigma_v(t)$ які визначають її рух.

2.3. Математичні моделі на основі інтегральних представлень при застосуванні підходу Лагранжа

2.3.1. Математична модель течії в шару з перешкодами та з додатковими впливами

Для вирішення плоскої задачі (2.93) – (2.99) про нестаціонарне обтікання непроникних рухомих зі швидкостями $\vec{W}_d$ і $\vec{W}_v$ границь- контурів $L_d(t)$ і $L_v(t)$, в деформованої області $D(t)$ застосовна

Математична модель 2.1 (з параметричної залежністю від часу t), яка в термінах теорії функцій комплексної змінної має інтегральні представлення:

$$\Phi(z,t) = \phi(x,y,t) + i\psi(x,y,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \gamma(\omega,t) \ln(z-\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \gamma(\omega,t) \ln(z-\omega) d\omega + \mathrm{C} \qquad (2.122)$$

$$\overline{V}(z,t) = u(x.y,t) - iv(x,y,t) = \frac{\partial \Phi(z,t)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \frac{\gamma(\omega,t)}{z-\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{\gamma(\omega,t)}{z-\omega} d\omega \qquad (2.123)$$

$$\Gamma_0 = \int_{L_d(t)} \gamma(\omega,t) d\omega + \int_{L_v(t)} \gamma(\omega,t) d\omega = const \quad , \qquad (2.124)$$

де (2.124) має сенс закону збереження циркуляції.

Для визначення $f(\omega,t)$ на межах $L_d(t)$, $L_v(t)$ і їх зміни, для (2.122), (2.123) потрібно задоволення інтегральним співвідношенням (2.125), отриманим з крайових умов (2.108), (2.109) і диференціальних рівнянь (2.105), (2.116)– аналогу крайових умов (2.126 на

$$L_d(t): \begin{cases} z = \omega_d(t) \in L_d, \quad t \geq t_0: \\ \mathrm{Re}\left\{\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_d} \dfrac{f(\omega,t)n(\omega_d)}{(\omega_d-\omega)} d\omega\right\} = W_n^* - \mathrm{Re}\left\{(\overline{V}_\infty + \overline{V}_{вітр})n(\omega_d) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_v(t)} \dfrac{f(\omega,t)n(\omega_d)}{(\omega_d-\omega)} d\omega\right\}, \\ \displaystyle\int_{L_{dj}} f(\omega_d,t)d\omega_d = -\int_{L_{v_j}(t)} f(\omega_V,t)d\omega_V + C_j,\ j = 1,2,... \end{cases} \quad (2.125)$$

$$\text{На } L_v(t): \begin{cases} z = \omega_V(t) \in L_v(t), \quad t > t_0: \\ \dfrac{d\overline{\omega}_v(t)}{dt} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_d} \dfrac{f(\omega,t)d\omega}{(\omega_v-\omega)} + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_v(t)} \dfrac{f(\omega,t)d\omega}{(\omega_v-\omega)}, \\ \omega_v = \omega_d \Rightarrow f(\omega_v,t) = f(\omega_d,t), \\ t = t_0 : L_v(t_0) = L_{v0} \end{cases} \quad (2.126)$$

Модель течії рідини доповнена впливом швидкості і напрямку вітру на швидкість течії на морській поверхні $W_n^* = (\vec{W} + \vec{U}^f)\vec{n}$

Рис. 2.12 показує залежність середньої швидкості поверхневого течії U_f від середньої швидкості вітру U_w, яку представлено за табличними даними в роботі [107].

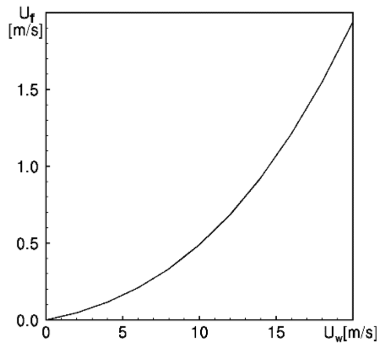


Рисунок 2.12 – Вплив швидкості і напрямку вітру на швидкість течії на морській поверхні, де W_n^* – додаткова швидкість, що виникає під впливом вплив вітру в поверхневому шарі акваторії

Врахування впливу швидкості і напрямку вітру на швидкість течії на морській поверхні забезпечено «присутністю вітру» в правої частині системи рівнянь. Вплив забезпечує вортонна модель хмари, яка є модельним представленням елемента циклону. Рисунок 2.13 показує залежність середньої швидкості поверхневого течії U_f від середньої швидкості вітру U_w, яка побудована за табличними даними в роботі [107] в помірному діапазоні значень швидкості вітру. Вплив вітру враховано шляхом введення системи K фіксованих вортонів (vortons - GA) з однаковою інтенсивністю Г, розташованих на висоті h над поверхнею моря з напрямком вектора завихореності ω, який показано на рис. 2.13.

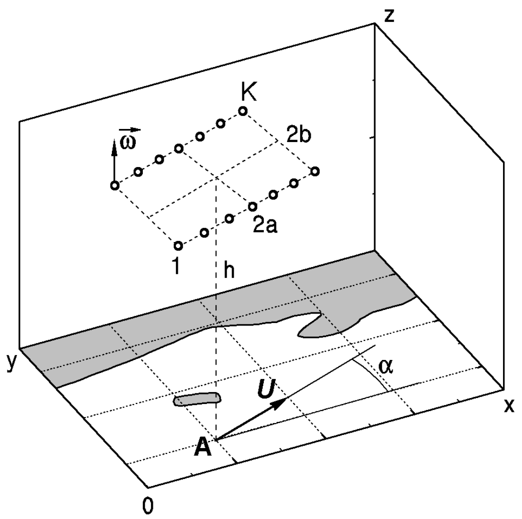


Рисунок 2.13 – Представлення модельної «хмари» (системи вортонів), яка формує вітер над поверхнею рідіини

При проведенні розрахунків вортони зручно розташовувати по сторонам прямокутника з розмірами $2a \times 2b$ над базовою точкою A, в якій необхідно індукувати швидкість течії U під кутом α в обраній системі координат.

Значення функції потоку, утворене системою K фіксованих воронів, визначається співвідношенням [105]

$$\Psi_V(x,y) = -\frac{\Gamma}{4\pi}\sum_{k=1}^{K} \ln\{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + h^2\}. \qquad (2.127)$$

В результаті отримуємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих інтенсивностей Γ_i фіксованих N точкових вихорів і M вихорів Ренкіна, яким у відповідність ставиться $M+N$ точок колокацій на береговій лінії

$$\sum_{i=1}^{M+N} \Gamma_i \ln r_{pi} = 4\pi\left[\Psi_V(x_p,y_p) - \Psi(x_p,y_p)\right] - \sum_{j=1}^{M^*} \Gamma_j^0 exp\left\{-\beta(t-t_j)\right\}\ln r_{pj}, \qquad (2.128)$$

де $r_{pz}^2 = (x_p - x_z)^2 + (y_p - y_z)^2, p = 1,2,\dots,M+N$. У наведеному рівнянні M^* – кількість вільних вихорів Ренкіна, $\Psi_V(x_p,y_p)$ – вклад системи вортонів в точку колокації, $\Psi(x_p,y_p)$ – значення функції потоку в точці колокації на береговій лінії.

Розв’язок системи рівнянь (2.128) дозволяє визначити інтенсивності фіксованих точкових вихорів і пов’язаних вихорів Ренкіна. Таким чином, значення функції потоку в точці (x,y) течії визначається співвідношенням

$$\Psi(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{M+N} \Gamma_i \ln r_i - \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{M^*} \Gamma_j^0 exp\left\{-\beta(t-t_j)\right\}\ln r_j - \Psi_V(x,y), \quad (2.129)$$

де $r_z^2 = (x - x_z)^2 + (y - y_z)^2$. Диференціювання рівняння (2.129) у відповідності з рівняннями (2.126) дозволяє визначити розподіл компонент $U(x,y)$, $V(x,y)$ поля швидкості даної течії, яке буде використовуватися при чисельному інтегруванні рівняння адвекції (2.105), (2.106).

2.3.2. Математична модель масопереносу, як двовимірної адвекції в шару

Для процесу масопереносу та адвекції для усіх частинок, які належать до маркованої області $D_\alpha(t)$, застосована

М**одель 2.2** (Задача Коші для маркованих частинок із виділеної області $D_\alpha(t)$):

$$\begin{cases} \forall z_\alpha(t) \in D_\alpha(t), \quad t > t_0 : \\ \dfrac{d\bar{z}_\alpha(t)}{dt} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{L_d} \dfrac{f(\omega,t)d\omega}{(z_\alpha - \omega)} + \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{L_v(t)} \dfrac{f(\omega,t)d\omega}{(z_\alpha - \omega)}, \\ t = t_0 : D_\alpha(t_0) = D_{\alpha 0} \end{cases} \tag{2.130}$$

Пасивна рідка частинка переміщується зі швидкістю, що дорівнює швидкості зовнішнього навколишнього потоку в точці, в якій розташована частинка. Тому твердження рівності швидкості частинки і швидкості зовнішнього течії призводить до системи звичайних диференціальних рівнянь, які називаються рівняннями адвекції (задача Коші (2.105), (2.106)).

Іншими словами, адвекція рідини фактично зводиться до аналізу траєкторій системи лагранжевих рідких частинок в ейлеровому полі швидкості. Головна складність цієї задачі пов’язана з переходом від опису руху дискретної системи рідких частинок до опису деформації неперервних ліній (в двомірному випадку) і поверхонь (в тривимірному випадку), що обмежують виділену рідину.

Вивчення процесу адвекції істотно спрощується, якщо в початковий момент виділити границю області забруднення на морській поверхні системою пасивних точок (маркерів) і стежити за їх еволюцією в часі.

Впорядковане з'єднання послідовності маркерів для поточного моменту часу дозволяє сформувати нове положення границі виділеної області течії.

Визначення правої частині рівняння (2.105) є окремою гідродинамічною задачею. Необхідно визначити вектор $\vec{W}_\alpha(\vec{r}_\alpha(t), t) = \vec{V}(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, t)$ в області зі складною геометрією обмежуючих поверхонь. Для знаходження розв'язку цієї задачі можна застосувати метод дискретних особливостей, адаптований до проблем адвекції [281]. Надалі для ідентифікації позначень вкажемо нижче основні етапи розв'язування гідродинамічної задачі.

Розглянемо двовимірну течію ідеальної нестисливої рідини в області (рис. 2.9'), в якому задано розподіл швидкості $U_1(s_1, t)$, де s_1 – поперечна координата в довільному перерізі каналу, t – час. Нехай в середній частині течії є острів. Передбачається, що розподіл швидкості на лінії, що з'єднує берегову лінію з берегом острова, вважається заданим і рівним $U_2(s_2, t)$. Необхідно визначити розподіл поля швидкості $U(x, y, t)$ в даній течії.

Відомо [126, 281], що функція потоку (stream function - AG) $\Psi(x, y)$ течії рідини, яка наведена системою N точкових вихорів з інтенсивностями Γ_i, де $i = 1,2, \ldots, N$ і розташованими в точках (x_i, y_i), визначається співвідношенням

$$\Psi(x, y) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \ln\{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2\}. \qquad (2.131)$$

Диференціювання цієї функції за просторовими координатами дозволяє визначити розподіл поля швидкості $U(x, y, t) = \{U(x, y, t), V(x, y, t)\}$ течії

$$U(x, y, t) = \frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial y}, V(x, y, t) = -\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}. \qquad (2.132)$$

Надалі, задачу можна пронормувати на характерний геометричний масштаб течії L_0 і характерний часовий масштаб T_0. В цьому випадку всі швидкості течії будуть пронормовані на частку $\frac{L_0}{T_0}$, значення функції потоку і інтенсивності вихорів будуть віднесені до величини $\frac{L_0^2}{T_0}$. Для задоволення граничної умови непротікання рідини в термінах функції потоку

$$\Psi(x,t)|_S = const. \tag{2.133}$$

уздовж берегової лінії, введемо систему N точок колокацій (рис. 2), розташованих на відстані Δ_i $(i = 1,2,\dots,N)$ один від одного. У методі дискретних особливостей кількість вихорів і кількість точок колокації має збігатися. Для забезпечення гладкості розподілу поля швидкості на кордоні течії кожен вихор має зсув δ_i відностно границі. На рис. 2.15 показаний приклад розподілу точок колокації (маркери-порожнисті квадратики) і фіксованих точкових вихорів (маркери-порожнисті кружечки).

Відстань між точками колокації Δ_i визначається ступенем дискретизації берегової лінії в течії: чим вищій рівень дискретизації, тим точніше лінія функції течії (2.133) буде описувати берегову лінію в даній течії. З іншого боку, чим меншим є радіус кривизни берегової лінії, тим частіше повинні розташовуватися точки колокації [107,109,126]. У методі дискретних особливостей, що адаптований до задач адвекції [23], просторове положення фіксованих точкових вихорів має важливе значення. Серед основних рекомендацій щодо розміщення фіксованих вихорів слід виділити такі:

– точковий вихор повинен розміщуватися на прямій, перпендикулярній до дотичної, яка проведена у відповідній точці колокації щодо берегової лінії;

– відстань від поточного точкового вихору до відповідної йому точки колокації має бути одного порядку (але не менше відстані між сусідніми точками колокації на береговій лінії $\delta_i \approx \Delta_i$, див. рис. 2.18).

Для виконання граничної умови (4) значення функції потоку в точках колокації на кожній берегової лінії має приймати однакові значення. Якщо на одній з берегових ліній течії (рис. 2.14) прийняти $\Psi_0 = 0$, тоді різниця в значеннях функції течіїна границі течії визначається інтегралом від нормальної компоненти швидкості до лінії (s_1 для іншої границі каналу і s_2 – для острова), що з'єднує берегові лінії. Наприклад, для випадку, показаного на рис. 2.14, маємо

$$\Psi_1 = \int U_1(s_1)ds_1, \Psi_2 = \int U_2(s_1)ds_2. \tag{2.134}$$

У методі дискретних особливостей інтенсивності точкових вихорів визначаються з умови рівності значень функції потоку, наведеної усіма фіксованими точковими вихорами в точках колокації. В результаті одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\Gamma_i \ln\{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2\} = -4\pi\Psi_j. \tag{2.135}$$

де Ψ_j – значення функції потоку в j-й точці колокації. Після визначення значень інтенсивностей точкових вихорів визначається розподіл полів функції течії (2.136) і компонент поля швидкості (2.139) в довільній точці даної течії.

Якщо границя течії має M виступів, то метод дискретних особливостей дозволяє взяти до уваги процес утворення вихрових структур великого масштабу на кожному виступі. В цьому випадку необхідно додати в розглянуту систему точок колокацій додаткові M точок колокацій, які розташовані на виступах берегової лінії (рис.2.150. Кожній додатковій точці колокації ставиться у відповідність рухливий вихор Ренкіна [259] (Rankine vortex – AG) з інтенсивністю Γ_j ($j = 1,2, \dots, M$), який зміщений на відстань δ_j від границі виступу берегової лінії.

Поле функції потоку, наведеної вихором Ренкіна, розташованому в точці (x_j, y_j) визначається виразом [295]

$$\Psi(x,y) = \begin{cases} -\frac{\Gamma_j}{4\pi}\left(\frac{r^2}{a_j^2} - 1 + \ln a_j^2\right), & \text{якщо} 0 \leq \mathrm{r} < \mathrm{a_j}, \\ -\frac{\Gamma_j}{4\pi}\ln r, & \text{якщо} \mathrm{r} > \mathrm{a_j}, \end{cases} \quad (2.136)$$

де $r^2 = (x - x_j)^2 + (y - y_j)^2$. У наведеному виразі a_j – радіус ядра вихору Ренкіна.

З плином часу вихор Ренкіна зміщується зі швидкістю, яка визначається виразом (3). Якщо відстань між вихором і відповідною йому точкою колокації перевищить критичне значення δ_j^{cr}, необхідно для поточного моменту часу (t_j) зафіксувати інтенсивність Γ_j^0 вихору (вільний вихор Ренкіна) і ввести новий вихор (зв'язаний вихор Ренкіна) в початкову точку, розташовану біля точки колокації на відстані δ_j від виступу берегової лінії.

Метод дискретних особливостей допускає введення штучної диссипації β на основі спостережень або теоретичних оцінок [163,173].

$$\Gamma_j(t) = \Gamma_j^0 exp\{-\beta(t - t_j)\}. \quad (2.137)$$

Особливі властивості моделей

При розглядя двовимірних потенціальних рухів ідеальної нестисливої рідини всередині каналу, обмеженого непроникними межами складної геометрії (рис. 2.14). Метод дискретних особливостей, адаптований до задач адвекції, дозволяє визначити розподіл функції потоку $\Psi(x, y, t)$ течії для заданої геометрії каналу і профілю швидкості $U_1(s, t)$ течії (де s – лінія що сполучає границі течії) або витрати рідини $Q(t)$ в довільному перерізі каналу.

Необхідно визначити розподіл поля швидкості $U[U(x,y,t),V(x,y,t)]$ в течії, яка аналізується.

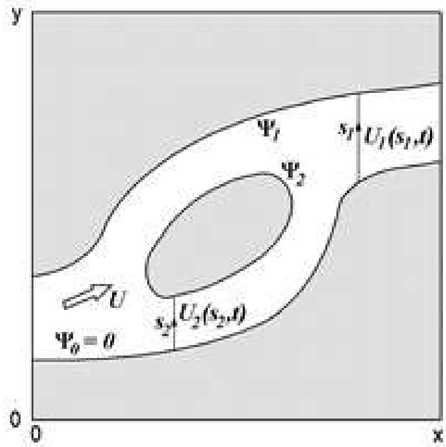


Рисунок 2.14 – Приклад геометрії каналу

Гідродинамічна задача розв’язується в термінах функції потоку $\Psi(x,y,t)$. Оскільки лінія потоку постійного значення є кривою, уздовж якої нормальна компонента швидкості дорівнює нулю, то граничні умови на обмежуючих поверхнях каналу (x_c, y_c) можна записати на кожній з поверхонь у вигляді

$$\Psi|_{(x_c,y_c)} = const. \tag{2.138}$$

Відомо, що розподіл функції потоку в двомірному випадку пов’язаний з розподілом компонент поля швидкості виразами

$$U = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, V = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}. \tag{2.139}$$

В цьому випадку, при проведенні обчислень, зручно прийняти значення функції потоку на одній з берегових ліній каналу $\Psi_0 = 0$. Тоді значення функції потоку на інших обмежуючих поверхнях каналу визначається інтегралом

$$\Psi_\alpha = \int_{C_\alpha} U_\alpha(s)ds + \Psi_0, \qquad (2.140)$$

де C_α – лінія, яка з’єднує границю 0 з границею α, а $U(s)$ – профіль компоненти поля швидкості течії в напрямку, перпендикуляром до лінії s в поточній точці (рис. 2.14). Фактично, інтеграл в правій частині виразу (2.140) є поверхневою витратою рідини $Q(t)$, що протікає між межами каналу.

Для просторової фіксації лінії потоку, що збігаються з межею каналу, метод дискретних особливостей передбачає введення в розрахункову схему системи точок колокацій і фіксованих точкових вихорів. Точки колокацій розташовуються уздовж межі на деякій відстані Δ_i ($i = 1,2, \ldots, N$), де N – загальне число точок колокацій в даній системі) один щодо одного, яке визначається точність дискретизації границь каналу. Велика кількість точок колокацій дозволяє більш точно сформувати границю течії. При цьому ті сегменти кордону течії, які мають малий локальний радіус кривизни, повинні містити більшу кількість точок колокацій в порівнянні з сегментами границь з великим локальним радіусом кривизни границь.

Досвід проведення дискретизації берегової лінії морських течій показує, що недотримання цих рекомендацій може призвести або до істотної деформації фіксованої лінії потоку між точками коллокацій (це в кінцевому підсумку може призвести до потоку рідини через границю течії), або високої обумовленості фінальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (чисельне розв’язування таких систем рівнянь може привести до помилок в розв’язку, що в кінцевому підсумку може також призвести до проникнення рідини через границю течії). Приклад розташування точок колокацій для двомірного каналу з островом показаний на рис. 2.15.

Система фіксованих точкових вихорів, розташованих близько до точок колокацій, наводить поле функції потоку, яке описує течію всередині каналу. Слідуючи рекомендаціям, кожен точковий вихор повинен розташовуватися на відстані δ_i на перпендикулярі до дотичної, проведеної до границі течії в точці колокації. При цьому рекомендується дотримуватися умови

$$\delta_i > \Delta_i,$$

де Δ_i – відстань між поточною і попередньої точками коллокацій [Гу09]. Зазвичай приймають $\delta_i = (1.0 \dots 1.5)\Delta_i$. Рис. 2.15 ілюструє розташування системи фіксованих точкових вихорів в розглянутому прикладі на рис. 2.14.

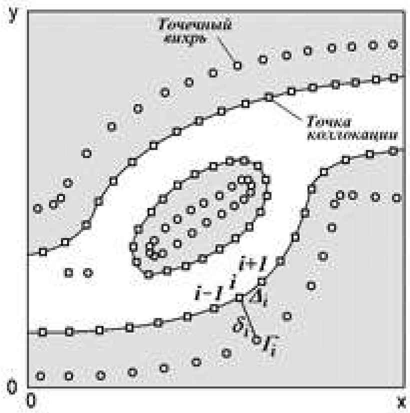


Рисунок 2.15 – Приклад розташування системи точок колокацій і фіксованих точкових вихорів

Функція потоку, наведена системою точкових вихорів з інтенсивностями Γ_i, розташованими в точках з координатами (x_i, y_i), визначається виразом

$$\Psi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \ln[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2], \tag{2.141}$$

яке є сумою внесків кожного точкового вихору в розглянуту точку течії.

Умова рівності значень функції потоку в точках коллокацій на кожній границі розглянутої течії дозволяє сформувати на основі (2.141) систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих інтенсивностей Γ_i системи фіксованих точкових вихорів. Отримана система рівнянь може бути записана у вигляді

$$\Gamma_i \ln[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2] = -4\pi\Psi(x_j, y_j), j = 1,2, \dots, N. \quad (2.142)$$

У цьому випадку розподіл функції потоку в течії буде визначатися сумою (2.141), а компоненти швидкості течії можна визначити диференціюванням цього рівняння за просторовими координатами відповідно до (2.139).

Отже, компоненти поля швидкості течії в точці (x, y) будуть визначатися виразами

$$U(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \frac{y-y_i}{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2},$$
$$V(x,y) = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \frac{x-x_i}{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2}, \quad (2.143)$$

які враховують внесок всіх фіксованих точкових вихорів.

2.3.3. Тривимірні моделі із топологічними властивостями

Для тривимірної задачі (27) – (32) застосована математична **Модель 2.3**, яка має інтегральне представлення та визначає рух тривимірного деформованого об’єму з непроникною границею σ:

$$\varphi(x,y,z,t) = xu_\infty + yv_\infty + zw_\infty + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\sigma_d(t)} g_d(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t)\frac{\partial}{\partial n_\sigma}\left(\frac{1}{r_\sigma}\right)d\sigma +$$
$$+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\sigma_v(t)} g_v(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t)\frac{\partial}{\partial n_\sigma}\left(\frac{1}{r_\sigma}\right)d\sigma \tag{2.144}$$

$$\vec{V}(x,y,z,t) = \vec{V}_\infty + \frac{1}{4\pi}\nabla\iint\limits_{\sigma_d(t)} g_d(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t)\frac{\partial}{\partial n_\sigma}\left(\frac{1}{r_\sigma}\right)d\sigma +$$
$$+\frac{1}{4\pi}\nabla\iint\limits_{\sigma_v(t)} g_v(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t)\frac{\partial}{\partial n_\sigma}\left(\frac{1}{r_\sigma}\right)d\sigma \quad . \tag{2.145}$$

Для визначення підінтегральних функцій застосоване інтегральне рівняння

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_0}\iint\limits_{\sigma_d(t)} g_d(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t)\frac{\partial}{\partial n_\sigma}\left(\frac{1}{r_\sigma}\right)d\sigma =$$
$$= -(\vec{V}_\infty \cdot \vec{n}_0) - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_0}\iint\limits_{\sigma_v(t)} g_v(x_\sigma, y_\sigma, z_\sigma, t)\frac{\partial}{\partial n_\sigma}\left(\frac{1}{r_\sigma}\right)d\sigma \quad , \tag{2.146}$$

$$J = \int\limits_D (\vec{V}\cdot\nabla\times\vec{V})dD = const$$ (Закон збереження спіральності). (2.147)

Доцільно звернути увагу на те, що умова (2.147) збереження спіральності виписано для вихорової течії в той час, коли задачу сформульовано для потенційних (але циркуляційних) течій. Але, як що вважати, що саме m вихорових ліній (m-вихорових трубок) утворюють поверхню σ яка охоплює область D, то закон збереження спіральності, за визначенням H.Moffatt [289,290]

$$J = mJ_m + 2\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}^{m} \Gamma_i \Gamma_j = const\,, \tag{2.148}$$

де J_m - самоспіральність вихорових трубок.

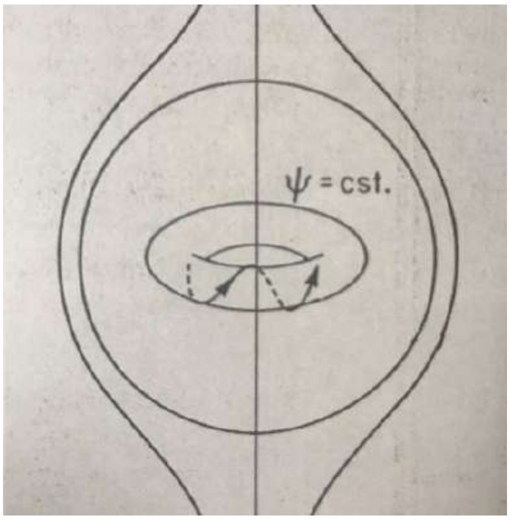


Рисунок 2.16 – Структура течії зі спіральністю H.Moffatt [289].

Для визначення еволюції виділеної поверхні σ_v застосовна задача Коші:

$$\frac{d\vec{R}_{\sigma_v}}{dt} = \vec{V}(\vec{R}_{\sigma_v}(t), t) \;, \quad \vec{R}_{\sigma_v}(t_0) = R_0 \;, \tag{2.149}$$

Незважаючи на те, що достатньо широкий спектр плоских та тривимірних задач має схожі постановки, тривимірні моделі мають власні особливості. Так, закон збереження спіральності (2.148) вихорових структур в ідеальної нестисливої рідині визначає збереження загальної завузленості конфігурації із замкнених вихрових трубок, які розташовані всередині області $D^+(t)$, яка рухається у відповідності до умов задачі (2.144)-(2.149).

2.3.4. Двовимірна математична модель динамічної системи в області з рухомою границею

Відомо [259, 278, 287, 291], що найбільш інтенсивні режими адвекції виділеної рідини відбуваються в областях, прилеглих до границь. З цієї причини в задачах адвекції ставитися висока вимога до локального виконання граничних умов, яка істотно обмежує застосування методу дискретних особливостей при моделюванні процесів переносу скалярних полів в областях зі складною геометрією обмежуючих поверхонь. В роботі [108, 110] запропонована методика розрахунку течій, заснована на методі дискретних особливостей, адаптованому для задач адвекції.

Розглядається протягом ідеальної нестисливої рідини в області (рис. 2.15), на вході в яку задано розподіл швидкості $U_0(s)$, де s – поперечна координата. Задача полягає у визначенні поля швидкості $U(x,t)$ течії в області з криволінійною межею.

Відомо [110], що функція $\Psi(x,y)$ потоку рідини, яка наведена системою N точкових вихорів з інтенсивностями Γ_1, розташованими в точках (x_i, y_i), де $i = 1, \dots N$, визначається виразом

$$\Psi(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \ln[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2]. \qquad (2.150)$$

Для задоволення граничної умови непротеканія рідини в термінах функції потоку ($\Psi(x,y)|_S = const$) уздовж берегової лінії, введемо систему N точок колокації і будемо вимагати, щоб в цих точках значення функції струму, наведені системою N точкових вихорів, були однакові на кожній з границь течії. Для забезпечення гладкості розподілу поля швидкості біля межі течії в пропонованому чисельному методі точкові вихори розташовуються на відстані Δ від межі, як показано на рис.2.17, рис. 2.18.

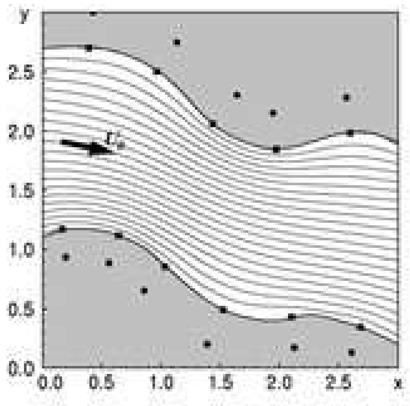


Рисунок 2.17 – Розподіл функції потоку в протоці

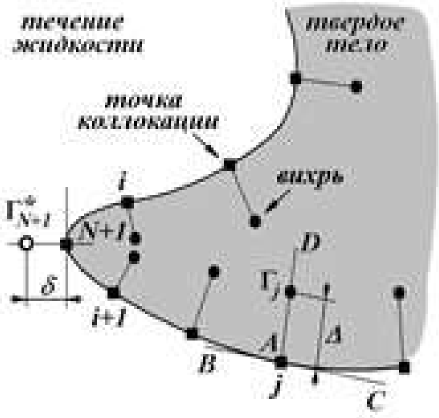


Рисунок 2.18 – Схема розташування точкових вихорів і точок колокації на ділянці границі течії

Кількість точок колокації залежить від порізаності берегової лінії даного регіону. Слідуючи [110], нагадаємо рекомендацію при виборі відстаней між точками колокації: чим менший радіус кривизни берегової лінії, тим частіше повинні розташовуватися точки колокації.

Різниця в значеннях функції потоку на границях визначається інтегралом

$$\Delta\Psi = \int_0^h U(s)ds, \tag{2.151}$$

де h – відстань між границями. Якщо межа має M виступів, то необхідно додати в розглянуту систему ще M точок колокації, кожній з яких ставиться у відповідність рухливий вихор Ренкіна, зміщений на відстань δ (рис.2.18). Інтенсивності Γ_i вихорів визначаються з розв’язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь [110]:

$$\Gamma_i \ln[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] = 4\pi\Psi_j + \sum_{k=1}^{K} \Gamma_k \ln[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2], \qquad (2.152)$$

де $i, j = 1, \dots, N, N+1, \dots, N+M$, $\Gamma_k = \Gamma_k^{(0)} \exp[-\alpha(t - t_k)]$.

У наведеному виразі k – кількість вихорів Ренкіна, які відірвалися від виступів в момент t_k, з початковою інтенсивністю $\Gamma_k^{(0)}$, α – показник дисипації інтенсивності вихорів [173]. Розподіл функції потоку визначається підсумовуванням вкладів кожного з вихорів в даній системі. Приклад розподілу функції потоку течії показаний на рис.1. Збіг ліній течії з межами області течії свідчить про виконання граничної умови на всіх точках границі течії.

Подальше диференціювання виразів (2.150) за координатами дозволяє визначити розподіл поля швидкості $U(x, t)$ в довільній точці даної течії.

Моніторинг контуру плями забруднень

Процеси перемішування рідини поверхневими течіями є складним природним явищем. Вони пов’язані не тільки з перенесенням виділеної рідини в напрямку глобального течії, а й деформацією виділеної рідини через неоднорідність поля швидкості. Поширення забруднень в рідинах зручно проводити на основі аналізу траєкторій окремих рідких частинок (маркерів), що становлять межу виділення рідини. Відомо, що процеси адвекції в різних течіях можуть призводити до різних видів деформації границь, в результаті яких границі виділеної рідини зазнають істотного розтягнення.

Відмінною особливістю процесу адвекції рідини є те, що деякі частини сегментів границь можуть розтягуватися сильніше в порівнянні з іншими. У деяких випадках окремі фрагменти границь виділеної рідини можуть навіть стискатися. У багатьох випадках збільшення загального числа маркерів, які формують границю виділеної рідини, не вирішує зазначену проблему. З цієї причини, для опису процесу еволюції границь в розглянутих течіях застосовують різні види інтерполяції. Деякі особливості цієї проблеми і види інтерполяцій, які застосовуються сьогодні в задачах адвекції рідини, можна знайти в роботі. Часто застосовуються параметричні методи, в яких параметром інтерполяції є відстань між маркерами.

На рис. 2.19 показаний приклад залежності координат маркерів границь замкнутого контуру, в якому в якості аргументу функції прийнято відстань від деякого (довільно обраного маркера) до поточного маркера. Інтерполяції контура дозволяє, з одного боку, скоротити загальну кількість маркерів для випадку, коли відстань від поточного маркера до сусідніх менша деякого критичного значення $\delta_{\min}^{cr}$. Процедура скорочення в деяких випадках може значно зменшити загальний обсяг обчислень. З іншого боку, якщо відстань між маркерами виявиться більша критичного значення $\delta_{\max}^{cr}$, то можна застосувати процедуру додавання необхідної кількості маркерів.

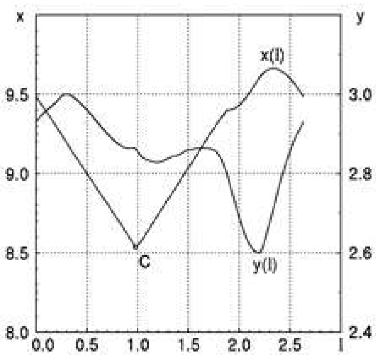


Рисунок 2.19 – Залежність координат точок замкнутого контуру від довжини контуру

У роботі застосовується інтерполяційний многочлен Лежандра N - го порядку за схемою Ейткена, побудований на системі вузлових точок (x_0, l_0), (x_1, l_1), ..., (x_N, l_N). Інтерполяційна формула має вигляд

$$x(l) = \sum_{n=0}^{N} b_n \prod_{i=0}^{n-1} (l - l_i), \tag{2.153}$$

де

$$b_0 = l_0, b_1 = \frac{x_1 - x_0}{l_1 - l_0}, b_2 = \left(\frac{x_2 - x_0}{l_2 - l_0} - b_1\right)\frac{1}{l_2 - l_1},$$

$$b_3 = \left[\left(\frac{x_3 - x_0}{l_3 - l_0} - b_1\right)\frac{1}{l_3 - l_1} - b_2\right]\frac{1}{l_3 - l_2}$$

і т.д. Аналогічно будується інтерполяційна формула для функції $y(l)$.

Аналіз процесу адвекції в різних гідродинамічних течіях показує, що спочатку гладка границя часто може отримати злами, з'являються спіральні структури, розтягування в різних напрямках. Інтерполяція таких сегментів неперервними інтерполяційними формулами різного порядку призводить до появи численних помилок, пов'язаних з локальними помилками інтерполяції сегментів, що містять розрив першого роду. На рис.2.20 показаний випадок, в якому функція $y(l)$ є гладкою і неперервною, а функція $x(l)$ має розрив (точка C) першого роду. Для того, щоб інтерполювати такі фрагменти, можна скористатися кусковою інтерполяцією, в якій границя спочатку аналізується на наявність розривів, а потім тільки гладкі фрагменти границі піддаються інтерполяції.

При побудові інтерполяційної функції точка розриву точок виявитися на різних ділянках інтерполяційного відрізка. Всі можливі випадки інтерполяції сегмента між точками з індексами i та $i+1$ показані на рис. 2.20.

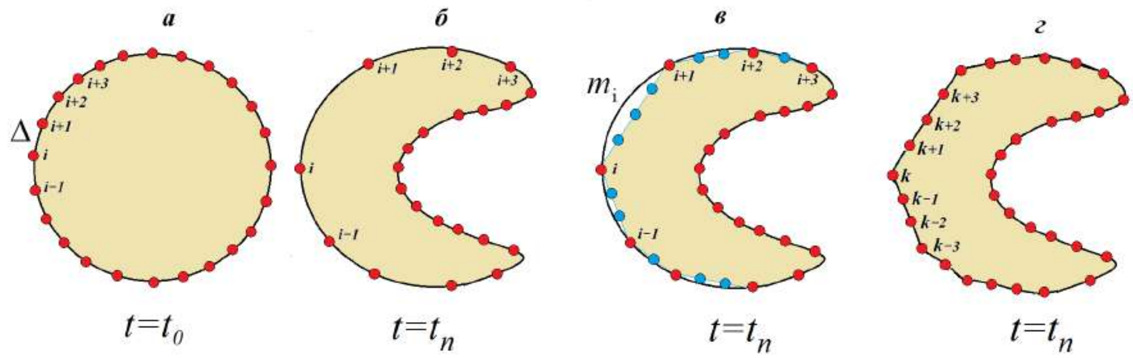


Рисунок 2.20 – Приклади положення ділянки інтерполяції між точками з індексами i і $i+1$ з допоміжними точками для побудови інтерполяційного многочлена

Алгоритм для інтерполяції границі між маркерами з індексами i та $i + 1$ наведено в третьому розділі роботи.

Для побудови моделі виконується аналіз відстані і кутів між послідовністю маркерів. Якщо відстані між поточним і сусідніми маркерами менші деякого критичного значення, то проводиться процедура видалення маркера. Якщо відстань між маркерами більша деякого критичного значення, модель додає необхідну кількість маркерів, використовуючи інтерполяцію координат маркерів на основі поліноміальної інтерполяції третього порядку для гладких ділянок інтерполяційної функції. Як аргумент інтерполяційної функції обрана довжина контура від довільно обраного першого маркера. Математична модель використовує для інтерполяції тільки гладкі ділянки інтерполяційної функції.

Аналіз поставленої задачі показує, що точність розв’язку залежить від умов дискретизації граничної лінії, точності визначення профілю швидкості в довільному перерізі каналу (або поверхневої витрати рідини), точності використовуваного в розрахунках прогнозу вітрового навантаження, тимчасового кроку і інтервалу інтегрування задачі Коші, а також точності просторової дискретизації границь виділеної рідини.

2.4. Похідні від інтегральних представлень

При чисельному вирішенні ряду задач аеро / гідродинаміки (задач відривного обтікання несучих поверхонь, задач гідропружності, біоніки, ..) виникає необхідність обчислення динамічних і кінематичних характеристик течії які змінюються за часом. У багатьох випадках, в чисельних моделях, закони збереження і вирази для зміни характеристик виводилися вже із дискретизованих інтегральних виразів, в результаті були втрачені складові і співмножники, що визначають суть фізичних явищ та процесів. Мета статті отримання аналітичних виразів з явними залежностями від фізичних факторів, що визначають суть відривних течій ідеальної рідини.

Формальне представлення [231].

Розглядається плоска течія в області зі змінною в часі непроникною границею, представимо у вигляді гладкого розімкнутого контуру $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$.

Течія породжується рухом (переміщенням і деформацією) непроникного гладкого розімкнутого контуру $L_d(t)$, для всіх точок якого визначені швидкості (вектор швидкості безперервно розподілений по контуру, рис.2.21).

Вважаємо [231], що рух рідини поза тонкою рухливою непроникною границі $L_d(t)$ супроводжується виникненням на її гострих кінцівках відривної вихрової течії у вигляді тонких вихрових структур $L_v(t)$, які, для плоского випадку мають представлення як нескінченно тонкі, непроникні контури розриву дотичних швидкостей.

Така схематизація 126, 231, 258] дозволяє замінити вихрову течію в області (поза $L_d(t)$) на циркуляційну течію (зі збереженням інтегральних характеристик течії). Лінії розриву швидкостей $L_v(t)$ будуть інтерпретуватися як непроникні вільні границі - нові елементи границі $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ які виникають при відривному обтіканні границі $L_d(t)$. Формування нових елементів кордонів відбувається при відриві з кінцівок $L_d(t)$ тонкого вихрового шару $L_v(t)$. Рух гладкого розімкнутого контуру $L_v(t)$ визначається швидкістю W_v, визначеною для всіх його точок.

З причини того, що в точках сполучення границь $L_d(t)$ та $L_v(t)$, яки є точками відриву $\omega_p(t),\ p = 1{,}2$, при їх русі, швидкості $W_d(\omega_p) \neq W_v(\omega_p)$, в загальному випадку, не збігаються (рис. 2.21), будемо вважати, що, у всіх точках $\omega_p(t),\ p = 1{,}2$ відрив реалізується відповідно до умовою Бріллюена-Вілла [22,41,126]:

«Крива, яка складається з контуру перешкоди і контуру вільної границі в точці відриву має точку повернення або неперервну дотичну, в залежності від того, збігається чи не збігається точка відриву з критичною точкою потоку.»

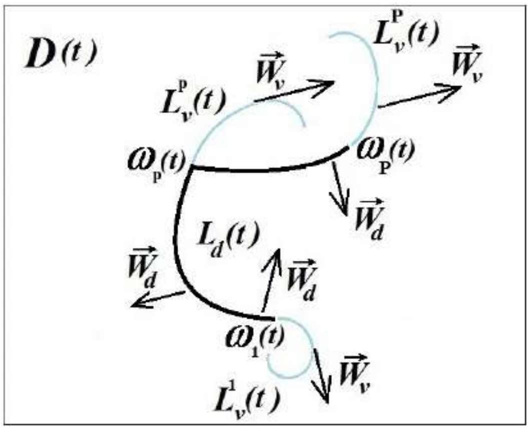


Рисунок 2.21 – Схема рухомого контуру

При гладкому відриві вектор різниці швидкостей $W(\omega_p(s_v,t)) = W_v(\omega_p(s_v)) - W_d(\omega_p(s_p))$ буде дотичним одночасно і до $L_d(t)$ і до $L_v(t)$, і визначає швидкість збільшення границі $L_v(t)$, причому при

$$\frac{ds_v(t)}{dt}\Big|_{\omega=\omega_p} = \left|W(\omega_p(s_v,t))\right| \quad \text{та} \quad \left|\frac{\partial\omega(s_v,t)}{\partial s_v}\right|_{\omega=\omega_p} = 1$$

$$W(\omega_p(s_v,t)) = \frac{\partial\omega_p}{\partial s_v}\frac{ds_v(t)}{dt} \tag{2.154}$$

Таким чином, в площині комплексної змінної, визначена безперервна гладка лінія $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ складається з маркованих параметром s частинок, які в будь-який момент часу визначено своїми комплексними координатами $\omega_d(s,t) = x_d(s,t) + iy_d(s,t)$ і $\omega_v(s,t) = x_v(s,t) + iy_v(s,t)$ для кожної з них.

Переміщення лінії $L_d(t)$ визначається завданням безперервного розподілу в точках $\omega_d(s_d,t)$ що складаються із частинок s_d швидкості $\frac{d\omega_d(s,t)}{dt} = W_d(\omega_d(s_d,t))$, а переміщення частинок s_v яки складают лінію $L_v(t)$ визначається завданням безперервно розподіленої на лінії частинок швидкістю $\frac{d\omega_v(s,t)}{dt}=W_v(\omega_v(s_v,t))=\frac{1}{2}\left(V^+(\omega(s_v,t),t)+V^+(\omega(s_v,t),t)\right)$.

При такій схематизації течії в неодносвязной області (рис. 2.21), будь-яка характеристична функція буде залежною від часу (як від параметра). Комплексний потенціал течії, може бути представлений у вигляді [126, 231]:

$$\Phi(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_d(t)} f_d(\omega,t)\ln(z-\omega)d\omega+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_v(t)} f_v(\omega,t)\ln(z-\omega)d\omega=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s_1}^{s_2} f_d(\omega(s_d,t),t)\ln(z-\omega(s_d,t))\frac{\partial\omega(s_d,t)}{\partial s_d}ds_d+\frac{1}{2\pi i}\sum_{p=1}^{2}\int\limits_{s_p(t_0)}^{S_p(t)} f_v(\omega(s_v,t),t)\ln(z-\omega(s_v,t))\frac{\partial\omega(s_v,t)}{\partial s_v}ds_v \tag{2.155}$$

Для підінтегральної функції, у всіх точках ω_p, $p=1,2.$ (гострих і кутових кінцівках $L_d(t)$) – точках сполучення границь $L_d(t)$ і $L_v(t)$ виконується умова неперервності

$$f_v(\omega_p,t)=f_d(\omega_p,t)\,. \tag{2.156}$$

В цьому випадку, комплексно спряжена швидкість течії має бути представлена у вигляді похідної від характеристичної функції:

$$\overline{V}(z,t)=\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_d(t)}\frac{f_d(\omega,t)}{z-\omega}d\omega+\frac{1}{2\pi i}\sum_{p=1}^{P}\int\limits_{L_v^p(t)}\frac{f_v(\omega,t)}{z-\omega}d\omega=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s_{p-1}}^{s_p}\frac{f_d(\omega(s_d,t),t)}{z-\omega(s,t)}\frac{\partial\omega(s_d,t)}{\partial s_d}ds_d+\frac{1}{2\pi i}\sum_{p=1}^{2}\int\limits_{s_p(t_0)}^{S_p(t)}\frac{f_v(\omega(s_v,t),t)}{z-\omega(s_v,t)}\frac{\partial\omega(s_v,t)}{\partial s_v}ds_v \tag{2.157}$$

Циркуляція швидкості по рідкому контуру $C(t)$, в будь-який момент часу (рис. 2.22), на підставі [126, 231] має представлення в вигляді інтеграла від комплексно сполученої швидкості по замкнутому рідкому контуру $C(t)$ повністю охоплює границю $L(t)=L_d(t)+L_v(t)$:

$$\varGamma_0 = \oint_C \overline{V}(\xi,t)d\xi = \oint_C \frac{d\xi}{2\pi i}\int_{L_d(t)+L_v(t)} \frac{f(\omega,t)}{\xi-\omega}d\omega = \int_{L_d(t)+L_v(t)} f(\omega,t)d\omega =$$
$$= \int_{s_{p-1}}^{s_p} f_d(\omega(s_d,t),t)\frac{\partial\omega(s_d,t)}{\partial s_d}ds_d + \sum_{p=1}^{2}\int_{s_p(t_0)}^{S_p(t)} f_v(\omega(s_v,t),t)\frac{\partial\omega(s_v,t)}{\partial s_v}ds_v \qquad (2.158)$$

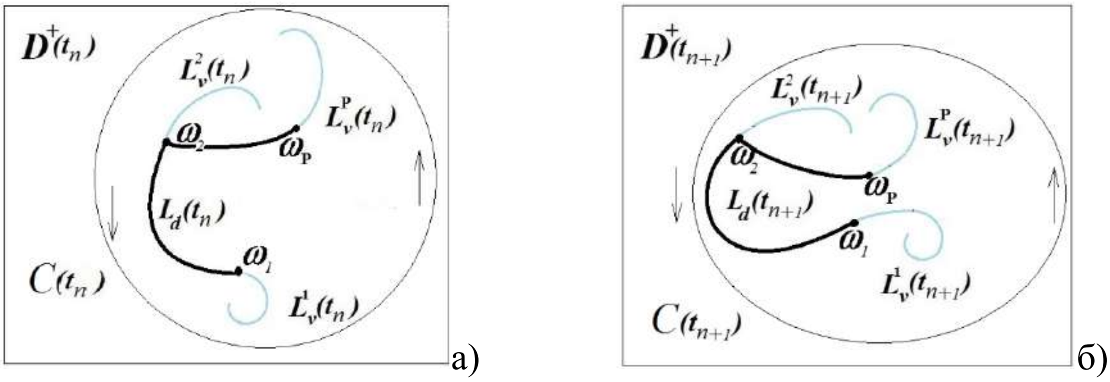


Рисунок 2.22 – Циркуляція швидкості по рідкому контуру

Про похідні для інтегральних виразів

Для гладко змінюющихся в часі характеристик течії вважається існуючим безперервних похідних по параметру t (за часом) для циркуляції і для потенціалу.

Так, для рідкого контуру $C(t)$, який повністю охоплює границю $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ в області течії (рис.2.22), застосовна

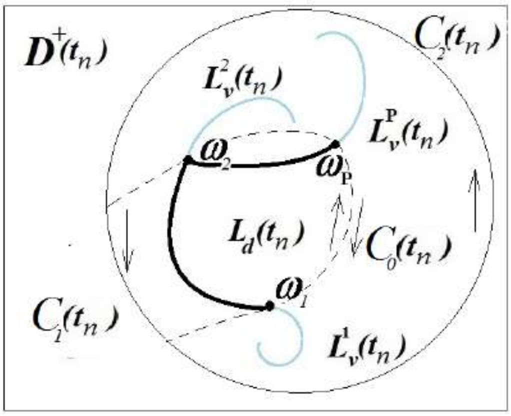
Теорема [173]:

При баротропному русі ідеальної рідини під дією поля об'ємних сил з однозначним потенціалом, циркуляція швидкості по замкнутому рідкому контуру не змінюється.

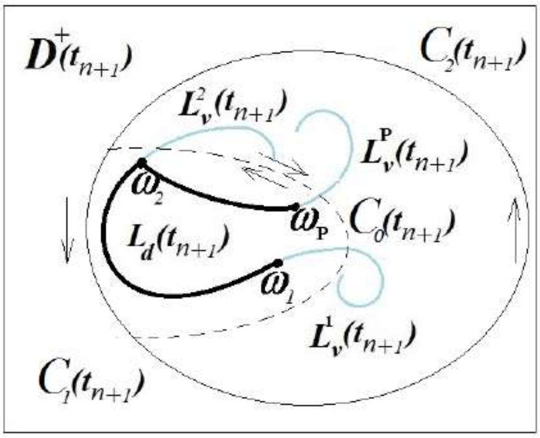
Тобто :

$$\frac{d}{dt}\varGamma_0 = \frac{d}{dt}\oint_{C(t)}\overline{V}(\xi,t)d\xi = 0 \qquad (2.159)$$

Розглянемо зміну в часі матеріального контуру $C(t)$, який охоплює границю $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$, (рис. 2.23.).



а)



б)

Рисунок 2.23 –Схема породження нових елементів границі

Нехай в момент часу $t = t_n$ контур $C(t)$ представляється у вигляді двох складових частин $C(t) = C_1(t) + C_2(t)$, (рис. 2.23, а). Введемо додатковий внутрішній матеріальний (рідкий) контур $C_0(t)$ так, щоб він в момент часу відділяв границю $L_d(t)$ від $L_v(t) = \sum_{p=1}^{2} L_v^p(t)$. В наступний момент часу $t = t_{n+1}$ (рис. 2.23, б) всередині контуру $C_0(t) + C_1(t)$ будуть знаходитися не тільки обтічний контур, але і елементи контурів $\Delta L_v(t) = \sum_{p=1}^{2} \Delta L_v^p(t)$. Таким чином, для замкнутих складових контурів $C_0(t) + C_1(t)$ та $C_0(t) + C_2(t)$ (де $C_0(t)$ проходиться в зворотному напрямку), також буде справедлива теорема Кельвіна про незмінність циркуляції швидкості по кожному з них.

$$\frac{d}{dt} \oint_{C_1(t)+C_0(t)} \overline{V}(\xi, t) d\xi = 0 \tag{2.160}$$

$$\frac{d}{dt} \oint_{C_2(t)+C_0(t)} \overline{V}(\xi, t) d\xi = 0 \tag{2.161}$$

При відривному обтіканні, при наявності потенціалу течії вищенаведену теорему доцільно переформулювати:

<u>Теорема 2.1</u>: При відривному обтіканні з баротропним рухом ідеальної рідини під дією поля об'ємних сил з однозначним потенціалом, зміна циркуляції швидкості по замкнутому рідкому контуру, який охоплює тільки обтічну границю, компенсується зміною циркуляції в сліді за рахунок відриву рідини з обтічної границі.

В силу чого (для плоского відривної течії з P точками відриву) справедливо

$$\frac{d}{dt}\int_{L_d(t)} f_d(\omega,t)d\omega+\sum_{p=1}^{p} f_d(\omega_p(s_v,t),t)\frac{\partial\omega_p}{\partial s_v}\frac{ds_v(t)}{dt}=0, \tag{2.162}$$

або, в силу (2.162)

$$\frac{d}{dt}\int_{L_d(t)} f_d(\omega,t)d\omega=-\sum_{p=1}^{p} f_d(\omega_p(s_v,t),t)W(\omega_p(s_v,t)) \tag{2.163}$$

Доведення наведемо на прикладі плоскої відривної течії (при обтіканні гладкого контуру з P точками відриву).

Дійсно, з урахуванням (2.160), (2.161), з виразу для похідної від циркуляції

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Gamma_0=\frac{d}{dt}\oint_{c(t)}\overline{V}(\xi,t)d\xi=\frac{d}{dt}\oint_{C}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{L_d(t)+L_v(t)}\frac{f(\omega(s,t),t)}{\xi-\omega}d\omega\right)d\xi=\\
&=\frac{d}{dt}\int_{L_d(t)} f_d(\omega(s,t),t)d\omega+\frac{d}{dt}\int_{\sum_{p=1}^{2}L_v^p(t)} f_v(\omega(s,t),t)d\omega=\\
&=\frac{d}{dt}\int_{s_1}^{s_2} f_d(\omega(s_d,t),t)\frac{\partial\omega(s\ ,t)}{\partial s_d}ds_d+\sum_{p=1}^{P}\frac{d}{dt}\int_{s(t_0)}^{S_p(t)} f_v(\omega(s_v,t),t)\frac{\partial\omega(s_v,t)}{\partial s_v}ds_v=\\
&=\int_{s_1}^{s_2}\frac{d}{dt}\left(f_d(\omega(s_d,t),t)\frac{\partial\omega(s_d,t)}{\partial s_d}\right)ds_d+\sum_{p=1}^{P}\int_{s_p(t_0)}^{s_p(t)}\frac{d}{dt}\left(f_v(\omega(s_v,t),t)\frac{\partial\omega(s_v,t)}{\partial s_v}\right)ds_v+\\
&+\sum_{p=1}^{P} f_v(\omega_p(s_v,t),t)\frac{\partial\omega}{\partial s_v}\frac{ds_v(t)}{dt}
\end{aligned} \tag{2.164}$$

В силу того, що на всіх елементах $d\omega_v = \frac{\partial\omega}{\partial s_v} ds_v$ вільної (вихровий) границі виконується умова теореми Кельвіна [157]:

$$\frac{d}{dt}\left(f_v(\omega(s_v,t),t)\frac{\partial\omega(s_v,t)}{\partial s_v} ds_v \right) = 0 . \tag{2.165}$$

При інтегруванні отримаємо, що

$$\int\limits_{L_v^p(t)} \frac{d}{dt}\left(f_v(\omega(s,t)t)\frac{\partial\omega(s_v,t)}{\partial s_v} \right) ds_v = 0 , \tag{2.166}$$

для усіх $L_v(t) = \sum_{p=1}^{P} L_v^p(t)$,

або, інакше

$$\sum_{p=1}^{P} \int\limits_{s_p(t_0)}^{s_p(t)} \frac{d}{dt}\left(f_v(\omega(s_v,t)t)\frac{\partial\omega(s_v,t)}{\partial s_v} \right) ds_v = 0 . \tag{2.167}$$

З умови теореми Кельвіна [157]:

$$\begin{gathered} \int\limits_{s_{p-1}}^{s_p} \frac{d}{dt}\left(f_d(\omega(s_d,t),t)\frac{\partial\omega(s_d,t)}{\partial s_d} \right) ds_d + \sum_{p=1}^{P} \int\limits_{s(t_0)}^{S_p(t)} \frac{d}{dt}\left(f_v(\omega(s_v,t),t)\frac{\partial\omega(s_v,t)}{\partial s_v} \right) ds + \\ + \sum_{p=1}^{2} f_v(\omega_p(s_v(t),t)\frac{\partial\omega_p(s_v,t)}{\partial s_v}\frac{ds_v(t)}{dt} = 0 \end{gathered} \tag{2.168}$$

З урахуванням умов (2.164) і (2.167) отримаємо

$$\int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{d}{dt}\left(f_d(\omega(s_d,t),t)\frac{\partial\omega(s_d,t)}{\partial s_d} \right) ds_d = -\sum_{p=1}^{P} f_d(\omega_p(s_v,t),t)\frac{\partial\omega_p(s_v(t),t)}{\partial s_v}\frac{ds_v(t)}{dt} \tag{2.169}$$

Де співмножники $\frac{\partial \omega(s,t)}{\partial s}$ в (2.168) відповідають за розтягнення контурів $L_d(t), L_v(t)$, а співмножник $\frac{ds_v(t)}{dt}$ в (2.169) відповідає за приріст контуру $L_v(t)$ новими частинками.

З урахуванням (2.169), для (2.164) отримаємо

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{L_d(t)} f_d(\omega,t)d\omega = -\sum_{p=1}^{p} f_d(\omega_p(s_v,t),t)W(\omega_p(s_v,t)) \tag{2.170}$$

Отриманий вираз (2.170) і доводить теорему.

Розглянемо вираз для похідної за параметром t (за часом) від потенціалу (2.155), в якому, можна диференціювати під знаком інтеграла. В силу того, що

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln(z-\omega(t)) = -\frac{1}{z-\omega(t)}\frac{d\omega(t)}{dt}, \tag{2.171}$$

та $$W_d(\omega_d(s_d,t)) = \frac{d\omega_d(s,t)}{dt}, \quad W_v(\omega_v(s_v,t)) = \frac{d\omega_v(s,t)}{dt}$$

Отримаємо, що

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathrm{z},\mathrm{t}) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{L_d(t)} f_d(\omega,t)\ln(z-\omega)d\omega + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\mathrm{p}=1}^{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{L_v^p(t)} f_v(\omega,t)\ln(z-\omega)d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s_1}^{s_2}\ln(z-\omega(s_d,t))\frac{\partial}{\partial t}\left(f_d(\omega,t)\frac{\partial\omega}{\partial s_d}\right)ds_d - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s_{11}}^{s_2}\frac{W_d(\omega(s_d,t))f(\omega,t)d\omega}{z-\omega(s_d,t)} + \\
&+ \sum_{p=1}^{P}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_p(t_0)}^{S_p(t)}\ln(z-\omega(s_v,t))\frac{\partial}{\partial t}\left(f_v(\omega,t)\frac{\partial\omega}{\partial s_v}\right)ds_v - \sum_{p=1}^{P}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_p(t_0)}^{S_p(t)}\frac{W_v(\omega(s_v,t))f(\omega,t)d\omega}{z-\omega(s_v,t)} + \\
&+ \sum_{p=1}^{P} f_d(\omega_p(s_v,t),t)\ln(z-\omega_p(s_v,t))\frac{\partial\omega_p(s_v,t)}{\partial s_v}\frac{ds_v(t)}{dt}
\end{aligned} \tag{2.172}$$

Або, з урахуванням (2.171)

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathrm{z,t})=\frac{1}{2\pi i}\int_{s_1}^{s_2}\ln(z-\omega(s_d,t))\frac{\partial}{\partial t}\left(f_d(\omega,t)\frac{\partial\omega}{\partial s_d}\right)ds_d-\frac{1}{2\pi i}\int_{s_{11}}^{s_2}\frac{W_d(\omega(s_d,t))f(\omega,t)d\omega}{z-\omega(s_d,t)}+$$
$$+\sum_{p=1}^{P}\frac{1}{2\pi i}\int_{S_p(t_0)}^{S_p(t)}\ln(z-\omega(s_v,t))\frac{\partial}{\partial t}\left(f_v(\omega_v,t)\frac{\partial\omega}{\partial s_v}\right)ds_v-\sum_{p=1}^{P}\frac{1}{2\pi i}\int_{S_p(t_0)}^{S_p(t)}\frac{W_v(\omega(s_v,t))f(\omega,t)d\omega}{z-\omega(s_v,t)}+ \qquad (2.173)$$
$$+\sum_{p=1}^{P}f_d(\omega_p(s_v,t),t)\ln(z-\omega_p(s_v,t))W(\omega_p(s_v,t))$$

В силу того, що для елементів всієї (вихровий) границі $L_v(t)$, на підставі теореми Кельвіна виконується (2.170), третій доданок в правій частині (2.178) та (2.173) зникне, в силу чого,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathrm{z,t})=\frac{1}{2\pi i}\int_{s_1}^{s_2}\ln(z-\omega(s_d,t))\frac{\partial}{\partial t}\left(f_d(\omega_d,t)\frac{\partial\omega}{\partial s_d}\right)ds_d-\frac{1}{2\pi i}\int_{s_1}^{s_2}\frac{W_d(\omega(s_d,t))f(\omega,t)d\omega}{z-\omega(s_d,t)}+ \qquad (2.174)$$
$$-\sum_{p=1}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{S_p(t_0)}^{S_p(t)}\frac{W_v(\omega(s_v,t))f_v(\omega,t)d\omega}{z-\omega(s_v,t)}+\sum_{p=1}^{P}f_v(\omega_p(s_v,t),t)\ln(z-\omega_p(t))\frac{\partial\omega_p(s_v,t)}{\partial s_v}\frac{ds_v(t)}{dt}$$

Або, з урахуванням (2.171):

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathrm{z,t})=\frac{1}{2\pi i}\int_{s_1}^{s_2}\ln(z-\omega(s_d,t))\frac{\partial}{\partial t}\left(f_d(\omega_d,t)\frac{\partial\omega}{\partial s_d}\right)ds_d-\frac{1}{2\pi i}\int_{s_1}^{s_2}\frac{W_d(\omega(s_d,t))f(\omega,t)d\omega}{z-\omega(s_d,t)}+ \qquad (2.175)$$
$$-\sum_{p=1}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{S_p(t_0)}^{S_p(t)}\frac{W_v(\omega(s_v,t))f(\omega,t)d\omega}{z-\omega(s_v,t)}+\sum_{p=1}^{P}f_d(\omega_p(s_v,t),t)\ln(z-\omega_p(t))W(\omega_p(s_v,t)$$

Перший доданок в (2.175) визначає зміну циркуляційної складової на контурі $L_d(t)$, другий доданок залежить від швидкостей переміщення всіх точок самого контуру $L_d(t)$, третій доданок визначає зміну циркуляційної складової на контурі $L_v(t)$, четвертий доданок залежить від швидкостей переміщення всіх точок контуру $L_v(t)$, а п'ятий доданок враховує внесок від швидкості породження нових (вихрових) елементів контуру $L_v(t)$ на гострих кінцівках контуру $L_d(t)$.

У припущенні виконання умов теореми Кельвіна (про збереження циркуляції) і умов Вілла [22] (при відриві вихрових шарів), отримано аналітичні вирази для похідних по параметру (за часом) від характеристичних функцій відривної течії (циркуляції швидкості і потенціалу течії), з явною залежністю від прояву фізичних ефектів - руху і деформації обтічного контуру, руху і деформації вільної границі (сліду), зміни циркуляції на обтічному контурі, зміною циркуляції на вільної границі, і додання циркуляції на вільної границі (в сліді) за рахунок породження нових елементів вільної границі при відриві рідини з обтічної контуру.

Теорема 2.2. При баротропному русі ідеальної рідини під дією поля об'ємних сил з однозначним потенціалом, зміна циркуляції швидкості по замкнутому рідкому контуру, який охоплює тільки обтічну границю, компенсується зміною циркуляції в сліду за рахунок відриву рідини з обтічної границі.

У випадку зміни циркуляції швидкості на обтічної границі та відриву рідини з обтічної границі вираз похідної по часу від характеристичної функції має представлення:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathrm{z},\mathrm{t}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s_1}^{s_2}\ln(z-\omega(s_d,t))\frac{\partial}{\partial t}\left(f_d(\omega,t)\frac{\partial\omega}{\partial s_d}\right)ds_d - \frac{1}{2\pi i}\int_{s_{11}}^{s_2}\frac{W_d(\omega(s_d,t))f(\omega,t)d\omega}{z-\omega(s_d,t)} +$$
$$+\sum_{p=1}^{P}\frac{1}{2\pi i}\int_{S_p(t_0)}^{S_p(t)}\ln(z-\omega(s_v,t))\frac{\partial}{\partial t}\left(f_v(\omega_v,t)\frac{\partial\omega}{\partial s_v}\right)ds_v - \sum_{p=1}^{P}\frac{1}{2\pi i}\int_{S_p(t_0)}^{S_p(t)}\frac{W_v(\omega(s_v,t))f(\omega,t)d\omega}{z-\omega(s_v,t)} +$$
$$+\sum_{p=1}^{p} f_d(\omega_p(s_v,t),t)\ln(z-\omega_p(s_v,t))W(\omega_p(s_v,t)) \tag{2.176}$$

Таким чином, похідна по часу від характеристичної функції (від комплексного потенціалу течії поза контуром $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$), має інтегральні залежності від зміни циркуляції на обтічному контурі, від розподілених швидкостей руху його точок, від розподілених швидкостей переміщення точок сліду і від швидкості породження нових циркуляційних елементів в сліді.

Отримані вирази можуть стати основою для побудови обчислювальних технологій для гідромеханічних задач з рухомими границями.

2.5. Висновки за розділом

1. Розроблено методологію до побудови обчислювальних технологій моделювання аерогідродинамічних процесів. Розроблено нові математичні моделі, які призначені для застосування в комп'ютерних системах прогнозування, інформаційної підтримки прийняття рішень та забезпечення керування швидкоплинними процесами в реальному масштабі часу.

2. Запропоновано новий метод побудови моделей відривних течій з врахуванням впливу в'язких та інерційних сил у шару скінченної товщини навколо перешкод. Показано, що структура моделей припускає застосування відокремлення змінних та розщеплення задачі. Із застосуванням теорії потенціалу, в'язкого шару, моделей масопереносу моделей Лагранжа, створено методологію прогнозування забруднень в акваторіях.

3. Представлено нову математичну модель течії в пласкому каналі скінченої глибини із застосуванням у сингулярних та гіперсингулярних інтегральних представленнях та з врахуванням в'язкості. В моделі течії в шару скінченої товщини використано порівняльний вплив інерційних та в'язких сил, що забезпечує врахування циркуляційних режимів для течій з помірними числами Рейнольдса. Враховано, що:

– За припущенням шаруватості течії отримано інтеграл якій, у випадку нев'язкої течі зводиться до інтегралу Коші-Лагранжа.

– Постановки задач з використанням даного рівняння для шаруватої течії, з припущенням стаціонарності та малої швидкості руху, в залежності від крайових умов, призводять до класичних розв'язків: течії Пуазейля, течії Hele-Shaw, течії Куетта.

– При усереднюванні інтеграла по товщині шару отримано інтеграл Коші-Лагранжа справедливий для «деякого усередненого по OZ» течії. Отриманий інтеграл може бути використаний при постановках початково-крайових завдань (для розривних в плоскості OXZ, але шаруватих по OZ течій в'язкої рідини) для вирішення яких можливе застосування теорії граничних інтегральних рівнянь.

– Метод побудови математичних моделей базується на відокремленні змінних та розщеплені задач по незалежним змінним. В побудованих нелінійних моделях враховано в’язкість, нестаціонарність та інерційність течії. Побудовані математичні моделі в граничних випадках є класичними розв’язками для шаруватих течій.

– Отримані результати демонструють можливість побудови математичних моделей без нехтування конвективними доданками та здатні враховувати нестаціонарні та циркуляційні режими в течіях, подібних течіям Хіл-Шоу.

– У припущенні виконання умов теореми Кельвіна (про збереження циркуляції) і умов Вілла (при відриві вихрових шарів), отримано аналітичні вирази для похідних по параметру (за часом) від характеристичних функцій відривної течії (циркуляції швидкості і потенціалу течії), з явною залежністю від прояву фізичних ефектів - руху і деформації обтічного контуру, руху і деформації вільної границі (сліду), зміни циркуляції на обтічному контурі, зміною циркуляції на вільної границі, і додання циркуляції на вільної границі (в сліді) за рахунок породження нових елементів вільної границі при відриві рідини з обтічної контуру.

– Таким чином, похідна по часу від характеристичної функції (від комплексного потенціалу течії поза контуром $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$), має інтегральні залежності від зміни циркуляції на обтічному контурі, від розподілених швидкостей руху його точок, від розподілених швидкостей переміщення точок сліду і від швидкості породження нових циркуляційних елементів в сліду. Отримані вирази можуть стати основою для побудови обчислювальних технологій в гідромеханіки.

4. Визначено нові властивості математичних моделей тривимірних течій необхідні для адекватного представлення вихрових та струменевих ефектів.

РОЗДІЛ 3
ДИСКРЕТИЗАЦІЯ МОДЕЛЕЙ

Розділ присвячено дискретизації інтегральних представлень, дискретизації моделей, методам обчислень та обчислювальним схемам.

3.1. Дискретизація сингулярних та гіперсингулярних інтегральних представлень та функцій

У плоскому випадку, розглядаються аналітичні функції, в області з кусково-гладкою межею, яка допускає розбиття на сукупність граничних елементів, $L = \sum_{j=1}^{M} L_j$, так що інтегральне представлення вигляду

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(\omega)\ln(z-\omega)d\omega, \tag{3.1}$$

$$\Phi_n(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\omega)}{(z-\omega)^n}d\omega, \text{ де } n = 1,2,3,4,... \tag{3.2}$$

Для отримання оцінок наближених значень функцій в області при дискретизації моделей та інтегральних представлень буде застосовна вже відома теорема (яка не є результатом даної дисертації):

Теорема 3.1 Нехай аналітична по z функція має інтегральне уявлення виду (3.1) , (3.2), де f неперервна функція точок кусочно-гладкого контуру L , тоді для $\forall z : |z-\omega| > \rho_0 = \min_{\omega \in L}|z-\omega| > 0$, $\exists M$ (число) и $\exists E, E_0$ (узгоджене розбиття контуру $L = \sum_{j=1}^{M} L_j, \omega_{j-1}\omega_j = L_j$, $\omega_{0j} \in L_j$), таке, що справедлива заміна інтегральних представлень (3.1), (3.2) дискретизованим (квадратурним) представленням:

$$\Phi_0(z) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) + O(\varepsilon) \qquad (3.3)$$

$$\Phi_n(z) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\Gamma_j}{2\pi i (z - \omega_{0j})^n} + O\left(\frac{\varepsilon}{\rho_0^n}\right), \qquad (3.4)$$

$$\text{де } n = 1,2,3,4,\dots \quad \Gamma_j = \int_{L_j} f(\omega) d\omega, \quad j = \overline{1, M}. \qquad (3.5)$$

У доведенні застосовано, що в силу тотожностей

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{M} \ln(z - \omega_{0j}) \int_{L_j} f(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{M} \int_{L_j} f(\omega) \ln(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}) d\omega \qquad (3.6)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{M} \ln(z - \omega_{0j}) \int_{L_j} f(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{M} \int_{L_j} f(\omega) \ln\left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right) d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{(z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{(z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega)((1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}})^{-n} - 1) d\omega \qquad (3.7)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{(z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{(z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) \left(\left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right)^{-n} - 1\right) d\omega. \qquad (3.8)$$

Для останніх складових правої частини яких, в умовах теореми, справедливі оцінки

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{M}\int_{L_j} f(\omega)\ln\left(1-\frac{\omega-\omega_{0j}}{z-\omega_{0j}}\right)d\omega\right| \le \frac{M\Delta}{2\pi}\max_{\omega\in L}\left|f(\omega)\right|\left(\ln^2\left(1-\frac{\Delta}{\rho_0}\right)+\left(\frac{\Delta}{\rho_0}\right)^2\right)^{1/2} \qquad (3.9)$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{(z-\omega_{0j})^n}\int_{L_j} f(\omega)\left(\left(1-\frac{\omega-\omega_{0j}}{z-\omega_{0j}}\right)^{-n}-1\right)d\omega\right| \le \frac{M\Delta}{2\pi\rho_0^n}\max_{\omega\in L}\left|f(\omega)\right|\left(\left(1-\frac{\Delta}{\rho_0}\right)^{-n}-1\right) \qquad (3.10)$$

В силу чого, при $L=\sum\limits_{j=1}^{M} L_j$:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\omega)\ln(z-\omega)d\omega-\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{M}\ln(z-\omega_{0j})\int_{L_j} f(\omega)d\omega\right| \le \frac{M\Delta}{2\pi}\max_{\omega\in L}\left|f(\omega)\right|\left(\ln^2\left(1-\frac{\Delta}{\rho_0}\right)+\left(\frac{\Delta}{\rho_0}\right)^2\right)^{1/2}, \qquad (3.11)$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\omega)d\omega}{(z-\omega)^n}-\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{2\pi i(z-\omega_{0j})^n}\int_{L_j} f(\omega)d\omega\right| \le \frac{M\Delta}{2\pi\rho_0^n}\max_{\omega\in L}\left|f(\omega)\right|\left(\left(1-\frac{\Delta}{\rho_0}\right)^{-n}-1\right), \qquad (3.12)$$

де $n=1,2,3,4,...$ $\Gamma_j=\int\limits_{L_j} f(\omega)d\omega$, $j=\overline{1,M}$.

Вибір числа M и розбиття $L=\sum\limits_{j=1}^{M} L_j$ таке, що

$$\left|\frac{\omega-\omega_{0j}}{z-\omega_{0j}}\right| \le \frac{\Delta}{\rho_0}=\varepsilon<1 \qquad (3.13)$$

Так, при $n=1$ и $f\in H(\lambda)$, $0<\lambda<1$, інтегральне представлення (3.2) є інтегралом типу Коши, для якого на контурі справедливі теореми, що застосовні для побудови методу дискретних вихорів.

Але, інтегральні представлення, які застосовні в моделях, виражені через контурні інтеграли (на кусково-гладкому контурі, рис. 3.1.), та потребують коректних обчислень.

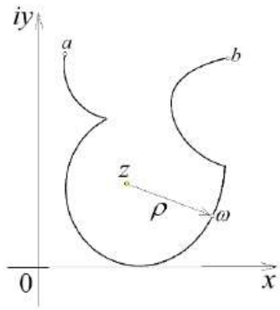


Рисунок 3.1. – Контур

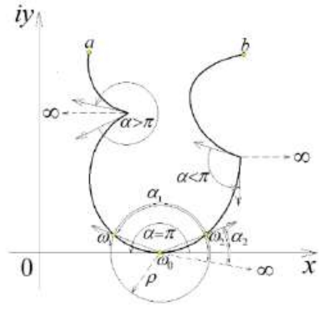


Рисунок 3.2. – Схема виділення особливостей.

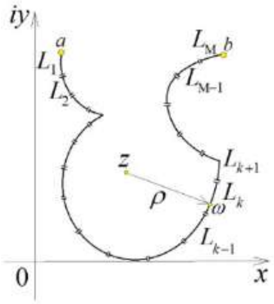


Рисунок 3.3. – Дискретизація контуру

Так, функції виражені через сингулярні інтеграли $\Phi_1(\mathrm{z}) = \int\limits_{L_{ab}} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$, з підінтегральною функцією $f = f(\omega) \in H(\lambda), \quad 0 < \lambda < 1$, які визначені у внутрішніх точках кусково-гладкому контурі (рис. 3.2), розуміються в сенсі головного значення, за Коші:

$$\Phi_1(z) = \int\limits_{L_{ab}} \frac{f(\omega)d\omega}{\omega - \omega_0} = \lim_{\substack{\omega' \to \omega_0 \\ \omega'' \to \omega_0}} \left[\int\limits_a^{\omega'} \frac{f(\omega)d\omega}{\omega - \omega_0} + \int\limits_{\omega''}^{b} \frac{f(\omega)d\omega}{\omega - \omega_0} \right], \tag{3.14}$$

при виконанні умови, що

$$\lim_{\substack{\omega' \to \omega_0 \\ \omega'' \to \omega_0}} \frac{|\omega' - \omega_0|}{|\omega'' - \omega_0|} = 1. \tag{3.15}$$

При застосуванні гіперсингулярних інтегральних представлень з більш сильними особливостями (ядро, з показником ступеня $n \geq 2$) інтеграл

$$\Phi_n(\mathrm{z}) = \int\limits_{L_{ab}} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^n} d\omega, \text{ де } n = 2,3,4,... \quad , \tag{3.16}$$

слід розуміти, за умови (3.15), в сенсі скінченної частини, за Адамаром [42,126,171,192] . Тобто, при виконанні умови (3.15), справджується.

Теорема 3.1 Нехай для функція має інтегральне представлення (3.16), з $n = 2,3,4,...$, де функція $f = f(\omega)$ визначена на контурі L_{ab} і задовольняє умові $|f(\omega) - f(\omega_0)| \le A|\omega - \omega_0|^{\lambda}$, $n-1 < \lambda < n$ (наприклад, $\lambda = n - 1 + \mu$, $0 < \mu < 1$).

В цьому випадку, інтеграл (3.14) на всіх внутрішніх точках контуру L_{ab}, тобто, при $z = \omega_0 \in L_{ab}$, існує як сильно сингулярний, якщо, при виконанні умови (3.15), узагальнии його розуміти в сенсі скінченної частини по Коші-Адамару:

$$\int_{L_{ab}} \frac{f(\omega)d\omega}{(\omega - \omega_0)^n} = \lim_{\substack{\omega' \to \omega_0 \\ \omega'' \to \omega_0}} \left[\int_a^{\omega'} \frac{f(\omega)d\omega}{(\omega - \omega_0)^n} + \int_{\omega''}^{b} \frac{f(\omega)d\omega}{(\omega - \omega_0)^n} - \frac{f(\omega_0)}{(n-1)} \left(\frac{1}{(\omega'' - \omega_0)^{n-1}} - \frac{1}{(\omega' - \omega_0)^{n-1}} \right) \right].$$

(3.17)

Зауваження 3.1: Теорема залишається справедливою, якщо функція $f = f(\omega)$, яка визначена на L_{ab} є такою, що $f^{(n-1)}(\omega) \in H(\mu)$, $0 < \mu < 1$, тобто, $f(\omega) \in H_{n-1}(\mu)$.

Зауваження 3.2: Для інтегрального представлення (3.16), з непарними $n = 2m + 1$ $m = 1,2,3,4,...$ інтеграл (46) на всіх внутрішніх точках контуру L_{ab} існує в сенсі головного значення по Коші.

Теорема 3.2: Нехай $\forall z : \rho(z) = |z - \omega| > \rho_0 = \min_{\omega \in L} |z - \omega| > 0$ маємо узгоджене канонічне розбиття контуру L_{ab}, тобто $\exists M$, $\exists E, E_0$, $L = \sum_{j=1}^{M} L_j$, таке, що представлення (45) має дискретизований аналог

$$\Phi_n(z) = \sum_{j=1}^{M} \frac{\Gamma_j}{2\pi i (z - \omega_{0j})^n} + O\left(\frac{\varepsilon}{\rho_0^n} \right), \qquad (3.18)$$

$$\text{де } n = 1,2,3,4,... \ ; \quad \Gamma_j = \int_{L_j} f(\omega) d\omega, \quad j = \overline{1, M}. \qquad (3.19)$$

Тоді для всіх непарних $n = 2m + 1$ $m = 1,2,3,4,...$, в любий внутрішній $k - й$ точці контуру $\omega_{0k} \in L_k$, $k = \overline{1, M}$, існує оцінка модуля різниці:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega) d\omega}{(\omega_{0k} - \omega)^n} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{M} \frac{1}{2\pi i (\omega_{0k} - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) d\omega \right| \leq \frac{\Gamma_0}{2\pi \rho_0^n} \left| (1 - \varepsilon)^{-n} - 1 \right| + \frac{A \delta^{\mu}}{\pi \mu} = O(\delta^{\mu}) \ , \qquad (3.20)$$

де: A – константа Гельдера, показник Гельдера $0 < \mu < 1$, $\Gamma_0 = \int_L |f(\omega)| d|\omega|$.

3.2. Дискретизовані обчислювальні схеми

Для чисельного розв’язання задач (2.125) – (2.126) застосовано метод дискретних особливостей, заснований на дискретизації інтегральних представлень (3.1)-(3.2).

Задача Коші для знаходження руху окремої точки (системи точок) во внутрішньої частині області, поза її межи --гладкого неперервного контуру, в полі швидкостей, яке визначається інтегральним представленням, заданому на гладкому неперервному контурі.

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \int_{L_{ab}} \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega, \text{ де } n = 1,2,3,4,... \qquad (3.21)$$

$$\bar{z}(t_0) = \bar{z}_0$$

Задача Коші для знаходження руху системи точок, які визначають неперервний контур, в полі швидкостей, яке визначається інтегральним представленням, заданому на гладкому неперервному контурі.

$$\frac{d\overline{\omega}_0(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{ab}} \frac{f(t,\omega(t))}{(\omega_0(t)-\omega(t))^n}\, d\omega(t) \quad \text{де } n = 1,2,3,4,... \tag{3.22}$$

$$\overline{\omega}_0(t_0) = \overline{\omega}_{00}$$

Для формального представлення задачі Коші

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}(\vec{r},t) \tag{3.23}$$

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$$

застосовні (тут приведено явні) різницеві схеми вигляду

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{a_j}{\tau} r^{k+1-j} = \sum_{j=0}^{m} b_j V^{k+1-j} \tag{3.24}$$

Рекурентна формула для знаходження усіх послідовних значень рішення, для лінійних багатокрокових (в тому числі-однокрокових, при m=1) схем буде мати вигляд

$$r^{k+1} = \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j}{a_0} r^{k+1-j} + \tau \sum_{j=0}^{m} \frac{b_j}{a_0} V^{k+1-j} \tag{3.25}$$

В загальному випадку, однокрокові та богатокрокові методи можливо представити в однієї загальної формулі

$$r^{k+1} = \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j}{a_0} r^{k+1-j} + \tau\phi(t_{k+1}, t_k, ..., t_{k+1-m}; V^{k+1}, V^k, ..., V^{k+1-m}) \quad (3.26)$$

Рекурентна формула для знахождения всіх наступних значений рішення.

Нев'язка, похибка апроксимації схеми (*m*-крокового методу) на розв'язку задачі Коші:

$$\psi(\tau) = \sum_{j=0}^{m} \frac{a_j}{\tau} r^{k+1-j} - \sum_{j=0}^{m} b_j V^{k+1-j} \quad (3.27)$$

Локальна похибка ***m-****крокового м*етоду (похибка методу на кроці):

$$\varphi(\tau) = r^{k+1} - \sum_{l=1}^{m} \frac{a_j}{a_0} r^{k+1-j} - \tau \sum_{j=0}^{m} \frac{b_j}{a_0} V^{k+1-j} \quad (3.28)$$

В залежності від схеми апроксимації, похибка апроксимації та локальна похибка мають порядок $\psi(\tau) = O(\tau^N)$, $\varphi(\tau) = O(\tau^{N+1})$ при умові, що праві частини обчислюються в вузлах сітки без похибок.

При наявності абсолютної похибки (від просторової дискретизації) в кожної із *m+1* складових, які присутні у виразі обчислення правої частини вираз з похибкою : $V^{k+1-l} = V^{*k+1-l} + \Delta V^{k+1-l}$. При $\Delta V^{k+1-l} = O(\delta^{\lambda})$ похибка апроксимації буде мати вигляд

$$\psi(\tau, \delta) = \sum_{j=0}^{m} \frac{a_j}{\tau} r^{k+1-j} - \sum_{j=0}^{m} b_j (V^{k+1-j} + \Delta V^{k+1-j}) = O(\tau^{\mathrm{N}} + \delta^{\lambda})$$

(3.29)

$$\varphi(\tau, \delta) = r^{k+1} - \sum_{l=1}^{m} \frac{a_j}{a_0} r^{k+1-j} - \tau \sum_{j=0}^{m} \frac{b_j}{a_0} (V^{*k+1-j} + \Delta V^{k+1-j}) = O(\tau^{N+1} + \tau\delta^{\lambda})$$

Але, з врахуванням $\sum_{l=0}^{m} b_j = 1$ та того, що похибка $\Delta V^{k+1-l} = O(\delta^{\lambda})$ буде майже однаковою для усіх складових, для апроксимації різницевої схеми на контурі буде справедливо:

$$\psi(\tau,\delta) = O(\tau^{N}) + O(\delta^{\lambda}) \qquad (3.30)$$

Але, поза контуром, похибка $\Delta V^{k+1-l} = O\left(\frac{\varepsilon}{\rho^{n}}\right)$ зменшується, при збільшенні відстані від контуру. При слабко змінною відстані від контуру, для оцінки апроксимації різницевої схеми задачі Коші ,поза контуром буде справедливо:

$$\psi(\tau,\delta) = O(\tau^{N}) + O\left(\frac{\varepsilon}{\rho^{n}}\right) \qquad (3.31)$$

Тобто, похибка апроксимації різнецевої схеми для задачі Коші , будь-якого порядку буде непокращуємою, за рахунок другої складової-яка є наслідком застосування методу дискретних особливостей для апроксимації інтегральних представлень.

3.3. Дискретизовані моделі циркуляційних вихрових течій в областях з деформовною рухомою межею

Для моделей з інтегральним представленням запропоновано

Дискретизована модель 1.

$$\Phi(z,t)=\varphi(x,y,t)+i\psi(x,y,t)=\sum_{j=1}^{M}\frac{\Gamma_j(t)}{2\pi i}\ln(z-\omega_{0j}(t))+$$
$$+\sum_{p}^{P}\sum_{s=1}^{n(t)}\frac{\delta_s^p}{2\pi i}\ln(z-\omega_{0s}^p(t)) \tag{3.32}$$

$$\overline{V}(z,t)=u(x.y,t)-iv(x,y,t)=$$
$$=\frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial z}=\sum_{j=1}^{M}\frac{\Gamma_o(t)}{2\pi i(z-\omega_{0j})}+\sum_{p}^{P}\sum_{s=1}^{n(t)}\frac{\delta_s^p}{2\pi i(z-\omega_s^p(t))}, \tag{3.33}$$

$$\Gamma_0=\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_n)+\sum_{p-1}^{P}\sum_{i=1}^{n}\ \delta_i^p=const \tag{3.34}$$

Для визначення динамічних характеристик застосовується

$$c_p(x,y,t)=1-\left(\left(\frac{\partial\varphi(x,y,t)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi(x,y,t)}{\partial y}\right)^2\right)-2\frac{\partial\varphi(x,y,t)}{\partial t} \tag{3.35}$$

Дискретизована модель 1 визначає поля швидкостей $\vec{V}=\vec{V}(x,y,z,t)$ та $c_p(x,y,t)$ навколо границь і перешкод та надає вихідні данні для розв’язування задачі адвекції (2.130).

У термінах дійсного змінного, метод дискретних особливостей [126,139], надає дискретне представлення характеристичної функції у вигляді:

$$\varphi(x,y,t)=\sum_{j=1}^{M}\frac{\Gamma_j(t)}{2\pi}arctg\left(\frac{y-y_{0j}}{x-x_{0j}}\right)+$$
$$+\sum_{p}\ \sum_{s=1}^{n(t)}\frac{\delta_s^p}{2\pi}arctg\left(\frac{y-y_s^p(t)}{x-x_s^p(t)}\right), \tag{3.36}$$

$$\psi(x,y,t)=-\sum_{j=1}^{M}\frac{\Gamma_j(t)}{2\pi}\ln\left((x-x_{0j})^2+(y-y_{0j})^2\right)^{\frac{1}{2}}-$$
$$-\sum_{p}^{P}\sum_{s=1}^{n(t)}\frac{\delta_s^p}{2\pi i}\ln\left((x-x_s^p(t))^2+(y-y_s^p(t))^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.37}$$

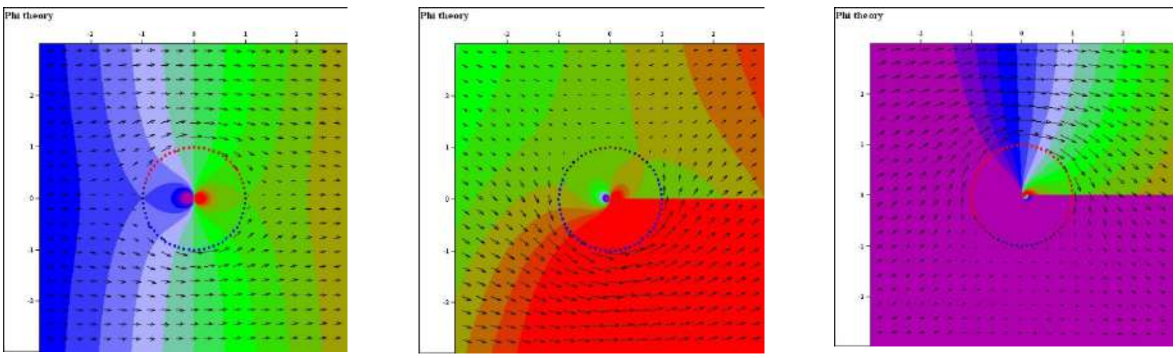
$$\vec{V}(x,y,t)=\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t)\vec{V}_j(x,y,x_{0j},y_{0j})+\sum_{p}\ \sum_{i=1}^{n}\delta_i^p\vec{V}_i^{\,p}(x,y,x_i^p(t),y_i^p(t)), \qquad (3.38)$$

де $\vec{V}_j(x,y,x_{0j}(t),y_{0j}(t))=\left(\dfrac{y_{0j}(t)-y}{2\pi R_j^2},\dfrac{x-x_{0j}(t)}{2\pi R_j^2}\right)$, $R_j=\max\left\{r_j,\sqrt{(x-x_{0j}(t))^2+(y-y_{0j}(t))^2}\right\}$ (3.39)

3.4. Проблеми дискретизації інтегральних представлень

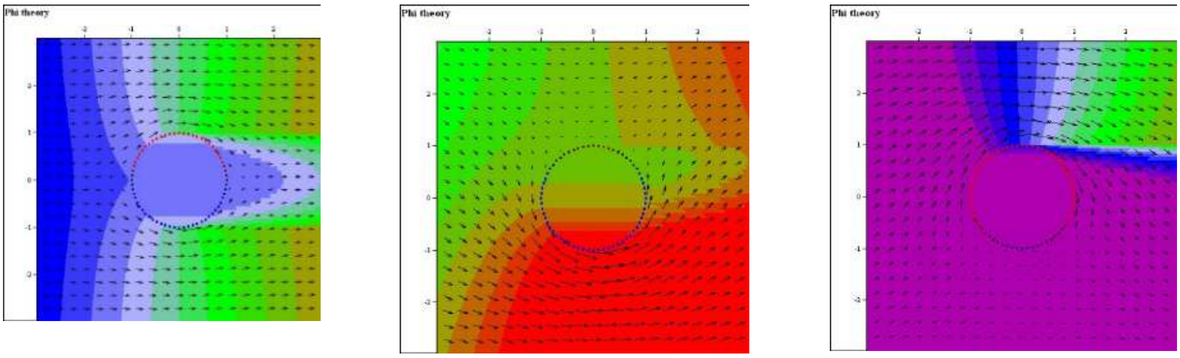
При застосуванні методу дискретних особливостей виникає проблема обчислень дискретизованої характеристичної функції в області, з одного із боків границь області, що відрізняє точний аналітичний розв’язок від розв’язку, який отримано за допомогою представлення (рис.3.5).

Прояви даної проблеми представлено на рис.3.5, на прикладі течії навколо кругового циліндру. На рис. 3.4 та рис. 3.5 представлено векторне поле швидкостей та розподіл потенціалу навколо кругового циліндру. Ізопотенційними лініями є лінії контрасу кольорів.



а)– $\Gamma_0=0$ *б)* – $\Gamma_0>0$ *в)*– $\Gamma_0<0$

Рисунок 3.4 – Точний (аналітичний) розв’язок $\Phi(z)=\overline{V}_\infty z+\dfrac{V_\infty R^2}{z}+\dfrac{\Gamma_0}{2\pi i}\ln(z)$



а) $\Gamma_0 = \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j = 0$ **б)** $\Gamma_0 = \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j > 0$ **в)** $\Gamma_0 = \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j < 0$

Рисунок 3.5 – Наближений чисельно-аналітичний розв’язок

$\Phi(z) = \overline{V}_\infty z + \sum_{j=1}^{M} \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j})$ при $\Gamma_0 = \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j = 0$

На рис. 3.4, рис. 3.5 представлено розподіл характеристичної функції течії навколо кругового циліндру, як для аналітичного розв’язку рис. 3.4, так і для для наближеного рис. 3.5, с дискретизованим представленням характеристичної функції. Слід звернути увагу на те, що аналітичний розв’язок представлений на рис.3.4 має інтегральне представлення, так, що

$$\Phi(z) = \overline{V}_\infty z + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=R} f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega = \overline{V}_\infty z + \frac{V_\infty R^2}{z} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} Ln(z). \qquad (3.40)$$

На рис 3.5. продемонстрована основна проблема методу дискретних вихорів – неможливість побудови неперервного, поза модельованого системою дискретних вихорів контуру, полю характеристичної функції (3.40), залишаючись, при цьому, в „термінології” методу дискретних вихорів (джерел/вихорів), застосовуючи аддитивне представлення у вигляду (3.3):

$$\Phi(z) = \overline{V}_\infty z + \sum_{j=1}^{M} \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) \qquad (3.41)$$

На рис. 3.5 видно, що і для випадку $\Gamma_0 = \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j = 0$ правій частині області утворюється «зона тіні»-частина області з розривними значеннями характеристичної функції.

Побудувати наперервне поле неможливо, в разі застосування МДВ в областях з криволінійною границею.

Проблема виникає з того, що у правій частині виразу (3.41) представлена сума комплексних логарифмів (похибкою нехтуємо) Рівність (3.42), для будь-якої точки z вважається цілком визначеною і має місце за умови, що для багатозначних функцій $\ln(z-\omega)$ обрана її гілка і заданий розріз, що проходить уздовж контура L_{ab}. Але, для дискретизованого представлення (3.18) на Рис.3.5, система розрізів буде проходити по променям (рис. 37), які з'єднують точки $\omega_{0j} \in L_{ab}$ с нескінченно віддаленою точкою (з ∞).

3.5. Метод перетворень і виділення ліній розриву для дискретизованої багатозначної функції на контурі

Метод розв'язання проблеми для дискретизованого контуру, представлено на прикладі порівняння представлень (3.1) та (3.18).

При розв'язуванні ряду задач зручно використовувати апарат теорії функцій комплексної змінної з аналітичними за z функціями та інтегральними представленнями, визначеними на обмеженому (в загальному випадку незамкнутому) контурі L_{ab} Передбачається, що заданим розбиттям контур може бути представлений у вигляді суми дуг

$$L_{ab} = \sum_{j=1}^{M} L_j = \sum_{j=1}^{M} L_{\omega_{j-1}\omega_j}$$

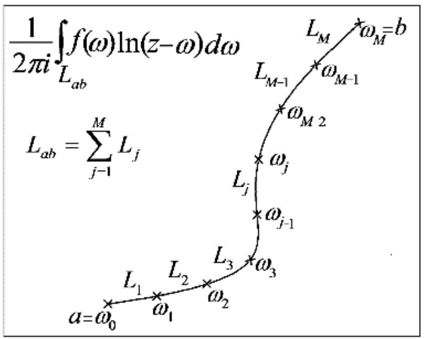


Рисунок 3.6 – Розбиття контур

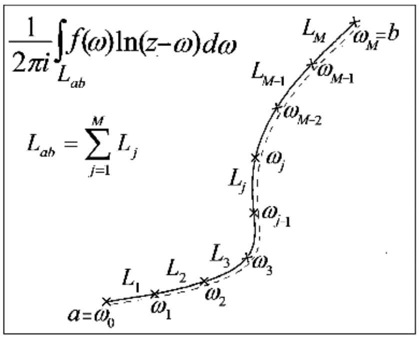


Рисунок 3.7 – Розташування уздовж контуру лінії (розрізу) – розриву подінтегральної функції заданої на контурі

В такому випадку, для інтегрального представлення (3.1) з логарифмічним ядром

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L=\sum_{j=1}^{M} L_j} f(\omega)\ln(z-\omega)d\omega = \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_j} f(\omega)\ln(z-\omega_{0j})d\omega \tag{3.42}$$

В інтегральному представленні з логарифмічним ядром, як показано на рис.3.6. підінтегральний вираз є багатозначною функцією з точкою розгалуження $\omega \in L_{ab}$. на контурі. Але, для представлення (3.45) можна домовитись і вважати розрив таким, що проходить вздовж контура L_{ab} (рис. 3.7) та тільки потім з'єднують точки контуру с нескінченно віддаленою точкою (з ∞).

Для інтегрального представлення (3.45) з логарифмічним ядром, для кожного граничного елементу обирається $\omega_{0j} \in L_j$ так, щоб вони були равновіддалені від кінцівок власного граничного елементу (Рис.3.8).

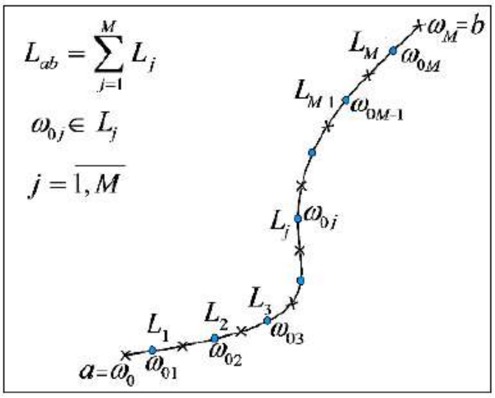


Рисунок 3.8 – При розташуванні точек $\omega_{0j} \in L_j$ на $L_{ab} = \sum_{j=1}^{M} L_j = \sum_{j=1}^{M} L_{\omega_{j-1}\omega_j}$,

для $\Phi_0(z)$ отримаемо представлення (3.6)

При заданому розбитті ($\Delta = \max_j \left| L_{\omega_{j-1}\omega_j} \right|$), для всіх точок z, які знаходяться від контура L_{ab} на відстані, більшій за ρ_0 виконується умова і справджується оцінка (3.9).

Таким чином, згідно (3.18) маємо вираз

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega = \sum_{j=1}^{M} \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}) + O\left(\frac{\Delta}{\rho_0}\right) \tag{3.43}$$

де $\Gamma_j = \int_{L_j} f(\omega) d\omega$ так, що

$$\Gamma_0 = \int_{\sum_j L_j} f(\omega) d\omega = \sum_{j=1}^{M} \int_{L_j} f(\omega) d\omega = \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j \tag{3.44}$$

На відміну, від (3.45), для дискретизованого представлення (3.48), Рис.3.9, система лінії розриву характеристичної функції буде проходити по променям (рис. 39), які з'єднують точки $\omega_{0j} \in L_{ab}$ с нескінченно віддаленою точкою (з ∞).

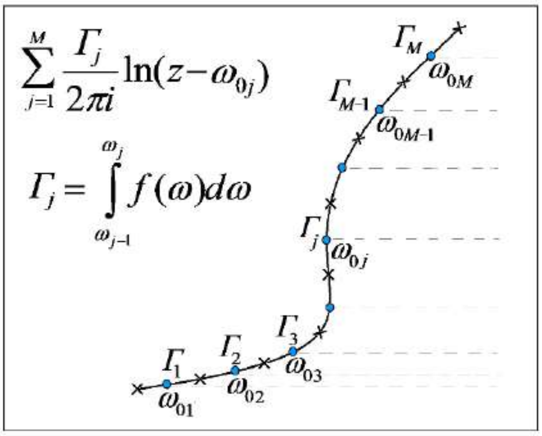


Рисунок 3.9 – Лінії розриву характеристичної функції по променям.

Видно, що проблема виникає з того, що права частина (рис.3.7) виразу (3.41) представлена сума комплексних логарифмів (похибкою нехтуємо). Рівність (3.42), для будь-якої точки z вважається цілком визначеною і має місце за умови, що для багатозначних функцій $\ln(z - \omega)$ обрана її гілка і заданий розріз, що проходить уздовж контура L_{ab}. Для виділення обраної гілки форма розрізу не важлива, але для виділення неперервного (в області) значення функції зручно, щоб розріз проходив уздовж модельованого контура.

Метод перетворень і виділення розрізу для багатозначної функції на контурі

Якщо для інтегрального представлення(3.42) (яке має сенс потенціала – характеристичної функції) і можна домовиться, що розріз в області збігається з контуром, то при обчисленні потенціала – характеристичної функції в аддитивном поданні МДВ (3.43), Рис.3.9, напрямки розрізів вже одноманітна (система променів) для всієї системи дискретних вихорів. В результаті наявна система розривів значень функції поза контуром, яку неможливо усунути зміною числа дискретних вихорів. Однак проблему розривності значень функції поза контуром можна розв'язати. Для цього необхідно побудувати перетворення, що дозволяє визначати однозначну гілку і положення єдиного розрізу в області, для багатозначної функції, визначеної на довільному криволінійному контурі [5, 7].

Для впорядкованої системи дискретних вихорів (апроксимуючих) інтегральне представлення(3.43) допустиме перетворення вигляду (3.45) – перехід до подання у вигляді системи вихрових пар [126] і сумарного вихору:

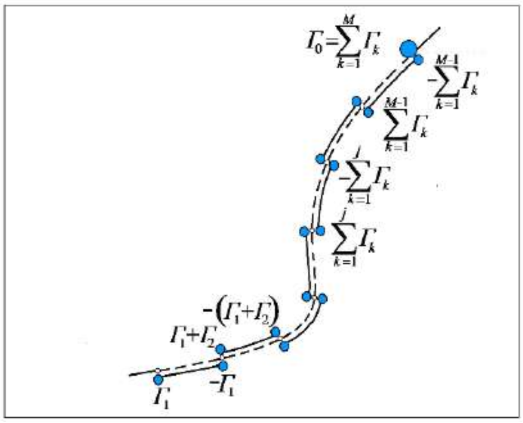


Рисунок 3.10 – Схема розтащування на контурі системи вихрових пар та сумарного вихору

$$\Phi(z)=\sum_{j=1}^{M}\frac{\Gamma_j}{2\pi i}\ln(z-\omega_{0j})=\sum_{j=1}^{M-1}\frac{\sum_{k=1}^{j}\Gamma_k}{2\pi i}\left(\ln(z-\omega_{0j})-\ln(z-\omega_{0j+1})\right)+\frac{\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j}{2\pi i}Ln(z-\omega_{0M}) \quad (3.45)$$

Вважається (умовно), що лінія розрізу (що збігається з лінією контуру), що виділяє область однозначності для функції, породженої системою пар дискретних особливостей (Рис.3.10.) формується з системи розрізів між вихровими парами. Забезпечити виконання даної «умови» можливо перетворенням [126, 273] (при використанні теореми Лагранжа про скінченне прирощення) до системи вихрових пар і сумарного вихора

$$\Phi(z)=\sum_{j=1}^{M-1}\frac{(\omega_{0j+1}-\omega_{0j})\sum_{k=1}^{j}\Gamma_k}{2\pi i}\left(\frac{\ln(z-\omega_{0j+1}+\omega_{0j+1}-\omega_{0j})-\ln(z-\omega_{0j+1})}{\omega_{0j+1}-\omega_{0j}}\right)+ \\ +\frac{\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j}{2\pi i}Ln(z-\omega_{0M}) \tag{3.46}$$

до системи диполів и сумарного вихора

$$\Phi(z)=\sum_{j=1}^{M-1}\frac{(\omega_{0j+1}-\omega_{0j})\sum_{k=1}^{j}\Gamma_k}{2\pi i(z-\omega_j)}+\frac{\Gamma_0}{2\pi i}Ln(z-\omega_{0M}) \tag{3.47}$$

або інакше

$$\Phi(z)=\sum_{j=1}^{M-1}\frac{D_j}{2\pi i(z-\omega_j)}+\frac{\Gamma_0}{2\pi i}Ln(z-\omega_{0M}) \tag{3.48}$$

де $\omega_j=0.5\left(\omega_{0j+1}+\omega_{0j}\right),\ \Gamma_0=\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j\ ,\ D_j=(\omega_{0j+1}-\omega_{0j})\sum_{k=1}^{j}\Gamma_k$ (3.49)

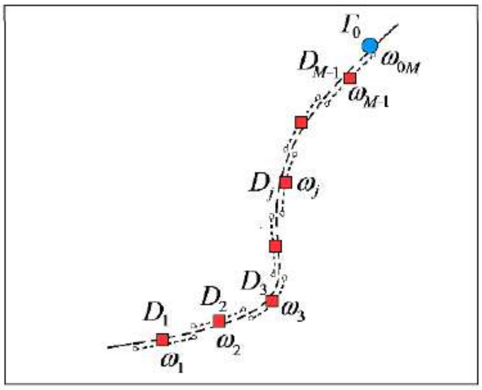


Рисунок 3.11 – Схема розтащування на контурі системи діполів та сумарного вихору

Лінії (розрізу) – розриву подінтегральної функції заданої на контурі розташування уздовж контуру та тільки потім з'єднують точки контуру с нескінченно віддаленою точкою (з ∞).

Для адитивного представлення у вигляді суми дискретних вихорів

$$\Phi(z)=\sum_{j=1}^{M}\frac{\Gamma_j}{2\pi i}\ln(z-\omega_{0j})=\varphi(x,y)+i\psi(x,y) \tag{3.50}$$

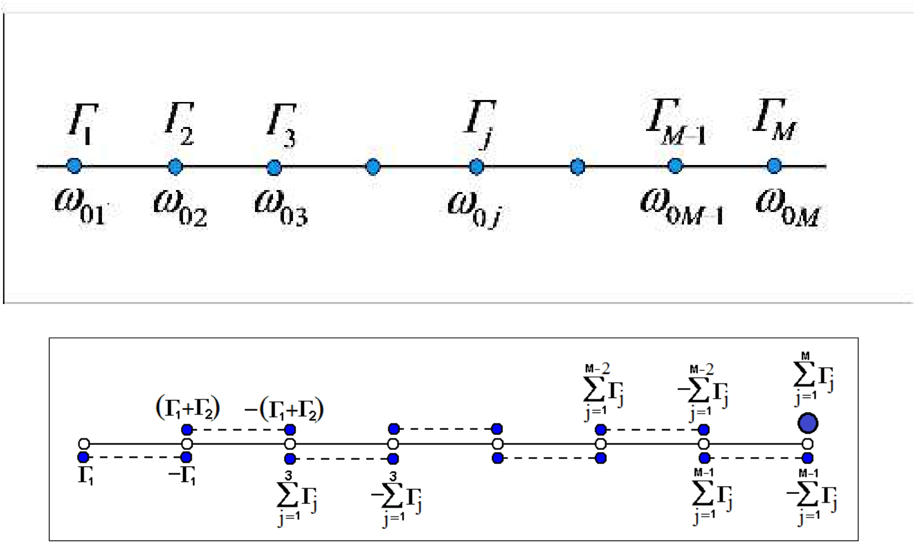


Рисунок 3.12 – Схема розтащування на контурі системи дискретних особливостей – вихорів.

дійсна частина має вигляд суми багатозначних функцій з точками розгалуження $(x_{0j}, y_{oj}),\ j=\overline{1,M}$

$$\varphi(x,y)=\operatorname{Re}\Phi(z)=\sum_{j=1}^{M}\frac{\Gamma_j}{2\pi}arctg\,\frac{y-y_{0j}}{x-x_{0j}} \tag{3.51}$$

уявна частина має вигляд суми однозначних функцій з логарифмічними особливостями в точках $(x_{0j}, y_{0j}),\ j=\overline{1,M}$ (або логарифмічною функцією від добутку з особливостями в тих самих точках)

$$\psi(x,y)=\operatorname{Im}\Phi(z)=-\sum_{j=1}^{M}\frac{\Gamma_j}{2\pi}\ln\left((x-x_{0j})^2+(y-y_{0j})^2\right)^{0.5}=$$
$$=\ln\left(\prod_{j=1}^{M}\left((x-x_{0j})^2+(y-y_{0j})^2\right)^{-\frac{\Gamma_j}{4\pi}}\right) \tag{3.52}$$

Для розташування системи диполів і логарифма, як показано на схемі Рис.3.13,

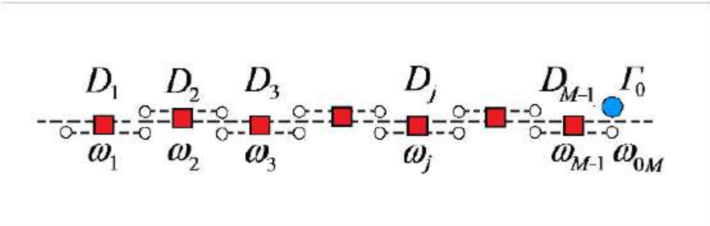


Рисунок 3.13 – Схема розтащування на контурі системи діполів та сумарного вихору

функція з адитивним поданням у вигляді суми диполів і логарифма, має дійсну та уявну частину

$$\Phi(z)=\sum_{j=1}^{M-1}\frac{D_j}{2\pi i(z-\omega_j)}+\frac{\Gamma_0}{2\pi i}Ln(z-\omega_{0M})=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)\,. \tag{3.53}$$

де $\omega_j=0.5\left(\omega_{0j+1}+\omega_{0j}\right)$, $\Gamma_0=\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j$, $D_j=(\omega_{0j+1}-\omega_{0j})\sum_{k=1}^{j}\Gamma_k$.

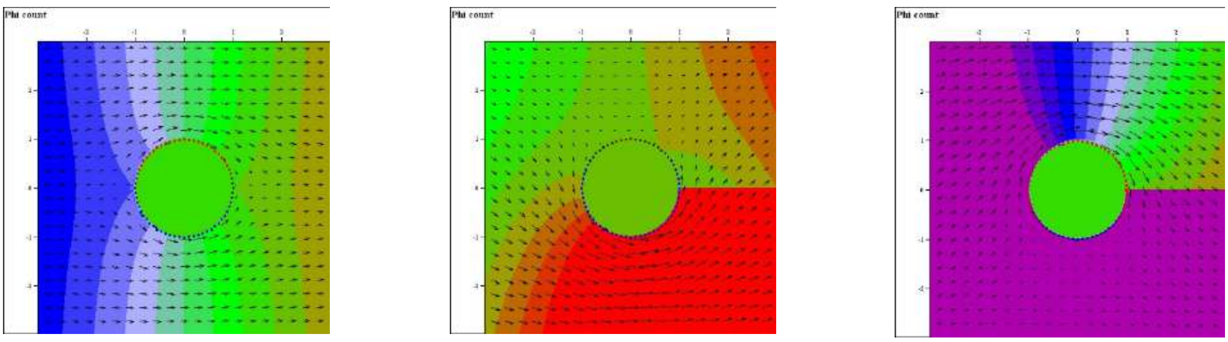
Дійсна частина має вигляд суми однозначних функцій з особливостями (полюси) і одним багатозначним арктангенсом, з точкою розгалуження (x_{0M}, y_{0M}):

$$\varphi(x,y)=\operatorname{Re}\Phi(z)=\sum_{j=1}^{M-1}\frac{\sum_{k=1}^{j}\Gamma_k}{2\pi}\left(\frac{(y_{0j+1}-y_{0j})(x-x_j)-(x_{0j+1}-x_{0j})(y-y_j)}{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2}\right)+ \tag{3.54}$$
$$+\frac{\Gamma_0}{2\pi}arctg\frac{y-y_{0M}}{x-x_{0M}}$$

$$\psi(x,y)=\operatorname{Im}\Phi(z)=-\sum_{j=1}^{M-1}\frac{\sum_{k=1}^{j}\Gamma_k}{2\pi}\left(\frac{(x_{0j+1}-x_{0j})(x-x_j)+(y_{0j+1}-y_{0j})(y-y_j)}{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2}\right)- \tag{3.55}$$
$$-\frac{\Gamma_0}{2\pi}\ln\left((x-x_{0M})^2+(y-y_{0M})^2\right)^{0.5}$$

Метод перетворення, що наведено вище забезпечує вирішення проблеми неможливісті побудови неперервної поза модельованого системою дискретних вихорів контуру характеристичної функції, залишаючись, при цьому, в «термінології» методу дискретних вихорів (джерел вихорів).

При застосування наведеного алгоритму для замкненого контуру вибір початкової точки контуру достатньо умовно. Його може виконати і будь-яким іншим способом.



а) $\Gamma_0=\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j=0$ б) $\Gamma_0=\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j>0$ в) $\Gamma_0=\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j<0$

Рисунок 3.14 – Наближений чисельно-аналітичний розв’язок

$$\Phi(z)=\overline{V}_\infty z+\sum_{j=1}^{M-1}\frac{D_j}{2\pi i(z-\omega_j)}+\frac{\Gamma_0}{2\pi i}Ln(z-\omega_{0M})$$

при $\omega_j=0.5\left(\omega_{0j+1}+\omega_{0j}\right)$ $\quad \Gamma_0=\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j$ $\quad D_j=(\omega_{0j+1}-\omega_{0j})\sum_{k=1}^{j}\Gamma_k$

Довільність у виборі гілок на контурі, виборі початку і напрямки обходу контурів впливають тільки на чисельні значення розподілених диполів і положення сумарного вихору (від якого виконується розріз), але не впливає на чисельне значення функції поза контуром. Замкнутість контуру також не впливає на алгоритм перетворення системи дискретних вихорів в систему диполів і сумарний вихор, але вибір початку і кінця контурів визначає положення результуючого вихору і, як наслідок, положення лінії розрізу в області. Вираз (3.54) дозволяє обчислювати значення дійсної частини комплексного потенціалу з єдиною лінією розриву для будь-яких замкнених і розімкнутих контурів. Вибір початку і кінця контуру виділяється тільки положенням початкової точки а інтегрування по контуру. Лінія розриву з'єднує точку кінця контуру з нескінченно віддаленою точкою.

Із рисунку 3.14 видно, що ізолінії потенціалу всередині області течії (поза циліндра) збігаються з ізолініями на Рис.3.4.

Зауваження

Обгрунтування коректності вищеневеденого перетворення базується на інтегруванні по частинам інтегрального представлення із особливим ядром $K(z-\omega)$:

$$I(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{ab}} f(\omega)K(z-\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b f(\omega)K(z-\omega)d\omega \qquad (3.56)$$

У припущенні, що $F(\omega)=F(a)+\int_a^{\omega} f(\xi)d\xi \qquad \xi,\omega\in L_{ab}$ (3.57)

$$\Gamma(\omega,a)=F(\omega)-F(a)=\int_a^{\omega} f(\xi)d\xi \qquad \xi,\omega\in L_{ab} \qquad (3.58)$$

При позначенні ,

$$\Gamma_0=\Gamma(b,a)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(\xi)d\xi \qquad \xi,\omega\in L_{ab} \qquad (3.59)$$

де a и b початкова та кінцева точки контуру L_{ab} .

Після інтегрування за частинами, отримаемо вираз, для обгрунтуванню (3.52):

$$I(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_a^b f(\omega)d\omega\right)K(z-b)+\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\left(\int_a^\omega f(\xi)d\xi\right)\frac{\partial}{\partial z}K(z-\omega)d\omega \quad (3.60)$$

3.6. Врахування властивостей модельних представлень

Для вирішення задач аерогідродинаміки з рухомимита деформовними границями виникає необхідність обчислення динамічних і кінематичних характеристик течії які змінюються за часом. У багатьох випадках [203,205,142,144], в чисельних моделях, закони збереження і вирази для зміни характеристик виводилися вже із дискретизованих інтегральних виразів, що в результаті призводило до втрати складових і співмножників, що визначають суть фізичних явищ та процесів.

3.6.1. Врахування рухомості границь області

В другому розділі було показано, що, похідна по часу від характеристичної функції (від комплексного потенціалу течії поза контуром $L(t)=L_d(t)+L_v(t)$), має інтегральні залежності від зміни циркуляції на обтічному контурі, від розподілених швидкостей руху його точок, від розподілених швидкостей переміщення точок сліду і від швидкості породження нових циркуляційних елементів в сліді.

У припущенні Теореми 2.1 та виконання умов теореми Кельвіна (про збереження циркуляції) і умов Вілла (при відриві вихрових шарів), отримано аналітичні вирази для похідних по параметру (за часом) від характеристичних функцій відривної течії (циркуляції швидкості і потенціалу течії), з явною залежністю від прояву фізичних ефектів - руху і деформації обтічного контуру, руху і деформації вільної границі (сліду), зміни циркуляції на обтічному контурі, зміною циркуляції на вільної границі, і додання циркуляції на вільної границі (в сліді) за рахунок породження нових елементів вільної границі при відриві рідини з обтічної контуру.

Доцільно відзначити, що перший доданок в (2.168) визначає зміну циркуляційної складової на контурі $L_d(t)$, другий доданок залежить від швидкостей переміщення всіх точок самого контуру $L_d(t)$, третій доданок визначає зміну циркуляційної складової на контурі $L_v(t)$, четвертий доданок залежить від швидкостей переміщення всіх точок контуру $L_v(t)$, а п'ятий доданок враховує внесок від швидкості породження нових (вихрових) елементів контуру $L_v(t)$ на гострих кінцівках контуру $L_d(t)$.

3.6.2. Обчислення похідних по часу від дискретизованих інтегральних представлень

Гідродинамічні характеристики циркуляційних течій ідеальної рідини в областях з рухомою межею у будь-який момент часу *t* визначаються формою області і геометрією змінних меж [126]. В термінах методу дискретних особливостей (МДО) потенціал течії (потенціал набігаючого потоку + потенціал обтічного контуру + потенціал вихрового сліду) і вектор швидкості визначаються виразами (3.32)-(3.34).

Для нестаціонарних гідродинамічних задач [74-89,126] зі змінною в часі геометрією границь (рух, деформація і породження нових елементів-прі відриві вихорів), і змінною циркуляцією навколо границь, обчислення похідної від потенціалу за часом, згидно (2.176) має формальний вигляд:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi(x,y,t_{n+1})}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{M}\frac{\dot{\Gamma}_j(t_{n+1})}{2\pi}arctg\left(\frac{y-y_j(t_{n+1})}{x-x_j(t_{n+1})}\right)+\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{n}\frac{\dot{\delta}_i^p}{2\pi}arctg\left(\frac{y-y_i^p(t_{n+1})}{x-x_i^p(t_{n+1})}\right)- \\
&-\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_{n+1})\left(\vec{V}_j(x,y,x_{0j}(t_{n+1}),y_{0j}(t_{n+1})),\vec{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}),y_{0j}(t_{n+1}))\right)- \\
&-\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^p\left(\vec{V}_i(x\ ,y\ ,x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1})),\vec{W}_v(x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1}))\right)+ \\
&+\sum_{p=1}^{P}\frac{\dot{\delta}_{n+1}^p}{2\pi}arctg\left(\frac{y-y_{n+1}^p(t_{n+1})}{x-x_{n+1}^p(t_{n+1})}\right)- \\
&-\sum_{p=1}^{P}\delta_{n+1}^p\left(\vec{V}_{n+1}(x,y,x_{n+1}^p(t_{n+1}),y_{n+1}^p(t_{n+1})),\vec{W}_v(x_{n+1}^p(t_{n+1}),y_{n+1}^p(t_{n+1}))\right)
\end{aligned} \tag{3.61}$$

При врахуванні <u>Теореми 2.1</u>., та (2.168)і(2.169) маємо:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi(x,y,t_{n+1})}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{M}\frac{\dot{\Gamma}_j(t_{n+1})}{2\pi}arctg\left(\frac{y-y_j(t_{n+1})}{x-x_j(t_{n+1})}\right)+\sum_{p=1}^{P}\frac{\dot{\delta}_n^p}{2\pi}arctg\left(\frac{y-y_i^p(t_{n+1})}{x-x_i^p(t_{n+1})}\right)- \\
&-\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_{n+1})\left(\vec{V}_j(x,y,x_{0j}(t_{n+1}),y_{0j}(t_{n+1})),\vec{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}),y_{0j}(t_{n+1}))\right)- \\
&-\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i^p\left(\vec{V}_i(x\ ,y\ ,x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1})),\vec{W}_v(x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1}))\right)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

У правій частині виразу (3.61), (3.62) перші два доданки містять розривні функції (які мають логарифмічні особливості, притоманні для циркуляційного представлення), що не дозволяє його використовувати для обчислення значень похідної в області, в усієї області, поза границями. Через наявність неоднозначних функцій в (3.62) за обтічним контуром довільної форми утворюється «зона тіні» (що складається з системи розривів, Рис.3.8), в якій не можуть бути обчислені похідні та усі характеристики, які визначаються через похідні (локальні і розподілені кінематичні та динамічні характеристики течії).

В силу вищевикладеного, обчислення характеристик течії з використанням виразів (3.62) можливо тільки для обмеженої множини задач із границями які мають просту (прямолінійною) геометрією. Для більш загального випадку задач з границями складної форми (Рис.3.8) виникають проблеми з обчисленням, як функції так і похідної (проблема наявності системи розривів в значенні функції поза контуром $L = L_d + L_v$).

3.7. Дискретизація інтегральних представлень та адаптація МДО до задач адвекції

При традиційної дискретизації границі із розташуванням як дискретних особливостей, так і точок колокації на лінії границі (рис.3.7) лінія течії не співпадає із лінією границі області. Виконання умови непроникнення через границю в МДО задовольняється спеціальним алгоритмом, в якому непроникнення забезпечується примусовим віддзеркаленням маркованих частинок від границь.

Розв’язування задач адвекції в рідини потребує гладкості границь області течії. Адаптація методу дискретних особливостей до задач адвекції полягає в зміщенні положення дискретних особливостей вздовж нормалі від границі на відстань, що не перевищує відстань між точками колокації так, щоб лінія течії співпадала із лінією границі області та залишалася кусково-гладкою (рис. 3.19). При цьому, апроксимація границі точками колокації забезпечує умови дискретизації границь області течії із точністю, яку визначено апроксимацією квадратурного представлення. Для задачі адвекції (3.130) застосовна циркуляційна модель (2.122)-(2.124) течії в мілкій акваторії у вигляді плоского каналу зі складною формою границь (узбережжя, перешкоди). Глибина каналу вважається малою. Течія передбачається паралельною площині дна каналу. Дискретизована модель (3.32)-(3.35) течії, з адаптованим розбиттям границі, забезпечує поле швидкостей

$\vec{W}_\alpha(\vec{r}_\alpha(t),t)=\vec{V}(x_\alpha,y_\alpha,z_\alpha,t)$ в області з гладкою границею для розв’язування задачі адвекції (2.130).

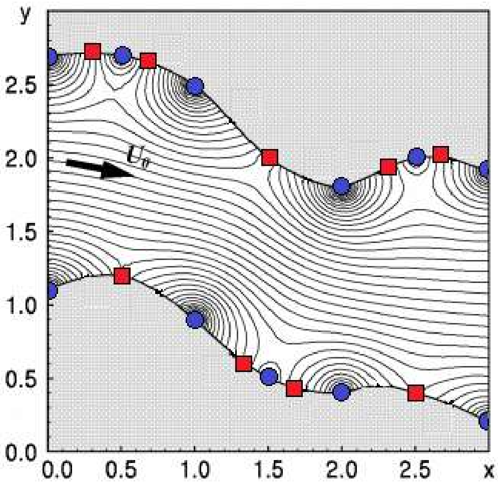


Рисунок 3.18 – Дискретизація границь області для МДО

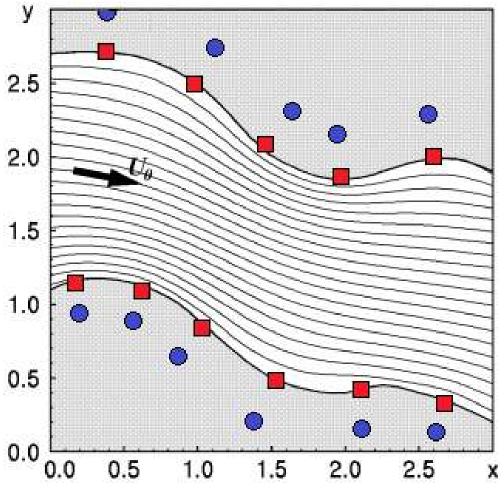


Рисунок 3.19 – Адаптована дискретизація границь області

Прогнозування еволюції плями забруднення на поверхні акваторії зводиться до задачі адвекції. Прогнозування еволюції плями забруднення базується на моніторингу лінії, яка оконтурює виділену область. Форма виділеної області в задачах адвекції апроксимується системою маркованих точок-частинок (пасивних маркерів), впорядковане з'єднання яких формує контур границь області. Рух маркерів описує еволюцію границі області (наприклад, забруднення) на морській поверхні з плином часу. Виділення гладких відрізків контуру дозволяє застосувати процедуру редискретизації частини границі при сильному розтягуванні або стисненні її сегментів в залежності від кількості маркерів, що утворюють сегмент контуру.

Для врахування впливу вітру на зсувну течію в поверхневому шару застосовна модель «хмари», що складається із системи вортонів над поверхнею течії (рис. 3.20). Вплив вітру (3.21) визначається інтенсивністю системи вортонів в «хмарі» (рис. 3.20), та їх просторовою орієнтацією над областю течії, що задається за результатами метеопрогнозу. Вплив від «хмари» вортонів є моделлю вітрового впливу на морську поверхню, який призводить до змін поля швидкостей основної течії в акваторії.

3.8. Дискретизована модель додаткових (вітрових) впливів

В межах методу дискретних особливостей, при розв'язанні гідродинамічних задачі можливо враховувати внесок вітрової компоненти швидкості на поверхні течії. Для цього над розрахунковою областю, над деякою базовою точкою A можна розмістити систему вортонів (рис. 3.20). Вона складається з K вортонів однакової інтенсивності Γ в глибині рисунку і шару вортонів з інтенсивністю $-\Gamma$ в передній частині рисунку. Інтенсивність вортонів визначатиме величину модуля швидкості поверхневої течії, наведеної вітром, а кут α може описати напрямок вітру. На рис. 3.20: a – довжина шару вортонів, a b – відстані між шарами вортонів з протилежними за знаком інтенсивностями.

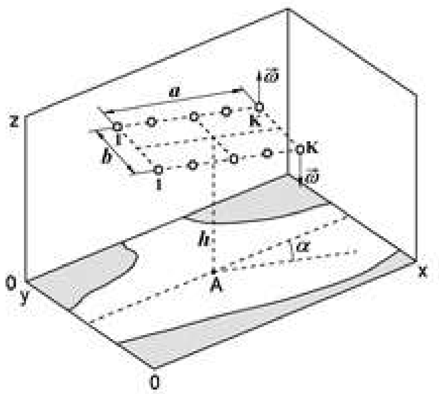


Рисунок 3.20 – Розподіл системи вортонів над площиною течії

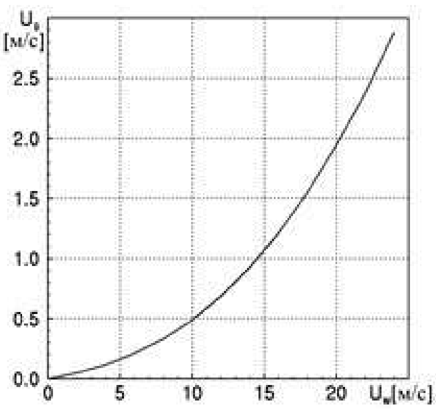


Рисунок 3.21 – Залежність швидкості поверхневої течії U_s від швидкості вітру Uw за результатами натурних вимірювань

У випадку $\alpha = 0^o$ кожний вортон в системі координат, пов'язаною з точкою A, має такі параметри ($k = 1,2, \dots, K$)

$$x_k^{(1)} = -\frac{a}{2} + \frac{ak}{K-1}, y_k^{(1)} = \frac{b}{2}, \Gamma_k^{(1)} = \Gamma,$$

$$x_k^{(2)} = -\frac{a}{2} + \frac{ak}{K-1}, y_k^{(2)} = -\frac{b}{2}, \Gamma_k^{(2)} = -\Gamma. \tag{3.63}$$

Така система вортонів створює швидкість в точці A, модуль якої визначається виразом

$$U_s = \frac{\Gamma b}{2\pi} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{[x_k^{(1)}]^2 + b^2/4 + h^2}. \tag{3.64}$$

Залежність усередненої за часом швидкості поверхневої течії Us від усередненого значення швидкості вітру U_w, представлена за результатами натурних вимірювань, показана на рис. 3.21. В цьому випадку для заданого усередненого значення швидкості вітру можна визначити відповідне йому значення модуля швидкості поверхневої течії. Вираз (3.79) дозволяє для кожного моменту часу визначити значення інтенсивностей вортонів над розрахунковою площиною, які наводить система вортонів, що моделює вплив вітру на швидкість поверхневої течії.

Поворот системи на кут α призводить до зміни координат кожного вортона. Нові координати вортона в системі координат, пов'язаної з системою координат розрахункової області, приймають значення

$$x_k = x_A + x_k \cos\alpha + y_k \sin\alpha,$$

$$y_k = y_A - x_k \sin\alpha + y_k \cos\alpha \quad (3.65)$$

для кожного з шарів вортонів. Тоді функція потоку, наведена системою вортонів, приймає значення

$$\Psi_b(x,y) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{[x-x_k^{(1)}]^2 + [y-y_k^{(1)}]^2 + h^2}{[x-x_k^{(2)}]^2 + [y-y_k^{(2)}]^2 + h^2}, \quad (3.66)$$

а компоненти швидкості течії можна визначити з виразів

$$U_b(x,y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \sum_{k=1}^{K} \left\{ \frac{y-y_k^{(1)}}{[x-x_k^{(1)}]^2 + [y-y_k^{(1)}]^2 + h^2} - \frac{y-y_k^{(2)}}{[x-x_k^{(2)}]^2 + [y-y_k^{(2)}]^2 + h^2} \right\},$$

$$V_b(x,y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \sum_{k=1}^{K} \left\{ \frac{x-x_k^{(1)}}{[x-x_k^{(1)}]^2 + [y-y_k^{(1)}]^2 + h^2} - \frac{x-x_k^{(2)}}{[x-x_k^{(2)}]^2 + [y-y_k^{(2)}]^2 + h^2} \right\} \quad (3.67)$$

в поточний момент часу для заданої величини вітру і його напрямку. В цьому випадку система лінійних алгебраїчних рівнянь (3.83) щодо невідомих інтенсивностей фіксованих точкових вихорів має вигляд ($j = 1,2,\ldots,N$)

$$\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i(t)\ln[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] = -4\pi\{\Psi(x_j, y_j) + \Psi_b(x_j, y_j, t)\}. \quad (3.68)$$

Після визначення інтенсивностей Γ_i фіксованих точкових вихорів можна визначити в довільній точці течії значення функції

$$\Psi(x, y, t) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \ln[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2] + \Psi_b(x, y, t) \quad (3.69)$$

і проекції швидкості течії поверхневої течії

$$U(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \frac{y - y_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} + U_b(x, y, t), \quad (3.70)$$

$$V(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \frac{x - x_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} + V_b(x, y, t) \quad (3.71)$$

з урахуванням нестаціонарності вітрового навантаження.

Поставлену задачу зручно привести до безрозмірного випадку відносно L_0 (характерний геометричний масштаб задачі) і T_0 (характерний часовий масштаб). В цьому випадку безрозмірні величини задачі приймають такі значення

$$\begin{aligned} &x^* = \frac{x}{L_0}, y^* = \frac{y}{L_0}, z^* = \frac{z}{L_0}, \\ &U^* = \frac{UT_0}{L_0}, V^* = \frac{VT_0}{L_0}, \Gamma^* = \frac{\Gamma T_0}{L_0^2}, \Psi^* = \frac{\Psi T_0}{L_0^2}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Підстановка виразів (3.85) в вирази, представлені в цьому розділі роботи, призводить до нормованих рівнянь, математичний запис яких не змінюється. За необхідності, нормовані величини можуть бути денорміровані відповідно до

$$x = x^* L_0, y = y^* L_0, z = z^* L_0,$$
$$U = \frac{U^* L_0}{T_0}, V = \frac{V^* L_0}{T_0}, \Gamma = \frac{\Gamma^* L_0^2}{T_0}, \Psi = \frac{\Psi^* L_0^2}{T_0}. \quad (3.73)$$

Надалі зірочки при обезразмеренних величинах будуть опущені. Поставлена математична задача буде розв’язана в безрозмірному вигляді.

3.9. Дискретизована модель суттєво деформовного контуру для задач двовимірної адвекції

З плином часу спочатку гладкий контур, що охоплює виділену рідину, під дією течії схильний до деформації. Довжина контуру з плином часу може значно збільшитися. Тому для формування границь виділеної області для поточного моменту часу необхідно передбачити процедуру додавання маркерів.

У даній роботі застосовується метод кускової поліноміальної інтерполяції (КПІ) [12, 108, 110], який використовує довжину контура як параметр кривої. За необхідності додавання маркерів в досліджуваний контур, цей метод використовує дві незалежні інтерполяційні формули для дискретних значень $x(l_j)$ і $y(l_j)$, де l_j – довжина контуру від першого маркера до j-го маркера.

Аналіз процесу адвекції різних гідродинамічних течій [163, 110] показує, що спочатку гладкий контур в процесі адвекції може відчувати численні злами, вигини і утворення спіралей. Інтерполяція таких ділянок контуру призводить до появи великих інтерполяційних помилок, оскільки функції $x(l)$ або $y(l)$ (або одночасно) в областях зламу зазнають розрив першого роду. Для інтерполяції таких сегментів зручно користуватися методом кускової поліноміальної інтерполяції, в якому досліджуваний контур спочатку аналізується на наявність зламів, а потім тільки гладкі ділянки контуру піддаються інтерполяції.

У роботі застосовується поліном Лежандра N-го порядку за схемою Ейткена [12] для інтерполяції функції, заданої системою точок (x_i, y_i) (при $i = 0,1, \dots, N$) у вигляді

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n \prod_{i=0}^{N-1} (x - x_i), \tag{3.74}$$

де

$$b_0 = y_0, b_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, b_2 = \left(\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - b_1\right)\frac{1}{x_2 - x_1}, \tag{3.75}$$
$$b_3 = \left[\left(\frac{y_3 - y_0}{x_3 - x_0} - b_1\right)\frac{1}{x_3 - x_1} - b_2\right]\frac{1}{x_3 - x_2}, \dots$$

і т.д. При кожному зверненні до процедури інтерполяції контура необхідно видалити точки контуру, для яких взаємна відстань менша деякого критичного значення $l_{i,i-1} < l_{min}^{cr}$. Це означає, що маркери розташовані дуже близько один до одного. Використання надмірно великої кількості маркерів при проведенні обчислень може необгрунтовано збільшити обсяги обчислень. З іншого боку, якщо ця відстань $l_{i,i-1} > l_{max}^{cr}$, то в цей сегмент контуру слід додати нові маркери.

Процес додавання маркерів починається з виділення гладких фрагментів контуру. Для цього аналізується кут θ, який утворений точками (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i) і (x_{i+1}, y_{i+1}) з вершиною в точці (x_i, y_i). Якщо цей кут менший критичного значення $\theta = \theta_{cr}$, точка (x_i, y_i) оголошується точкою зламу неперервного контура. Потім інтерполяції піддаються гладкі сегменти контуру і, за необхідності, визначаються нові координати точок контуру з використанням (3.74) одночасного для функцій $x(l)$ і $y(l)$.

При побудові інтерполяційної функції можуть виникнути різні випадки в залежності від положення точок зламу контура. Всі ці випадки показані на рис.3.22. Тут цифрами $0, \dots, 5$ показана послідовність точок контуру, грецькими буквами позначені кути, освіченими лініями, що з'єднують послідовність точок контуру. Товстою лінією показаний сегмент контуру, в який можуть бути додані нові точки.

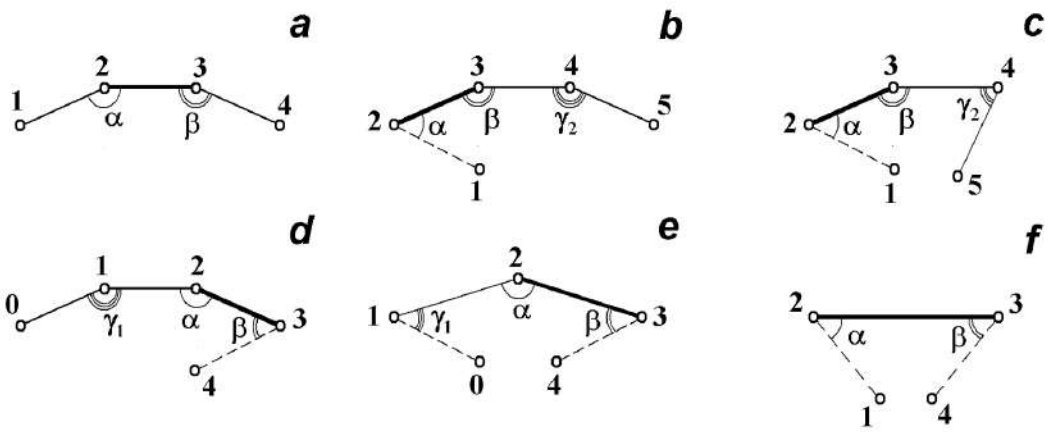


Рисунок 3.22 – Дільниці інтерполяції неперервного контуру

Алгоритм, для аналізу умов на сегментах контуру:

– При $\alpha > \theta_{cr}$ і $\beta > \theta_{cr}$, будується інтерполяційний многочлен (3.74) третього порядку по чотирьох точках $(1,2,3,4)$ для інтерполяції сегмента $[104,105,107,108]$ (рис 3.22,a).

– При $\alpha < \theta_{cr}$, але $\beta > \theta_{cr}$, аналізується кут γ_2. Якщо $\gamma_2 > \theta_{cr}$, тоді будується інтерполяційний многочлен (3.74) третього порядку по чотирьох точках $(2,3,4,5)$ для інтерполяції сегмента $[104]$ (рис 3.22,b). В іншому випадку, якщо $\gamma_2 < \theta_{cr}$, будується інтерполяційний многочлен (3.74) другого порядку по трьох точках $(2,3,4)$ для інтерполяції сегмента $[104]$ (рис 3.22, c).

– При $\alpha > \theta_{cr}$, але $\beta < \theta_{cr}$, тоді аналізується кут γ_1. Якщо $\gamma_1 > \theta_{cr}$, тоді будується інтерполяційний многочлен (3.74) третього порядку по чотирьох точках $(0,1,2,3)$ для інтерполяції сегмента $[104]$ (рис 3.22,d). В іншому випадку, якщо $\gamma_1 < \theta_{cr}$, тоді будується інтерполяційний многочлен (3.74) другого порядку по трьох точках (1,2,3) для інтерполяції сегмента [104] (рис 3.22, e).

– При $\alpha < \theta_{cr}$ і $\beta < \theta_{cr}$, будується інтерполяційний многочлен (3.74) першого порядку по двох точках (2,3) для інтерполяції сегмента [104] (рис 3.22, f).

Процес інтерполяції слід застосовувати на кожному часовому кроці інтегрування задачі Коші (2.130).

3.10. Чисельна модель для течії з суттєво рухомими границями

Прикладом для розгляду буде задача з рухомими границями, про вітроротор Дар'є. Чисельне розв'язання крайової задачі (2.107)-(2.114) при врахуванні дискретизації по часу (3.27), (3.24) чисельне розв'язання крайової задачі (2.125), (2.126) зводиться на кожному n-тому кроці (при $t=t_n$) до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

На контурі L_d в кожній k-ій точці колокації d-го крила задається нормаль:

$$\vec{n}(x_{dk}, y_{dk}) = (n_x(x_{dk}, y_{dk}), n_y(x_{dk}, y_{dk})),\ d = \overline{1,M}, k = \overline{1,N-1}.$$

На кожному ***n***-тому кроці при $t=t_n$ умова непроникності (2.94) в кожній k-ій точці колокації на контурі $\boldsymbol{L_d}$ на d-му лопаті- крилі приводить до СЛАР:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_{ij} a_{ijdk} = b_{dk} \\ \sum_{d=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_{dj}(t_n) = -\sum_{v=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\sum_{m_p=1}^{n_p(t)}\gamma_{vm_p}^{p} \end{cases},\quad d = \overline{1,M}, k = \overline{1,N-1} \tag{3.76}$$

де

$$a_{ijdk} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{n_x(x_{dk}, y_{dk})(y_{ij} - y_{dk})}{(x_{dk} - x_{ij})^2 + (y_{dk} - y_{ij})^2} + \frac{n_y(x_{dk}, y_{dk})(x_{dk} - x_{ij})}{(x_{dk} - x_{ij})^2 + (y_{dk} - y_{ij})^2}\right)$$

$$b_{dk} = W_n^*(x_{dk}, y_{dk}) - (\cos\alpha, \sin\alpha) \bullet \vec{n}(x_{dk}, y_{dk}) - \sum_{v=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\sum_{m_p=1}^{n_p(t)} \gamma_{vm_p}^p \vec{V}(x_{dk}, y_{dk}, x_{vm_p}^p(t_n), y_{vm_p}^p(t_n)) \bullet \vec{n}(x_{dk}, y_{dk})) \tag{3.77}$$

При чисельному розв'язанні задачі Коші (2.126) геометрія області в момент часу t_n визначається геометрією рухомих границь. Для кожного наступного моменту часу t_{n+1} визначається нове положення границі області. Для чисельного розв'язку задачі Коші (щодо еволюції рухомої вільної границі), де права частина це швидкість кожної s-ї дискретної особливості ($s = \overline{1, n}$), яка утворилася в l-й момент часу:

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = u(x_s(t), y_s(t)) = \cos(\alpha) + \sum_{d=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_{dj}(t_n)u_{dj}(x_s, y_s, x_{dj}, y_{dj}) + \sum_{v=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\sum_{m_p=1}^{n_p(t)}\gamma_{vm_p}^p u_{vm_p}^p(x_s, y_s, x_{vm_p}^p(t), y_{vm_p}^p(t)), \tag{3.78}$$

$$\frac{dy_s(t)}{dt} = v(x_s(t), y_s(t)) = \sin(\alpha) + \sum_{d=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\Gamma_{dj}(t_n)v_{dj}(x_s, y_s, x_{dj}, y_{dj}) + \sum_{v=1}^{M}\sum_{p=1}^{P}\sum_{m_p=1}^{n_p(t)}\gamma_{vm_p}^p v_{vm_p}^p(x_s, y_s, x_{vm_p}^p(t), y_{vm_p}^p(t)),$$

(3.78’)

$$t = t_l : x(t_l) = x_l, y(t_l) = y_l$$

Може бути застосовна явна двукрокова схема, за типом методу Адамса

$$\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \frac{\tau_n}{2}\left(\vec{V}_n\left(2 + \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}\right) - \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}\vec{V}_{n-1}\right), \tag{3.79}$$

зі змінним кроком по часу.

3.11. Дискретизовані моделі тривимірних вихорових та струменевих систем з топологічними властивостями

Для чисельного розв'язку задач (2.144) – (2.147) виконується дискретизація поверхонь σ_d та σ_v, що являє собою процедуру розбиття поверхонь на граничні елементи (рис 3.23 – рис.3.25).

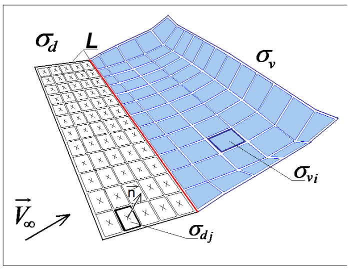


Рисунок 3.23 – Схема дискретизації несучої поверхні

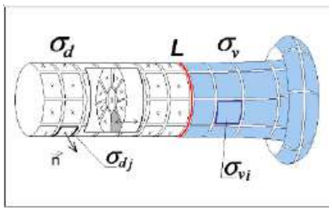


Рисунок 3.24 – Схема дискретизації двигуна та струменя

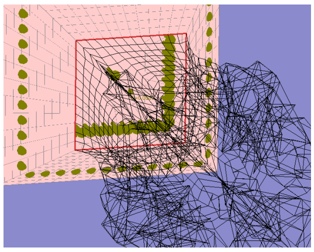


Рисунок 3.25 – Вплив особливостей розрахункової сітки на результат розрахунку в кутах отвіру конфузору

Для розв'язку інтегрального рівняння (2.146) використовується один із різновидів метода граничних елементів. Чисельно задача (2.146) розв'язується методом дискретних вихрових рамок, які є наслідком дискретизації інтегральних представлень (2.144), (2.145) на поверхнях σ_d та σ_v (рис. 3.23, рис. 3.25) та вираз для потенціалу подвійного шару на кожному рухомому елементі поверхні $\sigma_j(t),\ j=1,...M$ через інтеграл по контуру, що її обмежує, (закон Біо-Савара):

$$\vec{V}_{\mathrm{j}}(x,y,z,t)=\nabla\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\sigma_j}\frac{\partial}{\partial n_\sigma}\left(\frac{1}{r_\sigma}\right)d\sigma=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial\sigma_j}\frac{d\vec{r}_\sigma\times\vec{r}_\sigma}{r_\sigma^3} \tag{3.80}$$

Отримане при такій дискретизації представлення для вектора швидкості

$$\vec{V}(x,y,z,t)=\vec{V}_\infty+\sum_{j=1}^{M_d}\Gamma_j(t)\vec{V}_j(x,y,z,t)+\sum_{i=1}^{M_v(t)}\Gamma_i\vec{V}_i(x,y,z,t) \tag{3.81}$$

дозволяє замінити інтегральне представлення (2.146) для будь-якого моменту часу t на систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих інтенсивностей Γ_j вихрових трубок, що охоплює j-тий граничний елемент σ_{dj}.

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{M_d}\Gamma_j(t)(\vec{n}(x_k,y_k,z_k)\cdot\vec{V}_j(x_k,y_k,z_k,t))=\\&=-(\overrightarrow{n}(x_k,y_k,z\ )\cdot\overrightarrow{V}_\infty)-\\&-\sum_{i=1}^{M_v(t)}\Gamma_i(\vec{n}(x_k,y_k,z_k)\cdot\vec{V}_i(x_k,y_k,z_k,t)),\\&k=\overline{1,M_d}\end{aligned} \tag{3.82}$$

Для визначення переміщення та деформації поверхні σ_v методом предіктор-коректор розв'язується задача Коші (2.149), що визначає переміщення кутових точок кожного i-того граничного елемента σ_{vi}:

$$\begin{aligned}&\vec{R}_{S\sigma_v}(t_n)=\vec{R}_{\sigma_v}(t_n)+0.5\overrightarrow{W}(\vec{R}_{\sigma_v}(t_n),t_n)dt\,,\\&\vec{R}_{\sigma_v}(t_{n+1})=\vec{R}_{\sigma_v}(t_n)+\overrightarrow{W}(\vec{R}_{S\sigma_v}(t_n),t_n+o.5\Delta t)dt\\&\vec{R}_{\sigma_v}(t_0)=\vec{R}_{0\sigma_v}\end{aligned} \tag{3.83}$$

В процесі еволюції поверхня σ_v росте та суттєво деформується. Деформації граничних елементів призводить до нерівномірності розбиття σ_v в дальньому сліді за поверхнею, що обтікається, σ_d. Важливим фактором є коректне початкове розбиття поверхні σ_d, що визначає побудову чисельного розв'язку задач (3.82), (3.83) для адекватного моделювання аерогідродинамічних процесів.

Обчислювальні особливості

Під коректністю розбиття слід розуміти побудову адаптивної сітки, що враховує локальні геометричні розміри конструктивно важливих елементів поверхні, що обтікається, тобто розмір граничного елемента повинен бути меншим від розміру конструктивного елемента поверхні, що впливає на процес обтікання. Неврахування даної вимоги призводить до внесення значної похибки в чисельну модель, що відображається не тільки на кількісних значеннях динамічних характеристик, а й призводить до якісної невідповідності модельних ефектів реальним фізичним. Алгоритм попередньої дискретизації поверхонь, що обтікаються, повинен забезпечити виконання умови того, що максимальний розмір граничних елементів має бути меншим від геометричного масштабу деталізації фізичного явища, яке реалізується (локальної вихрової структури, області локального зародження нестійкості, локального струменевого ефекту).

Коректна побудова чисельних схем дозволяє не плутати обчислювальні ефекти з проявом фізичних. Для стабілізації розрахунку вихрового сліду та контролю локальних осциляцій в розподілі швидкостей були використані обчислювальні процедури [125, 126] по видаленню довгих вихрових відрізків та нормуванню вихрових рамок. Перша процедура полягає у видаленні вихрових відрізків, довжина яких з плином часу перевищує початкову довжину в задану кількість разів [107-110]. Процедура перенормування вихрових рамок (зміна інтенсивності циркуляції відрізку) використовується для попередження розривів вихрових рамок та недопущення порушення потенційності вихрового поля. Алгоритм полягає у зменшенні інтенсивності циркуляції відрізка обернено-пропорційно до його довжини. На відміну від алгоритму «видалення відрізків», даний підхід враховує всі вихрові відрізки рамок, що зійшли в потік, на всьому розрахунковому інтервалі часу.

Важливий контроль умови не проникнення. У випадку «проникнення» через поверхню вузла вільної вихрової рамки, яка не лежить на самій поверхні обтікання, були використані стандартні підходи [126], що базуються на принципі «пружного відбиття» точки від поверхні. Для випадку направленості швидкості в точці відриву всередину тіла (при обтіканні тілесних об’єктів) був використаний принцип «ковзання» точки [126], рис.3.26. Для рамок, в які входить вузол, визначаються кути α між напрямком місцевої швидкості $\vec{V}_0$ і площиною рамки (у випадку коли рамка не є плоскою, вона триангулюється і враховуються всі трикутники) та обирається рамка, для якої такий кут буде найменшим. Вектор місцевої швидкості проектується на обрану рамку (трикутник). Визначений таким чином напрямок будемо вважати напрямком зриву вузла (вектор модифікованої місцевої швидкості $\vec{V}_M$). Модуль модифікованої місцевої швидкості дорівнює модулю оригінальної місцевої швидкості. В результаті вузол «ковзає» по поверхні в напрямку максимуму швидкості.

В багатьох тривимірних випадках виникають течії з ортогональними полями швидкостей, які відокремлюються один від одного границями – неоднозв’язними поверхнями.

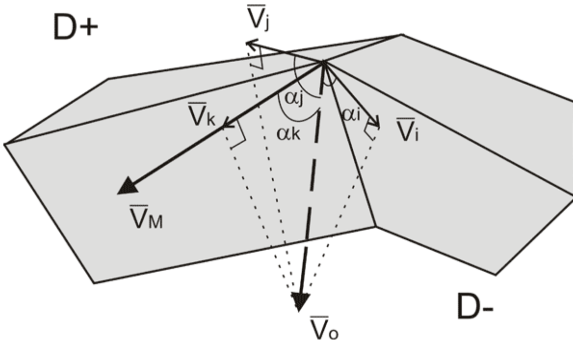


Рисунок 3.26 – елемент дискретизованої поверхні.

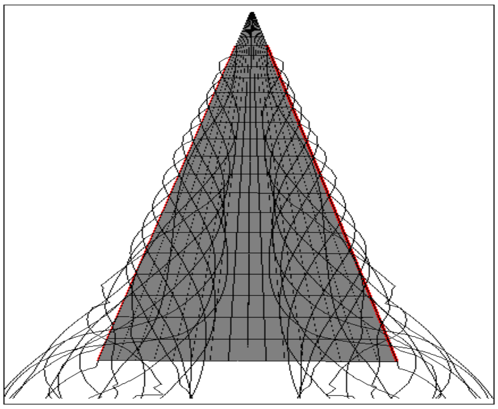
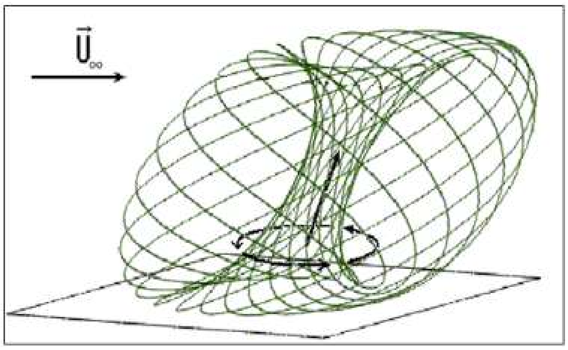


Рисунок 3.27 – Модель тривимірної вихрової структури, від трикутного крила, з лінійними вихровими елементами.

Нижче пропонується спрощена тривимірна модель вихрової структури смерч / торнадо, що не суперечить основним теорем про вихорах і дозволяє сформувати векторне поле інтенсивного конвективного перенесення повітряних мас відповідне реальної вихровий структурі типу смерч / торнадо.



а)- реальне зображення торнадо, б)- спрощена модель.

Рисунок 3.28 – Тривимврна вихорова структур типу смерч/торнадо.

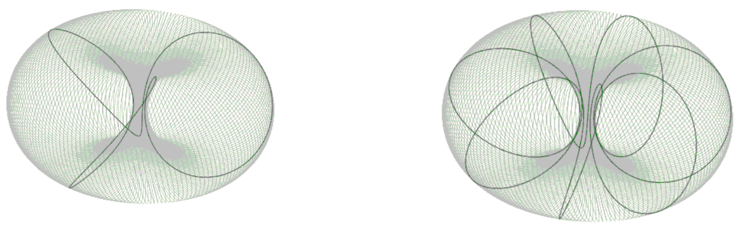
а) реальне зображення торнадо,

б) спрощена модель

Тривимірна математична модель вихорової структури у вигляді поверхні, при дискретизації апроксимується системою криволінійних вихорових елементів (рис. 3.28), кожний із яких індуцирує поле швидкостей, які визначаються формулою Біо-Савара.

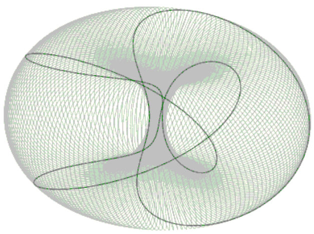
$$\vec{V}(x,y,z,t) = \sum_{j=1}^{M(t)} \frac{\Gamma_j(t)}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{r} \times \vec{r}}{r^3} \tag{3.84}$$

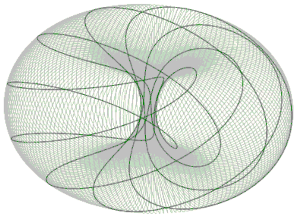
Для побудови моделей із закрученою течією необхідно врахування властивостей тривімірних циркуляційних ефектів та застосовувати моделі із замкненими вихровими трубками (вихровими лініями). Моделі визначається топологічними характеристиками – вузлами та зачепленнями вихрових ліній розташованих на замкненій частині неоднозв’язної поверхні (наприклад, тора, рис. 3 29.). Замкнені вихорові лінії могут утворювати (p,q) -торіческій вузол та (p,q) –торіческе зачеплення. В торіческому вузлі вихорова лінія обертається q раз навколо кругової осі тора і p раз навколо осі обертання тора.



а) (2,-3)-торичний вузол «торичний трилисник».

б) (1,-7)-торичний вузол.

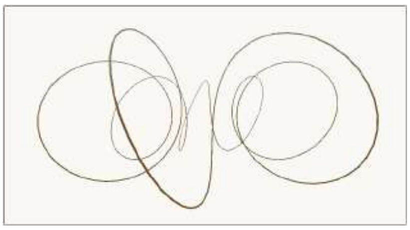




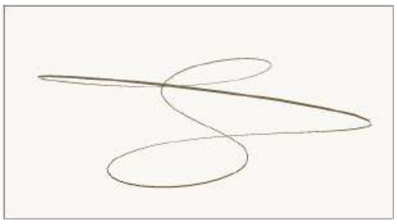
в) (3,-3) торичне зачеплення. г) (7,-7) торичне зачеплення.

Рисунок 3.29 – Моделі тривимірних вихрових структур з замкненими вихровими елементами у вигляді (p,q)-торичних вузлів та зачеплень

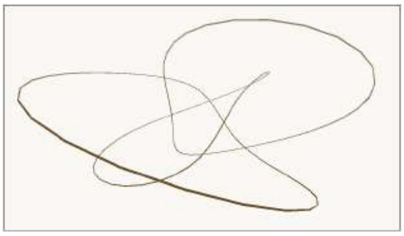
Збереження спіральності (2.147), (2.148) визначає збереження кількості зачеплень при гладкої деформації течії у процесі еволюції вихорової структури) за умови збереження циркуляції. Тобто, збереження спіральності – збереження загальної завузленості вихорової структури (що є топологічним критерієм стійкості вихорової структури).



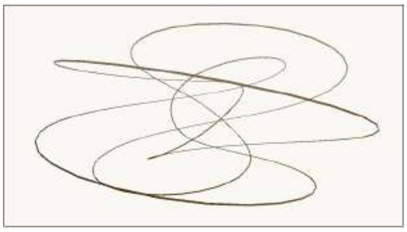
а) Соленоїд (1 вихорова лінія, 7 вертикальних витків)



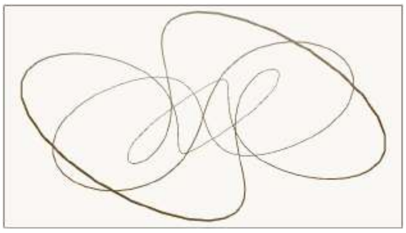
г) 1 вихорова лінія: 3 горизонтальних витки



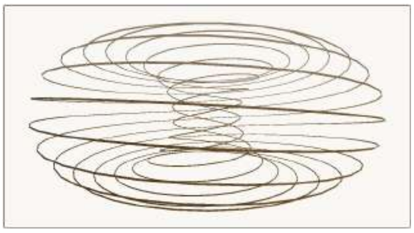
б) Зачеплення Хопфа (3 вихорові лінії з 1 горизонталним і 1 вертикальним витком)



д) (3 вихорові лінії, з 2 горизонтальними витками і 1 вертикальним витком)



в) 3 заузленніе вихорові линии із зачепленнями (1 горизонтальний і 2 вертикальних витка)



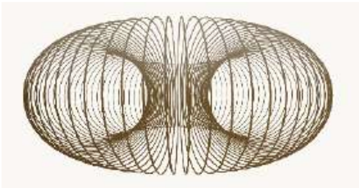
е) 3 заузленні вихорові лінії з зачепленнями (7 горизонтальних і 1 вертикальний виток)

Рисунок 3.30 – Для моделей із замкненими вихровими трубками (вихровими лініями) існує важлива характеристика – спіральність вихрової структури [4, 290, 295], яка у дискретному випадку для трубок однакової інтенсивності Γ має представлення:

$$J = \sum_{i}^{M} \sum_{j \neq i}^{M} l_{ij} + \sum_{i}^{M} l_{ii} , \tag{3.85}$$

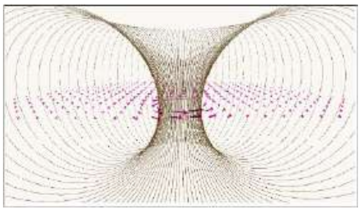
де l_{ij} є коефіцієнтами матриці зачеплень.

В дискретному випадку сума усіх елементів матриці зачеплень для системи замкнених вихорових елементів – вихорових ліній (вихорових трубок) визначає спіральність течії, яка є таким же інваріантом, як і циркуляція.

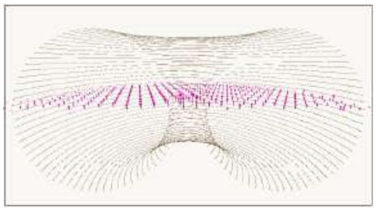


а) Модель вихорової структури.
N=1, 1 горизонтальний і 90 вертикальних витків

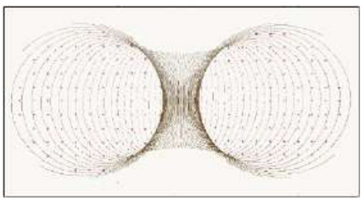
а) Модель вихорової структури.
N = 1, 1 вертикальний і 70 горизонтальних витків.



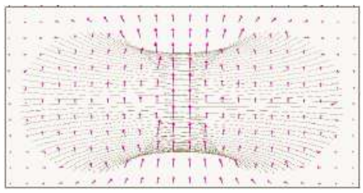
б) Векторне поле швидкостей в горизонтальному серединному сечении тора



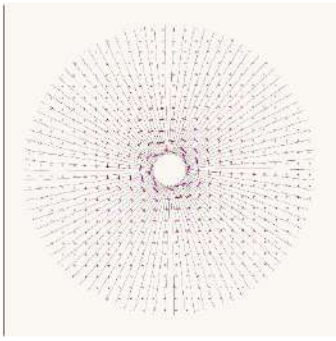
б) Векторне поле швидкостей в горизонтальному серединному сечении тора



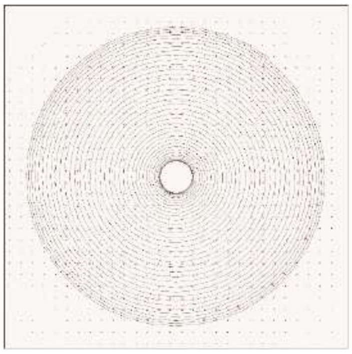
в) Векторне поле швидкостей в меридиональному сечении тора



в) Векторне поле швидкостей в меридиональному сечении тора

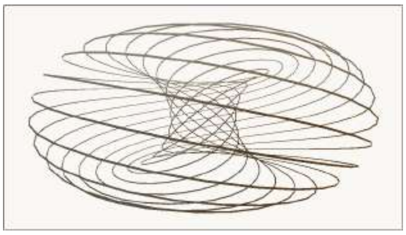


г) Векторне поле швидкостей
в серединном сечении тора
Рисунок 3.31

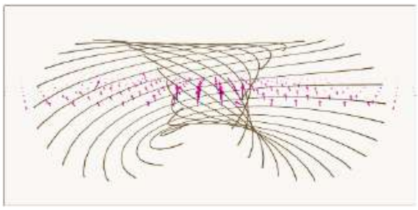


г) Векторне поле швидкостей
в серединном сечении тора
Рисунок 3.32

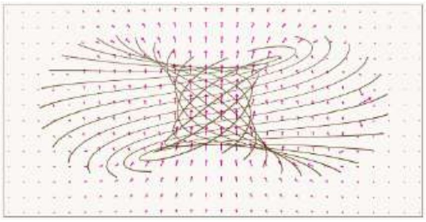
На рис. 3.31 а)-г) видно, що збільшення вертикальних витків вихровий нитки формують явно виражене обертальний протягом всередині тора, навколо його вертикальної осі, а збільшення горизонтальних витків, на рис. 3.32 а) - г), демонструє явно виражену вертикальну течію в самому центрі тора.



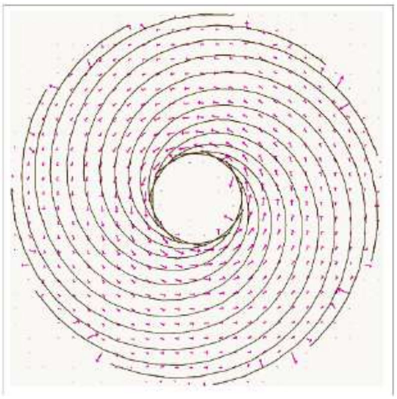
а) Модель вихорової структури. N=11, 2 горизонтальних и 1 вертикальний виток



При порівнянні Рис.3.31 а) - г) з Рис3.32 а) - г), на тлі вихрових трубок, добре видно, що при зменшенні кількості горизонтальних і вертикальних витків для кожної вихровий трубки, при одночасному збільшенні кількості самих вихрових трубок виникають векторні поля явно вираженого обертальний течії всередині тора і інтенсивного вертикального течії в самому центрі тора, що якісно відповідає б) Векторне поле швидкостей в горизонтальному серединному сечении тора



в) Векторне поле швидкостей в продольно-поперечному сечении тора



г) Векторное поле швидкостей в серединному сечении тора

Рисунок 3.33 – Моделі вихорових структур та їх векторних полів.

структурі течії в реальному вихровий системі смерч / торнадо. Вихрова структура складається з вихрових N ліній мають по одному витку вертикальній і горизонтальній площині на торі (з зацеленіямі) являє собою зачеплення Хопфа з N елементами.

Інваріантом течії в обсязі займаному тором є спіральність (helicity) [4, 290, 295]. Для дискретної моделі, даний інваріант (helicity) може бути визначено через елементи матриці зацеплений вихрових трубок даної дискретної вихровий системи.

Умова стійкості всієї вихровий структури, при її єволюції, може бути сформульовано, у вигляді умови збереження чисельного значення

$$J = \sum_i \sum_{j \neq i} L_{ij} + \sum_i L_{ii} \qquad (3.86)$$

Модель тривимірної вихорової структури у вигляді системи замкнених вихрових ліній, розташованих на неоднозв’язних поверхнях, придатна для опису вихрових/струменевих структур з ортоганальними циркуляційними течіями, для внутришніх та зовнішніх задач гідродинаміки, для опису вихрових об’єктів типу смерч/торнадо.

Щодо оцінки обчислювальних витрат

Доцільно зазначити, що час розрахунку завдання істотно залежить від M - загального числа точок розбиття всіх контурів, P - загального числа кутових точок і N - числа тимчасових шарів до моменту встановлення процесу обтікання конструкцій (контурів) і закінчення обрахунку задачі.

Як відомо [123, 126], час повного обрахунку задачі пропорційний кубу кількості часових шарів помноженому на квадрат числа точок розбиття [204, 205].

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{N}(M^3 + M\cdot P\cdot i + (M + P\cdot i)P\cdot i) = \\ &= NM^3 + MPN(N+1) + P^2N(N+1)(2N+1)/6 \le 10N^3M^2\end{aligned}, \quad (3.87)$$

де

N - кількість шарів (кроків) по часу;

$P = \sum_{k=1}^{K} P_k$ - загальне число кутових точок;

P_k - число кутових точок k-го контуру ($2 \le P_k \le M_k$);

$M = \sum_{k=1}^{K} M_k$ - загальне число точок розбиття всіх контурів;

M_k - кількість точок розбиття k-го контуру.

На кожному i-му часовому шарі кількість обчислень пропорційна кубу кількості точок колокації:

$$M^3 + M\cdot P\cdot i + (M + P\cdot i)P\cdot i; \quad (3.88)$$

де M^3 – обчислень при вирішенні СЛАР, $M\cdot P\cdot i$ – обчислень правої частини для СЛАР, $(M + P\cdot i)P\cdot i$ - обчислень функцій при розв'язанні задачі Коші. N – кількість тимчасових шарів (кількість кроків обрахунку) прямо пропорційно

M – загальному числу точок розбиття, в силу чого кількість обчислень службових функцій до моменту закінчення розрахунку складає $\approx M^5$.

Розрахунки демонстраційного прикладу щодо разповсюдження заблуднення в акваторії, що представлено в шостому розділу роботи, були проведені на персональному комп'ютері (AMD Athlon XP 1900+, 1.6 GHz, 2GB) в режимі, що випереджує реальний час. Загальна тривалість обчислень не перевищувала 1 години.

3.12. Висновки за розділом

1. Розроблено новий метод та алгоритм перетворення системи дискретних особливостей для відповідних моделей, побудованих на основі сингулярних та гіперсингулярних інтегральних представлень.

2. Представлено нову модель розповсюдження забруднень на водній поверхні, яка базується на Лагранжевому підході до спостереження хаотичної адвекції. В моделі враховано впливи вітру на формування полів течії. Модель призначена для короткотривалого прогнозування та застосовна в системах керування швидкоплинними процесами.

3. Розроблені методи та алгоритми е складовими елементами обчислювальної технології моделювання для забезпечення прогнозування аерогідродинамічних процесів в реальному масштабі часу.

4. Запропоновано нову дискретизовану математичну модель тривимірної вихрової структури, у вигляді системи замкнених вихрових ліній, розташованих на неоднозв'язних поверхнях, яка придатна для опису вихрових/струменевих структур з ортогональними циркуляційними течіями, для внутришних та зовнишніх задач гідродинаміки, для опису вихрових об'єктів типу смерч/торнадо.

5. Узагальнення математичних моделей та методу дискретних особливостей для задач про рух рідини в областях з різнотипними непроникними рухомими межами дозволяють реалізувати обчислювальні схеми та алгоритми на доступній дослідникам персональній обчислювальній техніці, проводити, з гарантованою достовірністю і заданою точністю, обчислювальний експеримент в реальному масштабі часу.

РОЗДІЛ 4
МЕТОДИ ТА АЛГОРИТМИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Алгоритми методу дискретних особливостей для обчислювальних технологій перетворюють дискретизовані інтегральні представлення із розривними функціями і змінюють порядок особливостей в системі дискретних особливостей. Враховується рух і деформація границь, а також, породження нових елементів границь. За результатами перетворення виникає можливість коректно обчислювати значення функцій та їх похідних при параметричної залежності характеристичних функцій від часу. Алгоритми обчислювальних технологій застосовні, як для двовимірних, так і для тривимірних гідродинамічних задач нестаціонарного відривного обтікання.

4.1. Обчислення значень дискретизованих характеристичних функцій у внутрішніх точках області

У багатьох випадках [126, 163, 273], для вирішення плоскої задачі про нестаціонарне обтікання непроникних, рухомих зі швидкостями $\vec{W}_d$ і $\vec{W}_v$ границь - контурів $L_d(t)$ і $L_v(t)$, в деформирующейся області $D(t)$, використовується математична модель (с параметричної залежністю від часу t, яка в термінах теорії функцій з комплексною змінною має інтегральні представлення:

$$\Phi(z,t) = \varphi(x,y,t) + i\psi(x,y,t) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_d(t)} \gamma(\omega,t) \ln(z-\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_v(t)} \gamma(\omega,t) \ln(z-\omega) d\omega \; , \qquad (4.1)$$

$$\overline{V}(z,t) = u(x.y,t) - iv(x,y,t) =$$
$$= \frac{\partial \Phi(z,t)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_d(t)} \frac{\gamma(\omega,t)}{z-\omega}d\omega + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_v(t)} \frac{\gamma(\omega,t)}{z-\omega}d\omega, \tag{4.2}$$

$$\Gamma_0 = \int\limits_{L_d(t)} \gamma(\omega,t)d\omega + \int\limits_{L_v(t)} \gamma(\omega,t)d\omega = const \tag{4.3}$$

Але, в силу мінливості області із заздалегідь невідомою формою частини границь, рішення задачі про нестаціонарном обтіканні непроникних рухомих кордонів можливо тільки чисельними методами.

Дискретизація інтегральних представлень на гіллястих контурах.

Для чисельного рішення задач аерогідромеханіки часто [126] використовується, так званий, вихровий метод-метод дискретних особливостей [5, 14, 126], заснований на дискретизації інтегральних представлень (4.1), (4.2), відповідно до умов теорем [126, 229]. В цьому випадку, інтегральні представлення (4.1) – (4.3) (в комплексних змінних) в області з кусково-гладкою границею, що допускає розбиття на сукупність граничних елементів $L = \sum\limits_{j=1}^{M} L_j$ представимо у вигляді:

$$\Phi(z,t) = \varphi(x,y,t) + i\psi(x,y,t) = \sum_{j=1}^{M}\frac{\Gamma_j(t)}{2\pi i}\ln(z-\omega_{0j}(t)) + \sum_{p}^{P}\sum_{s=1}^{n(t)}\frac{\delta_s^p}{2\pi i}\ln(z-\omega_{0s}^p(t)) \tag{4.4}$$

$$\overline{V}(z,t) = u(x.y,t) - iv(x,y,t) = \frac{\partial \Phi(z,t)}{\partial z} = \sum_{j=1}^{M}\frac{\Gamma_o(t)}{2\pi i(z-\omega_{0j})} + \sum_{p}^{P}\sum_{s=1}^{n(t)}\frac{\delta_s^p}{2\pi i(z-\omega_s^p(t))}, \tag{4.5}$$

$$\Gamma_0 = \sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_n) + \sum_{p-1}^{P}\sum_{i=1}^{n}\ \delta_i^p = const \tag{4.6}$$

У термінах дійсного змінного, метод дискретних особливостей [1-10], надає дискретне представлення характеристичної функції у вигляді:

$$\varphi(x,y,t)=\sum_{j=1}^{M}\frac{\Gamma_j(t)}{2\pi}arctg\left(\frac{y-y_{0j}}{x-x_{0j}}\right)+\sum_{p}\ \sum_{s=1}^{n(t)}\frac{\delta_s^p}{2\pi}arctg\left(\frac{y-y_s^p(t)}{x-x_s^p(t)}\right), \quad (4.7)$$

$$\psi(x,y,t)=-\sum_{j=1}^{M}\frac{\Gamma_j(t)}{2\pi}\ln\left((x-x_{0j})^2+(y-y_{0j})^2\right)^{\frac{1}{2}}-\sum_{p}^{P}\sum_{s=1}^{n(t)}\frac{\delta_s^p}{2\pi i}\ln\left((x-x_s^p(t))^2+(y-y_s^p(t))^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

$$\vec{V}(x,y,t)=\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t)\vec{V}_j(x,y,x_{0j},y_{0j})+\sum_{p}\ \sum_{i=1}^{n}\delta_i^p\vec{V}_i^p(x,y,x_i^p(t),y_i^p(t)), \quad (4.9)$$

де $\vec{V}_j(x,y,x_{0j}(t),y_{0j}(t))=\left(\frac{y_{0j}(t)-y}{2\pi R_j^2},\frac{x-x_{0j}(t)}{2\pi R_j^2}\right)$, $R_j=\max\left\{r_j,\sqrt{(x-x_{0j}(t))^2+(y-y_{0j}(t))^2}\right\}$ (4.10)

Метод позбавлення проблем «неусувної» похибки обчислень характеристичної функції [228, 230, 256, 273].

В інтегральному представленні (4.1) з логарифмічним ядром, підінтегральний вираз є багатозначною функцією з точкою розгалуження $\omega\in L_{ab}$. Значення виразу (4.1), для будь-якої точки z вважається цілком визначеним і має місце за умови, що для багатозначних функцій $\ln(z-\omega)$ обрана її гілка і заданий розріз, що проходить уздовж контуру L_{ab}. Для виділення обраної гілки форма розрізу довільна, але для виділення безперервного (в області) значення функції зручно, щоб розріз проходив уздовж модельованого контуру. У правій частині рівності (4.4) представлена сума комплексних логарифмів. Однак, якщо для (4.1) можна домовитися – вважати, що розрив проходить уздовж контуру L_{ab} (рис. 4.1.), То для системи вихорів (4) система розрізів буде проходити по множині прямих ліній (рис. 4.2) які з'єднують точки $\omega_{0j}\in L_{ab}$ з нескінченно віддаленою точкою.

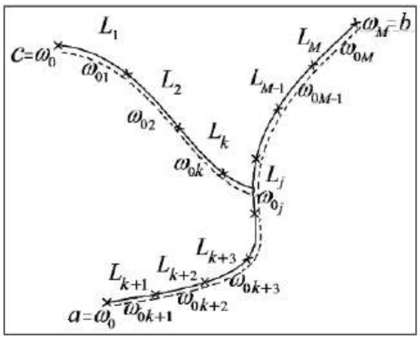


Рисунок 4.1 – Лінія розрізу (уздовж контуру) виділяють область однозначності для інтегрального представлення

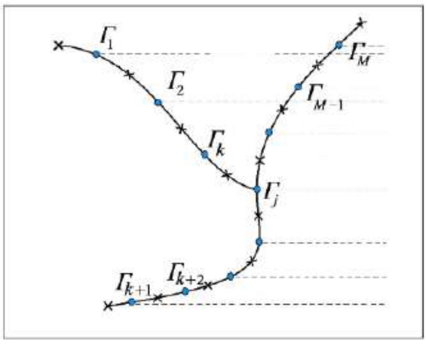


Рисунок 4.2 – Лінії розрізу (по променям) які виділяють область однозначності для системи дискретних особливостей на контурі

Відзначимо, що для інтегрального представлення (4.1), (4.4) характеристичної функції -потенціалу можна домовиться, що розріз в області збігається з контуром (рис. 4.1), але в при застосуванні системи дискретних особливостей для апроксимації інтегральних представлень (4.1), (4.4), (4.7) напрямки розрізів представляє систему променів для всієї системи дискретних вихорів (рис. 4.2).

Для характеристичної функції, в представленнях (4.1), (4.4), визначення її значення в значній частині області (поза апроксимованого системою дискретних вихорів контуру, залишаючись, при цьому, в «термінології» методу дискретних вихорів) стає неможливим. Інакше кажучи, проблемою методу дискретних вихорів є наявність системи розривів (уздовж ліній, які з'єднують вихори з нескінченно віддаленою точкою, рис.2) в області значень функції поза контуром, яку, в загальному випадку, неможливо усунути зміною кількості дискретних вихорів.

Таким чином, проблема «неусувної» похибки обчислень характеристичної функції (при застосуванні системи дискретних особливостей) полягає в неможливості коректного обчислення характеристичної функції, апроксимованої системою розривних функцій вигляду (4.1), у всіх точках області поза контуром границі. При обчисленні функцій (4.1) в області визначається смуга (рис. 4.3. а) із розривними значеннями функції. Тобто, значення характеристичної функції

$$\Phi(z) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{K}} \sum_{j=1}^{M_1} \frac{\Gamma_j^{\kappa}}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^{\kappa}) \tag{4.11}$$

можна визначити в усіх точках області поза межами контуру, за виключенням області із системою ліній розрізу (рис. 4.1).

Для вирішення означеної проблеми пропонується метод та алгоритм перетворення дискретизованих інтегральних представлень (рис. 4.3), які змінюють порядок дискретних особливостей у системі та позбавляють від проявів багатозначності в системі дискретних особливостей. Застосуванню алгоритму передує каскадне впорядкування системи гілок контуру $L = L_I + L_{II} + \dots$.

Щодо коректності обчислення значення похідної по часу від дискретизованих характеристичних функцій, з врахуванням деформації, руху та породженням нових елементів контуру.

Для нестаціонарних гідродинамічних задач [126] зі змінною в часі геометрією границь (рух, деформація і породження нових елементів-прі відриві вихорів), і змінною циркуляцією навколо границь, існує необхідність обчислення похідної від потенціалу за часом, формальне вираження для якої , в термінах МДВ має вигляд:

$$\frac{\partial\varphi(x,y,t_{n+1})}{\partial t}=\sum_{j=1}^{M}\frac{\dot{\Gamma}_j(t_{n+1})}{2\pi}arctg\left(\frac{y-y_j(t_{n+1})}{x-x_j(t_{n+1})}\right)+\sum_{p=1}^{P}\frac{\dot{\delta}_n^p}{2\pi}arctg\left(\frac{y-y_i^p(t_{n+1})}{x-x_i^p(t_{n+1})}\right)-$$

$$-\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_{n+1})\left(\vec{V}_j(x,y,x_{0j}(t_{n+1}),y_{0j}(t_{n+1})),\vec{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}),y_{0j}(t_{n+1}))\right)- \qquad (4.12)$$

$$-\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i^p\left(\vec{V}_i(x\ ,y\ ,x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1})),\vec{W}_v(x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1}))\right)$$

У правій частині виразу (4.12) перші два доданки містять розривні функції (які мають логарифмічні особливості, відповідні представленню (3.36), (3.37), що не дозволяє його використовувати для обчислення значень похідної в області, в області, поза границями. Через наявність неоднозначних функцій в (3.32), (3.33), за обтічним контуром довільної форми утворюється «зона тіні» (що складається з системи непереборних розривів, рис.4.2), в якій не можуть бути обчислені похідні та усі характеристики, які визначаються через похідні (локальні і розподілені кінематичні та динамічні характеристики течії).

В силу вищевикладеного, обчислення характеристик течії з використанням виразів (3.32), (3.33), без застосування перетворень, можливо тільки для обмеженої множини задач із границями які мають просту (прямолінійною) геометрією. Для більш загального випадку задач з границями складної форми (рис. 4.1) виникають проблеми з обчисленням, як функції так і похідної (проблема наявності системи розривів в значенні функції поза контуром $L=L_d+L_v$).

4.2. Алгоритми обчислювальних технологій

Відзначимо, що дані проблеми є властивістю дискретних вихорів для плоских задач, яку можливо змінити перетворенням, що дозволяє виділяти однозначну гілку для системи функцій $\ln(z-\omega_{0j})$ шляхом підвищення порядку системи особливостей і одночасним «перенаправленням» системи ліній розриву в одну лінію- розріз уздовж контуру границі L_{ab} [126, 273]. Алгоритм перетворення системи особливостей може бути реалізовано на довільному плоскому гіллястому криволінійному контурі, за методом представленим в третьому розділі дисертації.

4.2.1.Алгоритм перетворень і виділення розрізу для багатозначної функції на довільному контурі

Випадок довільного контуру може бути зведений до системи зв'язаних гіллястих контурів. Випадок розташування вихорів на гіллястому контурі відрізняється від випадку розташування вихорів на простому контурі тільки перенумерацією дискретних вихорів на контурі, в залежності від індексу гілки (рис. 4.3).

Нехай гілки на гіллястому контурі поділяються на I – первинний (основний) та II – вторинний. Початкову нумерацію вихорів на гіллястому контурі (рис.4.1) необхідно змінити, в залежності від індексу гілки, таким чином, щоб вихор в точці розгалуження входив в число вихорів як на основному, так і на вторинному контурі.

$$\Phi(z)=\sum_{j=1}^{M}\frac{\Gamma_j}{2\pi i}\ln(z-\omega_{0j}) \qquad (4.13)$$

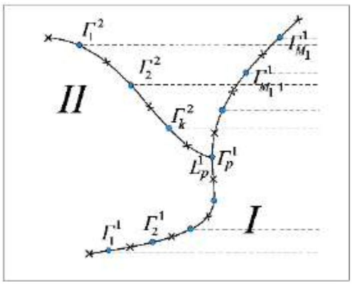


Рисунок 4.3 – Перенумерація вихорів на гіллястому контурі.

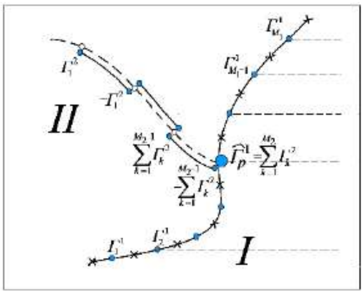


Рисунок 4.4 – Перетворення від вихорів до вихрових пар на вторинної гілці гіллястого контуру

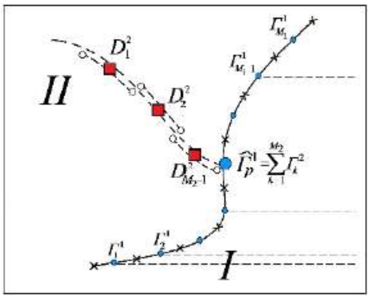


Рисунок 4.5 – Перетворення від вихрових пар до диполів на вториннної гілці гіллястого контуру

Перенумерація вихорів на гіллястому контурі (Рис.4.3), необхідно виконати таким чином, щоб вузловий вихор (в точці розгалуження) входив в число вихорів як на первиному, так і на вторинному контурі. Число вихорів на кожній гілці визначаються числами $M_j,\ j=1,2.$ Причому, загальне число вихорів $M = M_1 + M_2 - 1$ (тому що вузловий вихор вважається двічі).

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2} \frac{\Gamma_j^2}{2\pi i} \ln(z - \omega_j^2) \qquad (4.14)$$

Так, для впорядкованої системи дискретних вихорів (4.14) допустимо перетворення виду – перехід до представлення у вигляді системи вихрових пар [126, 273] і сумарного вихору (рис. 4.4).

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2 - 1} \frac{\sum_{k=1}^{j} \Gamma_k^2}{2\pi i} \left(\ln(z - \omega_{0j}^2) - \ln(z - \omega_{0j+1}^2) \right) + \frac{\sum_{j=1}^{M_2} \Gamma_j^2}{2\pi i} Ln(z - \omega_{0M_2}^2) \qquad (4.15)$$

На рис. 4.4 представлено перетворення від вихорів до вихровим парам на вторинної гілці гіллястого контуру. Далі, перетворення від вихрових пар до диполя на вторинної гілці гіллястого контуру.

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i}\ln(z-\omega_{0j}^1) +$$
$$+\sum_{j=1}^{M_2-1}\frac{(\omega_{0j+1}^2-\omega_{0j}^2)\sum_{k=1}^{j}\Gamma_k^2}{2\pi i}\left(\frac{\ln(z-\omega_{0j+1}^2+\omega_{0j+1}^2-\omega_{0j}^2)-\ln(z-\omega_{oj+1}^2)}{\omega_{0j+1}^2-\omega_{0j}^2}\right)+\frac{\sum_{j=1}^{M_2}\Gamma_j^2}{2\pi i}Ln(z-\omega_{0M_2}^2) \quad (4.16)$$

Або, інакше $\Phi(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i}\ln(z-\omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1}\frac{(\omega_{0j+1}^2-\omega_{0j}^2)\sum_{k=1}^{j}\Gamma_k^2}{2\pi i(z-\omega_j^2)}+\frac{\Gamma_0^2}{2\pi i}Ln(z-\omega_{0M_2}^2)$ (4.17)

Причому, в силу того, що

$$\omega_j^2 = 0.5\left(\omega_{0j+1}^2+\omega_{0j}^2\right)\ \omega_{0p}^1 = \omega_{0M_2}^2 \quad \text{і} \quad \Gamma_p^1 = \Gamma_0^2 = \sum_{j=1}^{M_2}\Gamma_j^2 \quad (4.18)$$

сумарний вихор потрапляє в перший доданок правої частини:

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i}\ln(z-\omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2-1}\frac{(\omega_{0j+1}^2-\omega_{0j}^2)\sum_{k=1}^{j}\Gamma_k^2}{2\pi i(z-\omega_j^2)} \quad (4.19)$$

Далі, виконуються перетворення від вихорів до вихровим парам на основній гілці гіллястого контуру (рис. 4.6):

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{M_1-1}\frac{\sum_{k=1}^{M_1}\Gamma_k^1}{2\pi i}\left(\ln(z-\omega_{0j}^1)-\ln(z-\omega_{0j+1}^1)\right)+\frac{\Gamma_0^1}{2\pi i}\ln(z-\omega_{0M_1}^1)+\sum_{j=1}^{M_2-1}\frac{(\omega_{0j+1}^2-\omega_{0j}^2)\sum_{k=1}^{j}\Gamma_k^2}{2\pi i(z-\omega_j^2)} \quad (4.20)$$

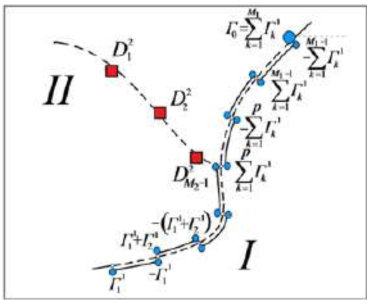


Рисунок 4.6 – Перетворення від вихорів до вихровим парам на основній гілці гіллястого контуру.

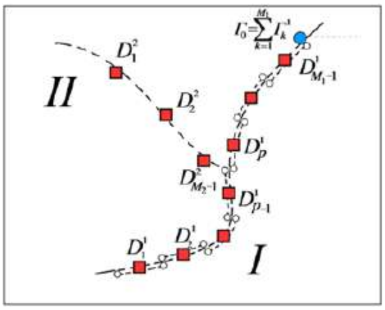


Рисунок 4.7 – Перетворення від вихрових пар до диполя основної гілці гіллястого контуру.

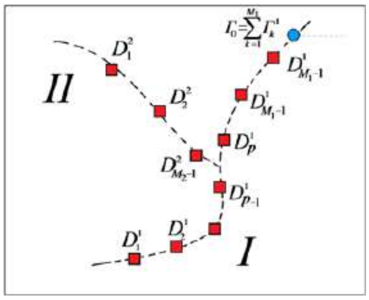


Рисунок 4.8 – Розподіл диполів і сумарного вихору на «гіллястому контурі»

Подальші перетворення від вихрових пар до диполя основної гілки гіллястого контуру (рис. 4.7):

$$\Phi(z)=\sum_{j=1}^{M_1-1}\frac{(\omega^1_{0j+1}-\omega^1_{0j})\sum\limits_{k=1}^{M_1}\Gamma^1_k}{2\pi i}\left(\frac{\ln(z-\omega^1_{0j+1}+\omega^1_{0j+1}-\omega^1_{0j})-\ln(z-\omega^1_{0j+1})}{\omega^1_{0j+1}-\omega^1_{oj}}\right)+\frac{\Gamma^1_0}{2\pi i}\ln(z-\omega^1_{0M_1})+\sum_{j=1}^{M_2-1}\frac{(\omega^2_{0j+1}-\omega^2_{0j})\sum\limits_{k=1}^{j}\Gamma^2_k}{2\pi i(z-\omega^2_j)} \tag{4.21}$$

призводить до вираження $\Phi(z)$ для в вигляді

$$\Phi(z)=\sum_{j=1}^{M_1-1}\frac{(\omega^1_{0j+1}-\omega^1_{0j})\sum\limits_{k=1}^{j}\Gamma^1_k}{2\pi i(z-\omega^1_j)}+\frac{\Gamma^1_0}{2\pi i}\ln(z-\omega^1_{0M_1})+\sum_{j=1}^{M_2-1}\frac{(\omega^2_{0j+1}-\omega^2_{0j})\sum\limits_{k=1}^{j}\Gamma^2_k}{2\pi i(z-\omega^2_j)} \tag{4.22}$$

$$\text{де}\quad \omega^1_j=0.5\left(\omega^1_{0j+1}+\omega^1_{0j}\right)\ \ \omega^1_{0p}=\omega^2_{0M_2}\ \ \text{и}\ \ \Gamma^1_0=\sum_{j=1}^{M_1}\Gamma^1_j \tag{4.23}$$

Остаточно, представлення у вигляді суми диполів і сумарного вихору на гіллястому контурі (рис. 4.8) Набуває вигляду

, $$\Phi(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=\sum_{j=1}^{M_1-1}\frac{D_j^1}{2\pi i(z-\omega_j^1)}+\frac{\Gamma_0}{2\pi i}\ln(z-\omega_{0M_1}^1)+\sum_{j=1}^{M_2-1}\frac{D_j^2}{2\pi i(z-\omega_j^2)} \qquad (4.24)$$

де $\Gamma_0=\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j=\Gamma_0^1=\sum_{j=1}^{M_1}\Gamma_j^1$; $D_j^p=(\omega_{0j+1}^p-\omega_{0j}^p)\sum_{k=1}^{j}\Gamma_k^p$, $p=1,2.$, (4.25)

а загальне число диполів дорівнюватиме M_1+M_2-2.

Для адитивного представлення (4.24) у вигляді суми диполів і логарифма дійсна частина має вигляд:

$$\varphi(x,y)=\operatorname{Re}\Phi(z)=\sum_{j=1}^{M_1-1}\frac{\sum_{k=1}^{j}\Gamma_k^1}{2\pi}\left(\frac{(y_{0j+1}^1-y_{0j}^1)(x-x_j^1)-(x_{0j+1}^1-x_{0j}^1)(y-y_j^1)}{(x-x_j^1)^2+(y-y_j^1)^2}\right)+$$
$$+\frac{\Gamma_0}{2\pi}arctg\frac{y-y_{0M_1}^1}{x-x_{0M_1}^1}+\sum_{j=1}^{M_2-1}\frac{\sum_{k=1}^{j}\Gamma_k^2}{2\pi}\left(\frac{(y_{0j+1}^2-y_{0j}^2)(x-x_j^2)-(x_{0j+1}^2-x_{0j}^2)(y-y_j^2)}{(x-x_j^2)^2+(y-y_j^2)^2}\right) \qquad (4.26)$$

де уявна частина подана в вигляді:

$$\psi(x,y)=\operatorname{Im}\Phi(z)=-\sum_{j=1}^{M_1-1}\frac{\sum_{k=1}^{j}\Gamma_k^1}{2\pi}\left(\frac{(x_{0j+1}^1-x_{0j}^1)(x-x_j^1)+(y_{0j+1}^1-y_{0j}^1)(y-y_j^1)}{(x-x_j^1)^2+(y-y_j^1)^2}\right)-$$
$$-\frac{\Gamma_0}{2\pi}\ln\left((x-x_{0M_1}^1)^2+(y-y_{0M_1}^1)^2\right)^{0.5}-\sum_{j=1}^{M_{2-1}}\frac{\sum_{k=1}^{j}\Gamma_j^2}{2\pi}\left(\frac{(x_{0j+1}^2-x_{0j}^2)(x-x_j^2)+(y_{0J+1}^2-y_{0j}^2)(y-y_j^2)}{(x-x_j^2)^2+(y-y_j^2)^2}\right) \qquad (4.27)$$

Зауваження. У наведеному алгоритмі поділ гілок контуру на основну і вторинну достатньо умовно. Відокремлення та впорядкування гілок контуру можно виконати і інакшим способом. Свавілля у виборі гілок на контурі, виборі початку і напрямки обходу контурів впливають тільки на чисельні значення розподілених диполів і положення сумарного вихору (від якого виконується розріз), але не впливає на чисельне значення функції поза контуром.. Замкнутість контуру також не впливає на алгоритм перетворення системи дискретних вихорів в систему диполів і сумарний вихор, але вибір початку і кінця контурів визначає положення результуючого вихору і, як наслідок, положення лінії розрізу в області. Умовою єдиності значень характеристичної функції поза контуром є $\Gamma_0 = \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{M_k} \Gamma_j^k = 0$.

4.2.2. Покроковий алгоритм моделювання нестаціонарного відривного обтікання рухомого контуру.

Схема утворення і перетворення системи дискретних особливостей (вихорів) при моделюванні руху, деформації та утворенні нових елементів контуру (при його нестаціонарному відривному обтіканні, та покрокова послідовність виконання обрахунків (характеристик процесу) на кожному із кроків моделювання процесу обтікання можна представити наступним чином (відповідно до рис. 4.9 – рис. 4.14):

Крок 1 (рис. 4.9, а) – Визначення та класифікація систем дискретних особливостей, які апроксимують контур-рухому границю області, при $t = t_n$;

Крок 2 (рис. 4.9, б) – Визначення швидкостей кожної маркованої дискретної особливості із системи дискретних особливостей, які апроксимують контур - рухому границю області при $t = t_n$;

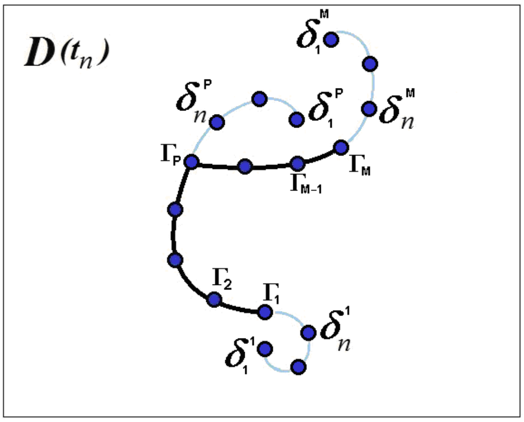
Крок 3 (рис. 4.9, в) – Пересування кожної маркованої дискретної особливості, які апроксимують контур – рухому границю області, із попереднього положення точки в нове, при заданій швидкості та породженні нових елементів контуру при $t = t_{n+1}$;

Крок 4 (рис. 4.9, г) – Визначення інтенсивності кожної із маркованих дискретних особливостей на контурі-детермінованої границі з врахуванням зміни положення дискретних особливостей на вільній границі та з врахуванням породження нових елементів контуру при $t = t_{n+1}$;

Крок 5 (рис. 4.9, д) – Перетворення системи дискретних особливостей, які апроксимують контур - детерміновану границю разом з новоутвореними елементами, в систему дискретних особливостей підвищеного порядку для обчислення похідних і динамічних характеристик, при $t = t_{n+1}$;

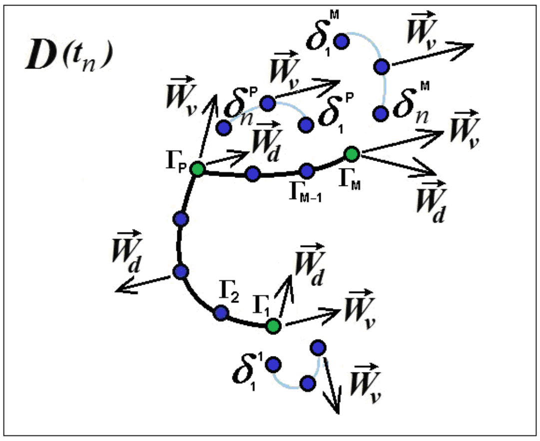
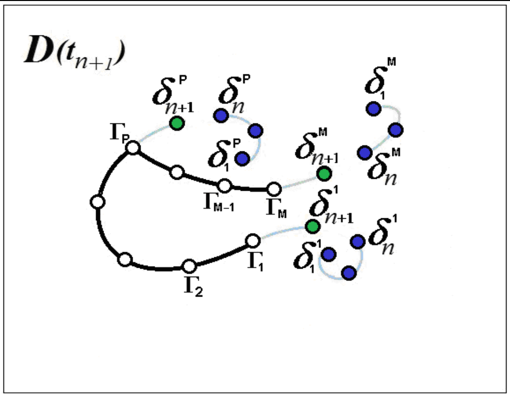
Крок 6 (рис. 4.9, е) – Визначення та класифікація систем дискретних особливостей, які апроксимують рухомі границі області, при $t = t_{n+1}$.

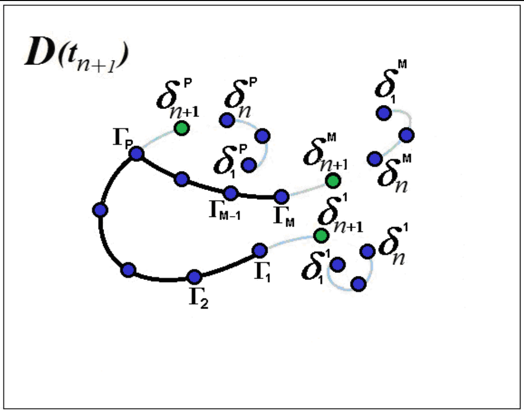
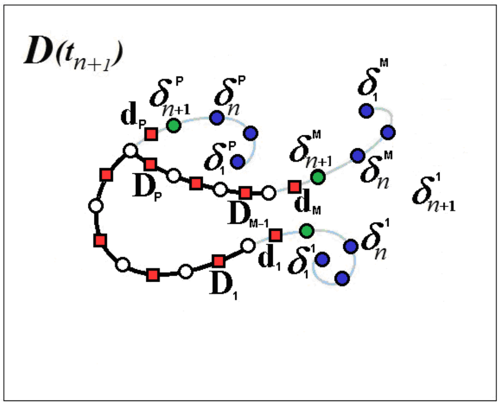
Деформації та зміни рухомого контуру з породженням нових елементів контуру (як для моделі відривного обтікання.



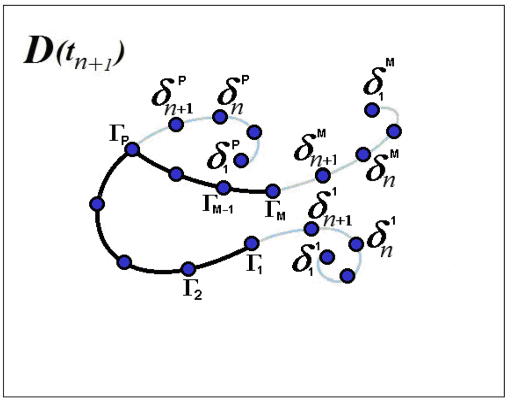
а

Вважається, що для моменту часу $t = t_n$ відомо положення і геометрична форма границь $L(t_n) = L_d(t_n) + L_v(t_n)$, чисельні значення розподілених вихорів $\Gamma_j(t_n)$, $j = \overline{1, M}$., на контурі і вихорів δ_i^p $i = \overline{1.n}$; $p = \overline{1, P}$. в сліді та розподіл всіх кінематичних і динамічних характеристик $\varphi(x, y, t_n) = const$, $\psi(x, y, t_n) = const$, $\vec{V}(x, y, t_n)$, відповідно до (6) - (9).

I	 **б**	Для цього ж моменту часу $t = t_n$, обчислюються швидкості $\vec{W}_d(x_{0j}(t_n), y_{0j}(t_n))$, що визначають переміщення всіх точок контуру $L_d(t_n)$ і, відповідно до (9), швидкості $\vec{W}_v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) = \vec{V}(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)$ переміщення всіх p точок контуру $L_v(t_n)$. При визначенні швидкостей, у всіх – точках відриву – кінцевих і кутових точках контуру $L_d(t_n)$ (які є точками сполучення контурів $L_d(t_n)$ і $L_v(t_n)$), слід врахувати те, що $\vec{W}_v(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n)) \neq \vec{W}_d(x_i^p(t_n), y_i^p(t_n), t_n)$. .
II	 **в**	Далі, для наступного моменту часу $t = t_{n+1}$, визначається нове положення і форма границь $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$. . Тобто, для всіх точок $\vec{r}$ границі $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ чисельно вирішуються завдання Коші (15.4.50), (15.4.51), причому, крок за часом $\tau_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ вибирається так, щоб дискретне уявлення границь (розбиття на граничні елементи) $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$, в p точках

		відриву зберігало рівномірну обмеженість $\max\left\vert d\vec{r}^{\,p}_{n+1}\right\vert = \left\vert \vec{r}^{\,p}_{n+1} - \vec{r}^{\,p}_{n}\right\vert \le \Delta = \max\limits_{p}\Delta_p$.
V	 г	Для цього ж моменту часу ($t = t_{n+1}$), при вже відомому новому положенні і формі границь $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$ і відомих значеннях інтенсивностей $\delta_i^p \;\; (i = \overline{1, n+1}; \;\; p = \overline{1, P}.)$, з рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь визначаються нові значення вихрових інтенсивностей $\Gamma_j(t_{n+1}), \;\; (j = \overline{1, M}.)$ знаходяться на змістити контурі $L_d(t_{n+1})$.
	 д	На даному етапі (при $t = t_{n+1}$), при вже обчислених параметрах для (4.14), виконуються перетворення вихровий системи (4.24) - (4.27) (на контурі $L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$) в дипольне представлення (23) - (25), що дозволяє обчислювати кінематичні $(\varphi(x, y, t_{n+1}) = const$, $\psi(x, y, t_{n+1}) = const$, $\vec{V}(x, y, t_{n+1})$), та динамічні характеристики.

I



е

Так як, на момент часу $t = t_{n+1}$, після проведення всіх необхідних розрахунків, стають відомі всі параметри задачі (даний етап стає аналогічним етапу І). Для продовження моделювання, на наступному часовому проміжку виконується циклічний перехід до кроку І.

Рисунок 4.9 – Схема станів рухомого контуру та покроковий алгоритм етапів моделювання нестаціонарного відривного обтікання рухомого та деформовного контуру

Покроковий алгоритм визначає послідовність етапів обчислення характеристик при моделюванні нестаціонарного відривного обтікання рухомого та деформовного контуру (з породженням нових елементів контуру).

4.2.3. Коректність обчислення значення похідної по часу від дискретизованих характеристичних функцій, з врахуванням деформації, руху та породженням нових елементів контуру

При обчисленні на V етапі кінематичних і динамічних характеристик задачі виявляється проблема некоректного обчислення похідної [228, 264].

Подолання даної проблеми можливе при врахуванні вимог теореми Кельвіна (Томсона) [163, 173] про незмінність циркуляції швидкості по замкнутому рідкому контуру протягом усього часу руху, яка, для дискретних представлень [230,231], має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j+\sum_{p-1}^{P}\sum_{i=1}^{n}\ \delta_i^p\right)=0\,. \qquad (4.28)$$

У такому формулюванні враховується постулат про «вмерзлість» вихорів в середовище, що припускає «стікання» в слід складок вихровой поверхні (поверхні розривіву дотичних швидкостей), що породжують нові елементи границь. Новий (вихровий) елемент границі (породжений відривом) є елементом розриву в поле швидкості, що призводить до приріст циркуляції.

В умовах теореми Томсона, зміна циркуляції, по замкнутому контуру, що охоплює тільки обтічну границю, викликає зміну циркуляції поза границей $L_d(t)$, за рахунок породження відриву нових елементів сліду на обтічної границі. Циркуляція швидкості по контуру, який охоплює фіксований матеріальний обсяг із вже сформованим слідом, при баротропному русі ідеальної рідини під впливом поля об'ємних, сил з однозначним потенціалом, не змінюється. В силу чого, справедливо

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j+\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{n}\ \delta_i^p\right)=\sum_{j=1}^{M}\dot{\Gamma}_j(t)+\sum_{p-1}^{P}\ \dot{\delta}_n^p\ =0 \qquad (4.29)$$

Застосування (4.29) надає можливість побудувати алгоритм коректного обчислення (3.77).

4.2.4. Алгоритм обчислення значення похідної по часу від дискретизованих характеристичних функцій, з врахуванням деформації, руху та породженням нових елементів контуру

При відривному обтіканні, в умовах теореми Томсона, зміна циркуляції в сліді компенсується зміною циркуляції швидкості по замкнутому рідкому контуру, який охоплює тільки обтічну границю. Тобто

$$\sum_{j=1}^{M} \dot{\Gamma}_j(t_n) = -\sum_{p-1}^{P} \dot{\delta}_n^p \tag{4.30}$$

Розв'язати проблему обчислення похідної в (11) надає можливість

<u>Твердження 4.1</u>. Нехай виконується (4.29, 4.30), тоді вираз, для обчислення значення похідної за часом (3.77) від дискретного представлення (4.7), має вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi(x,y,t_{n+1})}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{M-1}\left(\vec{D}_j, \vec{V}_j(x,y,\overline{x}_j(t_{n+1}),\overline{y}_j(t_{n+1}))\right) + \sum_{p}\left(\vec{d}_p, \vec{V}_p(x,y,\overline{x}_n^p(t_{n+1}),\overline{y}_n^p(t_{n+1}))\right) - \\ &-\sum_{j=1}^{M} \Gamma_j(t_{n+1})\left(\vec{V}_j(x,y,x_{0j}(t_{n+1}),y_{0j}(t_{n+1})), \vec{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}),y_{0j}(t_{n+1}))\right) - \\ &-\sum_{p=1}^{P}\ \sum_{i=1}^{n+1}\delta_i^p\left(\vec{V}_i(x,y,x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1})), \vec{W}_v(x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1}))\right)\end{aligned} \tag{4.31}$$

де
$$\begin{cases}\vec{D}_j = (x_{j+1}-x_j, y_{j+1}-y_j)Q_j \\ \vec{d}_p = (x_p - x_n^p, y_p - y_n^p)q_p\end{cases}, \quad \begin{cases}\overline{x}_j = 0.5(x_{0j+1}+x_{0j}) \\ \overline{y}_j = 0.5(y_{0j+1}+y_{0j})\end{cases}, \quad \begin{cases}\overline{x}_n^p = 0.5(x_n^p + x_{0p}) \\ \overline{y}_n^p = 0.5(y_n^p + y_{0p})\end{cases}. \tag{4.32}$$

Таким чином, похідна (4.31) від характеристичної функції – потенціалу (4.7) має представлення у вигляді суми скалярних добутків з дипольними (5) особливостями та з векторними інтенсивностями. У якості доказу розглянемо алгоритм перетворення виразу (3.77) у вираз (4.31).

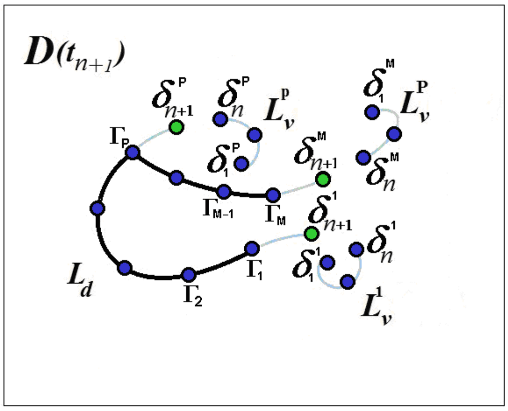


Рисунок 4.10 –
Розподіл вихорів на
$L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$
при відриві

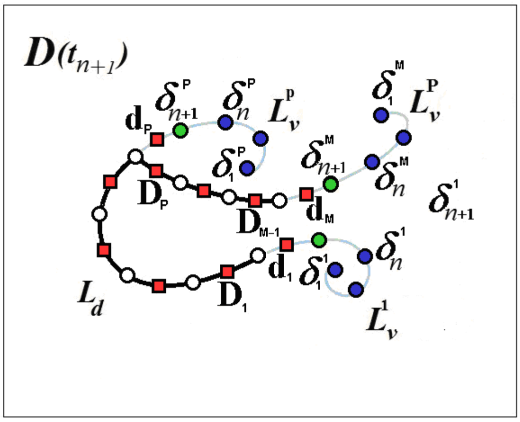


Рисунок 4.11 –
Розподіл вихорів і диполів на
$L(t_{n+1}) = L_d(t_{n+1}) + L_v(t_{n+1})$, при відриві

Нехай маємо алгоритм (представлено на рис.4.3 – рис.4.8) перетворення і виділення розрізу для багатозначної функції на довільному контурі. З (4.29) випливає, можливість «вихрового» представлення для похідної, причому, в силу (4.28) зміни циркуляції на обтічному контурі компенсується виникненням додаткових циркуляцій в сліді, яка виникає завдяки породженню нових елементів непроникних границь (утворенням вихрових поверхонь відриву потоку). На рис. 4.12. – рис.4.16 представлено алгоритм перетворення «вихровий» системи, яки при створенні системи «дискретних вихрових пар», трансформуєтся до «дипольної» системі (що відповідає випадку відриву, при $t = t_{n+1}$, (рис. 4.10 – 4.11).

Нехай при $t = t_{n+1}$, значення похідних, від інтенсивностей вихрів які розподілені на контурі $L_d(t_{n+1})$ та, які відірвалися від $L_d(t_{n+1})$ і поповнили $L_v(t_{n+1})$ - новоутворених вихрів визначаються (наприклад різницевим методом):

$$\dot{\Gamma}_j(t_{n+1}) = (\Gamma_j(t_{n+1}) - \Gamma_j(t_n))/(t_{n+1} - t_n)\,,\ \ \dot{\delta}^p_{n+1} = \delta^p_{n+1}/(t_{n+1} - t_n)\,. \qquad (4.33)$$

Тоді алгоритм перетворення «вихрового» представлення в «дипольне», в силу (4.30) включає тільки складові з інтенсивностями (4.32).

Схема перетворення системи вихорів в систему диполів при відриві на $L_d(t_{n+1})$, з утворенням нових елементів границі $L_v(t_{n+1})$ на крївках $L_d(t_{n+1})$, у відповідності із рис.4.12. в розгортці:

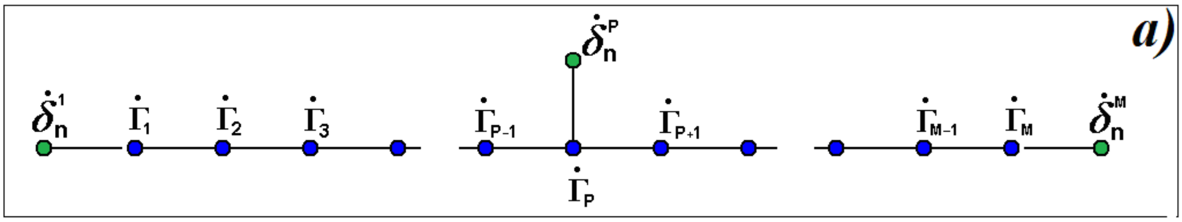


Рисунок 4.12 – Розподіл похідних від інтенсивностей особливостей на контурі

На рис. 4.13 представлено формування «дискретних вихрових пар» із тих вихорів, які відірвалися і вносяться «віправлення» в значення похідних від інтенсивностей кінцевих вихорів на контурі $L_d(t_{n+1})$.

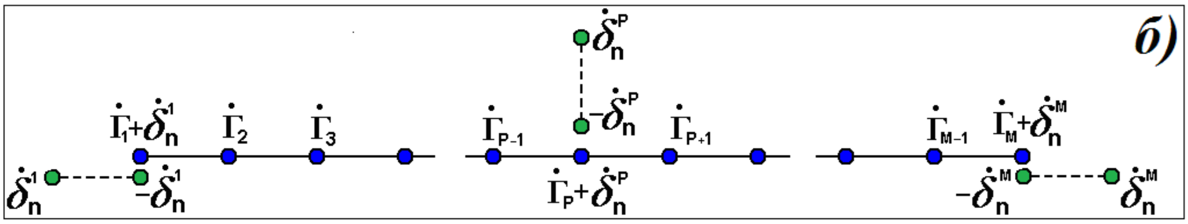


Рисунок 4.13 – Перетворення системи «відривних» особливостей до системи «пар особливостей»

На рис. 4.14 представлено перевизначення: виділення «пар особливостей» із вихорів, які відірвалися та приєднаних «вихорів» на контурі $L_d(t_{n+1})$:

$$\hat{q}_j = \hat{q}_i(t_{n+1}) = \dot{\Gamma}_j(t_{n+1}),\ \hat{q}_p(t_{n+1}) = \dot{\Gamma}_p(t_{n+1}) + \dot{\delta}_{n+1}^p\ . \tag{4.34}$$

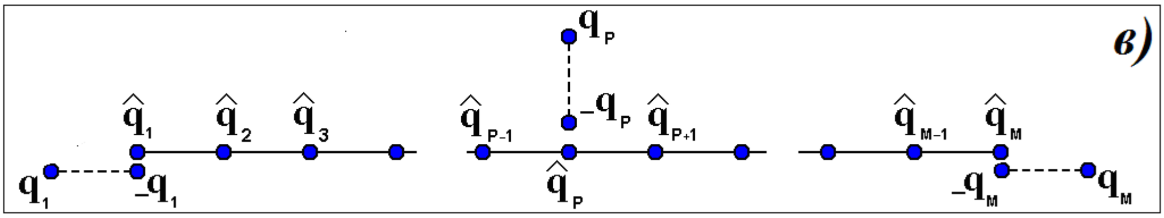


Рисунок 4.14 – Перевизначення «пар особливостей».

На рис. 4.15 представлено формування «дискретних вихрових пар» з похідних від вихорів на контурі $L_d(t_{n+1})$:

$$Q_1 = \hat{q}_1, \quad Q_i = \sum_{k=1}^{i} \hat{q}_k \quad i=1,2,\ldots,\text{M-1}. \tag{4.35}$$

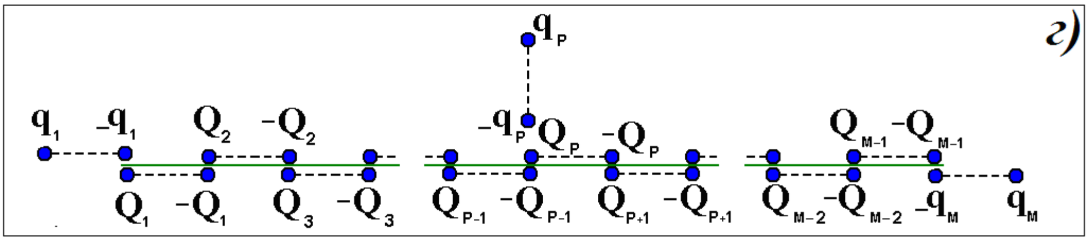


Рисунок 4.15 – Система «пар особливостей» на контурі.

При такій побудові вираз (3.62) для похідної від потенціалу набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi(x,y,t_{n+1})}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{M-1}\left\{\frac{Q_j}{2\pi}arctg\left(\frac{y-y_j(t_{n+1})}{x-x_j(t_{n+1})}\right)-\frac{Q_j}{2\pi}arctg\left(\frac{y-y_{0j+1}(t_{n+1})}{x-x_{0j+1}(t_{n+1})}\right)\right\}+\\
&+\sum_{p=1}^{P}\left\{\frac{q_p}{2\pi}arctg\left(\frac{y-y_i^p(t_{n+1})}{x-x_i^p(t_{n+1})}\right)-\frac{q_p}{2\pi}arctg\left(\frac{y-y_{0p}(t_{n+1})}{x-x_{0p}(t_{n+1})}\right)\right\}-\\
&-\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_n)\left(\vec{V}_j(x,y,x_{0j}(t_{n+1}),y_{0j}(t_{n+1})),\vec{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}),y_{0j}(t_{n+1}))\right)-\\
&-\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i^p\left(\vec{V}_i(x\ ,y\ ,x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1})),\vec{W}_v(x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1}))\right)
\end{aligned} \tag{4.36}$$

При заміні перших двох доданків в (4.36) різницевим аналогом дипольного представлення (4.33), з урахуванням (4.34) отримаємо:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi(x,y,t_n)}{\partial t} &= \sum_{j=1}^{M-1}\left\{\frac{Q_j}{2\pi}\frac{(\bar{y}_j-y)(x_{0j+1}-x_{0j})+(x-\bar{x}_j)(y_{0j+1}-y_{0j})}{(x-\bar{x}_j)^2+(y-\bar{y}_j)^2}\right\}+\\
&+\sum_{p=1}^{P}\left\{\frac{q_p}{2\pi}\frac{(\bar{y}_n^p-y)(x_{0p}-x_n^p)+(x-\bar{x}_n^p)(y_{0p}-\bar{y}_n^p)}{(x-\bar{x}_n^p)^2+(y-\bar{y}_n^p)^2}\right\}-\\
&-\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_n)\left(\vec{V}_j(x,y,x_{0j}(t_n),y_{0j}(t_n)),\vec{W}_d(x_{0j}(t_n),y_{0j}(t_n))\right)-\\
&-\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i^p\left(\vec{V}_i(x\ ,y\ ,x_i^p(t_n),y_i^p(t_n)),\vec{W}_v(x_i^p(t_n),y_i^p(t_n))\right)
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

При заміні першого доданку в (4.37) дипольним аналогом, як представлення (4.32), отримаємо вираз для похідної (4.37) у вигляді (4.31).

На рис. 4.16 приведено, у розгортці, схему «дипольного» представлення для виразу (3.31), яке отримано з виразу для системи «дискретних пар» (4.36) від похідних від вихорів на контурі $L_d(t_{n+1})$.

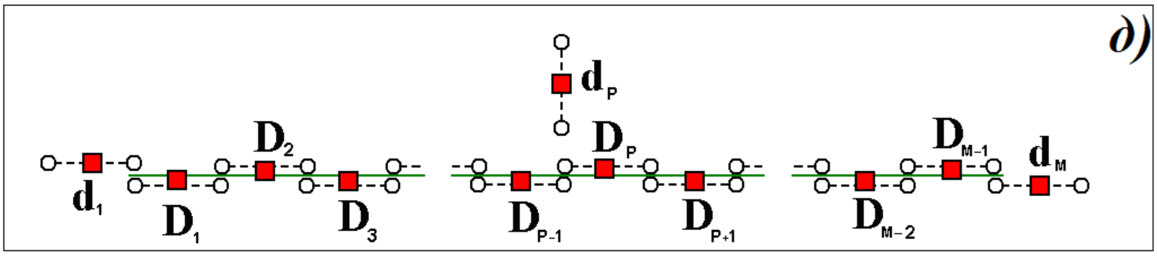


Рисунок 4.16 – Схема «дипольного» представлення для виразу (3.31).

Алгоритми та перетворення, що наведені вище, дозволяють визначити зміни значень кінематичних і динамічних характеристик, які визначаються через похідну для будь-якого моменту часу $t = t_{n+1}$.

Зауваження та узагальнення:

– Алгоритм перетворення системи дискретних представлень із розривними (богатозначними) функціями в систему регулярних дискретних особливостей є регуляризуючим з вирішення проблеми «неусувної» похибки.

– Регуляризація системи дискретних особливостей полягає в зведенні системи розподілених ліній розривів дискретизованої характеристичної функції до єдиної лінії розриву, яка проходить вздовж контуру та з'єднує контур з нескінченно віддаленою точкою.

– При умові $\Gamma_0 = 0$, обрання початкового елементу (із впорядкованої системи дискретизованих представлень) для регуляризуючого перетворення не впливає на чисельне значення характеристичної функції в будь-якої точці області (поза границями).

– Регуляризуючі перетворення дозволяють коректно обчислювати значення дискретизованої характеристичних функцій та її похідних при параметричної залежності характеристичних функцій від часу. Алгоритми обчислювальних технологій застосовні, як для двовимірних, так і для тривимірних гідродинамічних задач нестаціонарного відривного обтікання.

4.2.5.Визначення динамічних впливів для течій з деформовними рухомими межами.

Вираз для розподілу коефіцієнту тиску , отриманий із інтегралу Коші-Лагранжу містить похідні по часу від характеристичної функції [76]:

$$C_p(x,y,t) = 1 - \frac{\left(\vec{V}(x,y,t)\right)^2}{\vec{V}_\infty^2} - \frac{2}{\vec{V}_\infty^2}\left(\frac{\partial\varphi(x,y,t)}{\partial t}\right). \qquad (4.38)$$

Так, що похідна по часу буде мати представлення у вигляді

При цьому, можливо відокремити складові «дипольну» та «конвективну» складові.

$$\frac{\partial\varphi(x,y,t_{n+1})}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_{дипольн}}{\partial t}+\frac{\partial\varphi_{конвект}}{\partial t}=$$
$$=\sum_{j=1}^{M-1}\left(\vec{D}_j,\vec{V}_j(x,y,\overline{x}_j(t_{n+1}),\overline{y}_j(t_{n+1}))\right)+\sum_p\left(\vec{d}_p,\vec{V}_p(x,y,\overline{x}_n^p(t_{n+1}),\overline{y}_n^p(t_{n+1}))\right)-$$
$$-\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_{n+1})\left(\vec{V}_j(x,y,x_{0j}(t_{n+1}),y_{0j}(t_{n+1})),\vec{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}),y_{0j}(t_{n+1}))\right)-$$
$$-\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i^p\left(\vec{V}_i(x,y,x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1})),\vec{W}_v(x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1}))\right) \tag{4.39}$$

Так, «дипольна складова»: $\dfrac{\partial\varphi_{диполь}}{\partial t}$ – це сума першого і другого доданків у правій частині (4.39), що дають внесок (дипольного характеру) в похідну за рахунок зміни в часі інтенсивностей розподілених циркуляцій на платівці L_d:

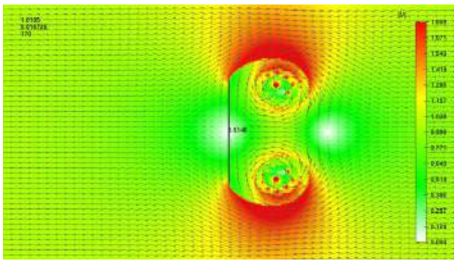
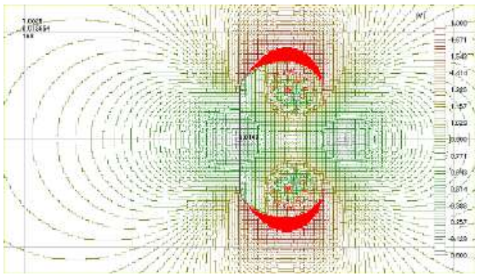
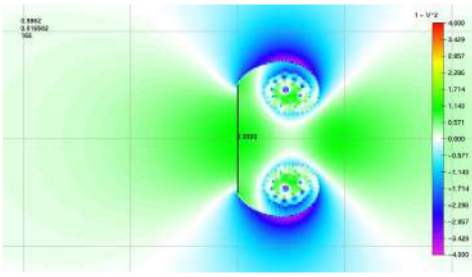
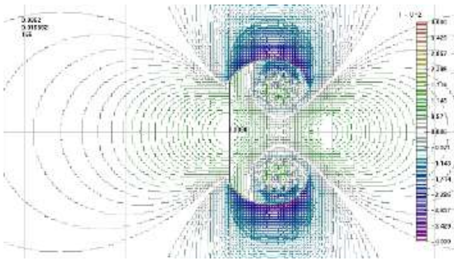
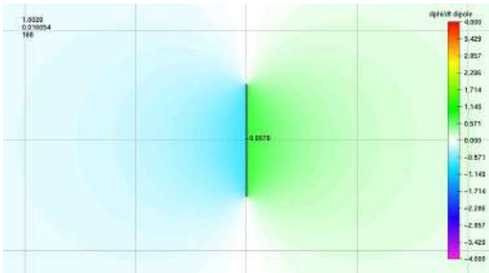
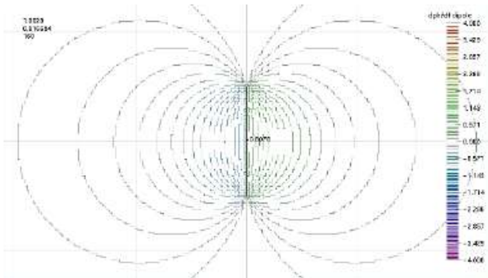
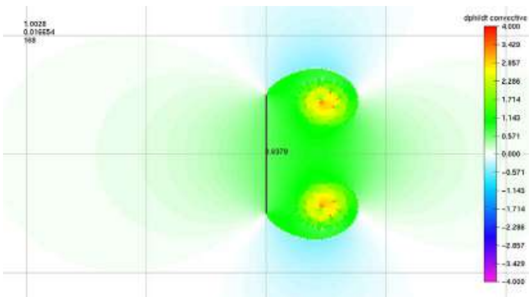
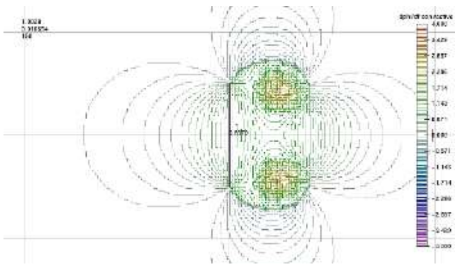
$$\frac{\partial\varphi_{дипольн}}{\partial t}=\sum_{j=1}^{M-1}\left(\vec{D}_j,\vec{V}_j(x,y,\overline{x}_j(t_{n+1}),\overline{y}_j(t_{n+1}))\right)+\sum_p\left(\vec{d}_p,\vec{V}_p(x,y,\overline{x}_n^p(t_{n+1}),\overline{y}_n^p(t_{n+1}))\right) \tag{4.40}$$

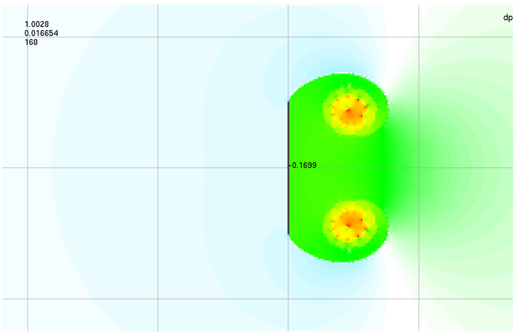
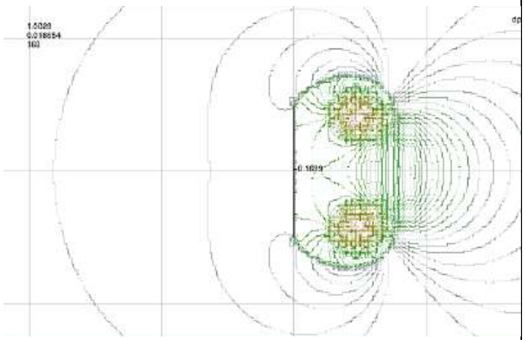
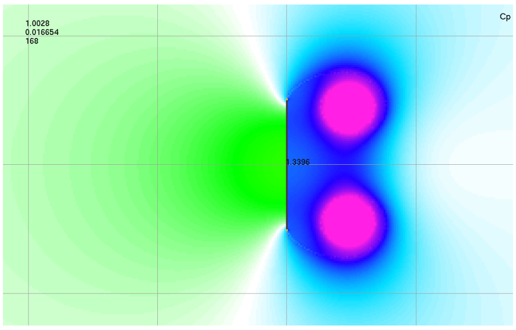
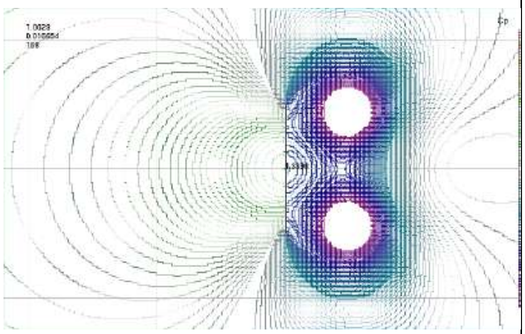
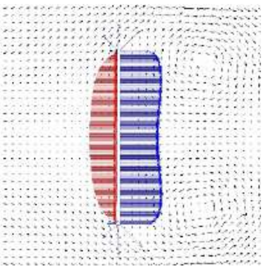
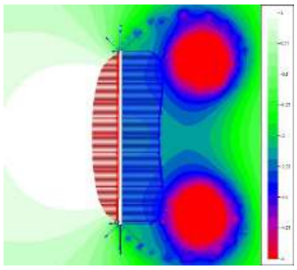
«Конвективна складова»: $\dfrac{\partial\varphi_{конвект}}{\partial t}$-два останній доданка в (4.39), дає внесок в похідну за рахунок переміщення самих границь- контурів L_{D} та L_v:

$$\frac{\partial\varphi_{конвект}}{\partial t}=-\sum_{j=1}^{M}\Gamma_j(t_{n+1})\left(\vec{V}_j(x,y,x_{0j}(t_{n+1}),y_{0j}(t_{n+1})),\vec{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}),y_{0j}(t_{n+1}))\right)-$$
$$-\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i^p\left(\vec{V}_i(x,y,x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1})),\vec{W}_v(x_i^p(t_{n+1}),y_i^p(t_{n+1}))\right) \tag{4.41}$$

Розподіл складових характеристик наведено в табл. 4.1.

Таблиця 4.1 – Впливи та складові характеристики

	
Розподіл векторного поля швидкості і скалярного поля – модуля швидкості | V | в області течії	Ізолінії розподілу скалярного поля – модуля швидкості | V | в області течії
	
Розподіл $1-\frac{V^2}{V_\infty^2}$ в області течії	Ізолінії розподілу $1-\frac{V^2}{V_\infty^2}$ в області течії
	
Розподіл $\frac{\partial \varphi_{диполь}}{\partial t}$ в області течії	Ізолінії розподілу $\frac{\partial \varphi_{диполь}}{\partial t}$ в області течії
	

Розподіл $\dfrac{\partial \varphi_{конвект}}{\partial t}$ в області течії	Ізолінії розподілу $\dfrac{\partial \varphi_{конвект}}{\partial t}$ в області течії
	
Розподіл $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ в області течії	Ізолінії розподілу $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ в області течії
	
Розподіл коефіцієнту $C_p(x, y, t)$ в області течії	Ізолінії розподілу коефіцієнту $C_p(x, y, t)$ в області течії
	
Розподіл епюр навантажень по платівці на тлі поля швидкостей	Розподіл епюр навантажень по платівці на тлі поля тиску

Як видно із таблиці 4.1, обидві складові $\dfrac{\partial \varphi(x, y, t_{n+1})}{\partial t} = \dfrac{\partial \varphi_{дипольн}}{\partial t} + \dfrac{\partial \varphi_{конвект}}{\partial t}$ надають розривні характеристики в області значень функції, але їх сума надає неперервне значення на вільної межі L_v – граничному контурі та є розривне значення на пепроникної рухомої межі – L_D .

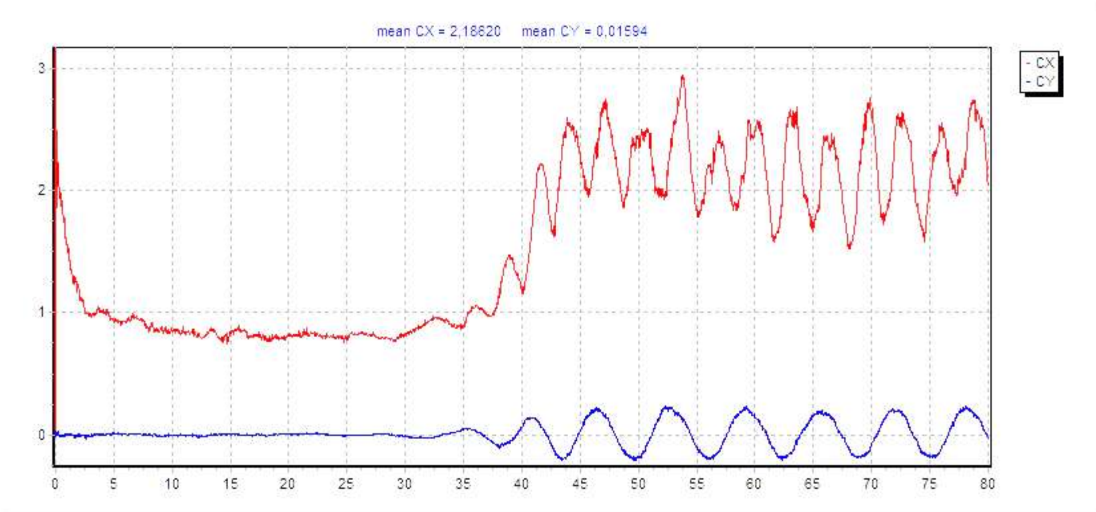


Рисунок 4.17 – Визначення коефіцієнту опору
та підйомної сили для платівки скінченої товщини

Доцільно зазначити, що похибка обчислення діапазону зміни локальних динамічних характеристик на підвітряній стороні конструкцій і споруд (через не врахування дисипативних явищ у циркуляційному сліду викликаних проявом в'язких ефектів) може досягати 15% [95, 204, 205, 126, 163]. Похибка обчислення діапазону зміни локальних динамічних характеристик на навітряній стороні замкнених контурів не перевищує 11% [95, 204, 205, 126, 163].

4.2.6. Оцінки похибки моделі та методу

Похибка методу визначається із апроксимації квадратурних представлень та залежить від кроку розбиття граничних контурів [126].

Для геометрично подібних контурів, що мають різний характерний розмір, розбиття контуру буде мати різне число граничних елементів (ефект масштабування).

При дискретизації враховано, що крок сітки - розмір граничного елемента, повинен бути менше ніж локальні геометричні особливості контуру.

Обчислення розмірних величин забезпечується перерахунком з безрозмірних характеристик з врахуванням характерних параметрів задачі.

При обчисленні динамічних характеристик не враховуються ефекти в'язкого тертя. Відрив потоку реалізується на гострих крайках-кутах контуру конструкції (в точках перевищення критичного значення градієнту тиску).

Мінімізація похибки рішення крайової задачі забезпечується розташуванням кожної дискретної особливості равновіддалено від кінцівок відповідного граничного елемента.

Похибка чисельного розв'язання початково-крайової задачі слабо залежить від методу чисельного рішення задачі Коші і визначається похибкою квадратурних представлень [126].

Похибка результатів чисельного моделювання еволюційних процесів, при застосуванні методу дискретних особливостей зменшується при подрібненні сітки розбиття, та в локальних окілах окремих точок області та границі, не перевищує 15% при виконанні умов розбиття [126, 273].

4.3. Висновки за розділом

Представлено новий метод та алгоритм обчислення значень кінематичних характеристик процесу. Розроблено нові методи та алгоритми визначення динамічних характеристик процесу із застосуванням вже існуючого розв'язку кінематичної початково-крайової задачі.

Розроблено нову методологію побудови обчислювальних технологій моделювання аерогідродинамічних процесів, призначених для застосування в комп'ютерних системах прогнозування, підтримки прийняття рішень та забезпечення керування швидкоплинними процесами в реальному масштабі часу.

Побудовано нову обчислювальну технологію, яка містить моделі, методи і алгоритми перетворення дискретних особливостей та алгоритми швидких обчислень, що надає можливість визначати динамічні параметри процесів та явищ з використанням методу перерахунку вже існуючих розв'язків вихідної задачі.

А також:

– Удосконалено чисельну математичну модель розвитку відривного аеродинамічного процесу в області із границею складної геометрії, в частині взаємодії непроникних рухомих границь та взаємодії нерухомих і рухомих вільних границь, які апроксимують вихрові шари при моделювання відривних явищ.

– На основі методу дискретних особливостей побудовано чисельну модель для обчислення поля тиску в геометрично складній області течії при обтіканні контурів довільної геометрії.

– Виділено основні обмеження на застосування математичних моделей, побудованих на основі методу дискретних особливостей, для задач, пов'язаних з аеродинамічним впливом на споруди та комплекси споруд.

Виявлені геометричні умови для чисельного представлення відривних течій в термінах методу дискретних особливостей.

- Виявлені умови можливості розпаралелювання при застосуванні методу дискретних особливостей для збільшення швидкодії обчислювальної технології. Визначено межі застосування чисельних моделей в залежності від геометричних та динамічних параметрів задачі.

– Алгоритм перетворення системи дискретних представлень із розривними (богатозначними) функціями в систему регулярних дискретних особливостей є регуляризуючим.

– Регуляризація системи дискретних особливостей .полягає в зведенні системи розподілених ліній розривів дискретизованої характеристичної функції до єдиної лінії розриву, яка проходить вздовж контуру та з'єднує контур з нескінченно віддаленою точкою.

– При умові $\Gamma_0 = 0$, обрання початкового елементу (із впорядкованої системи дискретизованих представлень) для регуляризуючого перетворення не впливає на чисельне значення характеристичної функції в будь-якої точці області (поза границями).

– Вирішено проблему «неусувної» похибки обчислень характеристичної функції (при застосуванні методу дискретних осособливостей) - регуляризуючі перетворення дозволяють коректно обчислювати значення дискретизованої характеристичних функцій та її похідних при параметричної залежності характеристичних функцій від часу. Алгоритми обчислювальних технологій застосовні, як для двовимірних, так і для тривимірних гідродинамічних задач нестаціонарного відривного обтікання.

При побудові обчислювальних технологій передбачено можливість розпаралелення процесу обчислень. Застосування технології перерахунку кінематичних характеристик зменшує час обчислень динамічної задачі, що забезпечує прогнозування аерогідродинамічних процесів в реальному масштабі часу.

РОЗДІЛ 5
ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ

5.1.Методики експериментальних досліджень та візуалізація течій

Дані теоретичних досліджень вихрових течій за моделями можуть бути інтерпретовані як результати чисельної візуалізації. У зв'язку з цим становить інтерес розробка таких методів візуалізації реальних процесів вихороутворення в потоці рідини, які дозволять порівняти чисельні та експериментальні дані, встановити межі застосовності теоретичних моделей і визначити шляхи їх подальшого вдосконалення. З огляду на особливості дискретизації задачі, була розроблена спеціальна методика візуалізації в гідродинамічному стенді і проведено комплекс експериментальних досліджень.

Як відомо [163, 173, 186] існують два підходи до досліджень течій рідини в процесі її руху:

1. При способі спостереження Ейлера параметри потоку досліджуються в фіксованій точці нерухомої системи координат.

2. При альтернативному підході Лагранжа ведеться спостереження за деякими властивостями заданої частки в процесі її руху в просторі і часі.

Перший спосіб вивчення властивостей рідини пов'язаний з різними методами вимірювання характеристик потоку в деяких точках (зокрема, з використанням термоанемометрів, датчиків тиску, лазерної вимірювальної апаратури і ін.). Більшість же методів візуалізації базуються на вивченні параметрів Лагранжа.

Візуалізація потоків здійснюється шляхом перетворення частинок рідини в оптично помітні при русі середовища. Фіксування різних картин течії здійснюється за допомогою фото- і відеозйомки. Найкращим чином зарекомендував себе метод барвників (рис. 5.21, рис. 5.22). Зазвичай використовуються два способи введення барвника в потік. Для візуалізації тих частин потоку, які недоступні для барвника, що впорскується через поверхню моделі, використовують спосіб подачі фарбника через тонкі трубочки (рис. 5.23). Було виготовлено кілька гребінок, через які в потік вводилися фарбувальні рідини. Гребінки виготовлялися з тонких сталевих трубочок (рис. 5.23, рис. 5.27). Вихідні отвори трубочок ретельно оброблялися. Відстань між центрами вихідних отворів гребінки і паралельність вихідних трубочок контролювалися таким чином, щоб барвник подавався паралельно площині течії.

Застосування високошвидкісний відеозйомки (рис. 5.29) дозволяло досліджувати такі нестаціонарні процеси як виникнення циркуляційних зон, виникнення вихору, розвиток вихровий доріжки, а також режими розгону або гальмування.

Для випробувань був виготовлений комплект моделей крил с профілями серії NACA і геометричних фігур різної форми в плані (рис. 5.2, рис. 5.19). Креслення і опис моделей та конструкції гідродинамічного стенду наведені нижче. Відзначимо дві важливі особливості його конструкції. Стінки робочої частини виконані з прозорого оргскла, що дає можливість проводити візуальні спостереження за структурою потоку. Також, дуже важливою є можливість створення потоку з наперед заданим ступенем турбулентності, та можливість використовувати магнітні і електромагнітні системи для керування моделями.

5.2. Конструкція лабораторного стенда та обладнання. (робочі параметри та характеристики)

Нижче представлено креслення та фото елементів конструкції стенду.

Креслення	**Фото**

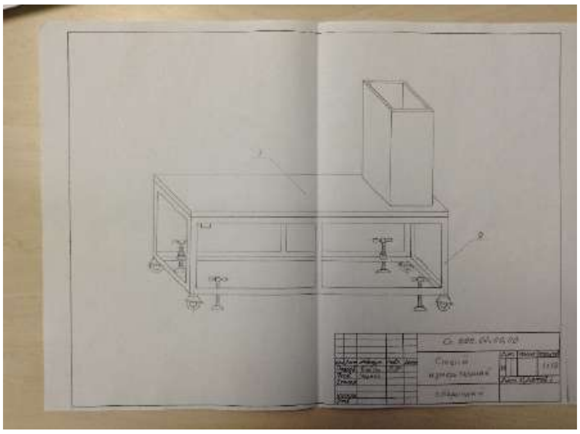


Рисунок 5.1 –
Стенд вимірювальний (креслення)

Рисунок 5.2 –
Стенд вимірювальний (фото)

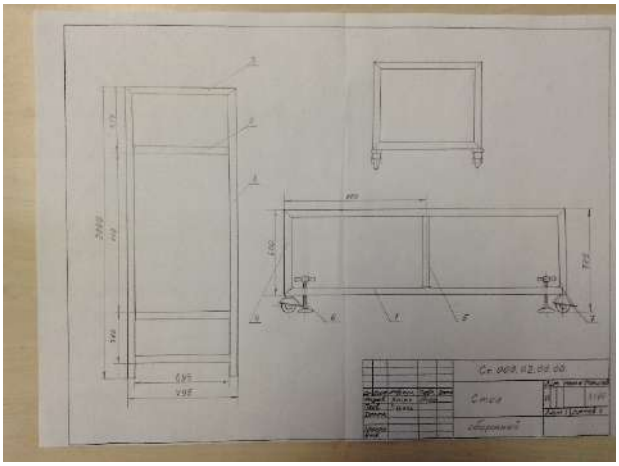


Рисунок 5.3 –
Стендовий стіл (креслення)

Рисунок 5.4 –
Стендовий стіл (фото)

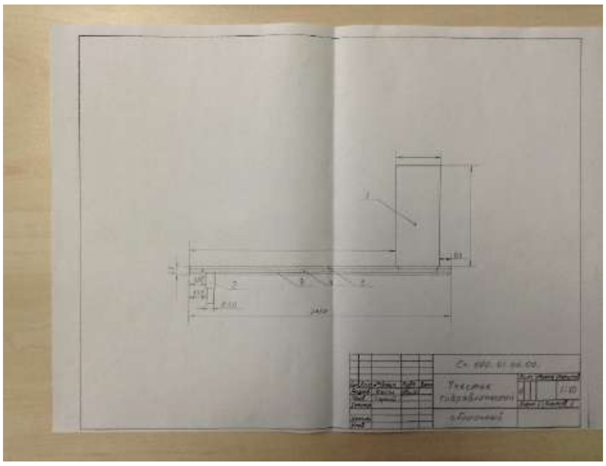


Рисунок 5.5 –

Робоча частина стенду (креслення)

Рисунок 5.6 –

Робоча частина стенду (фото)

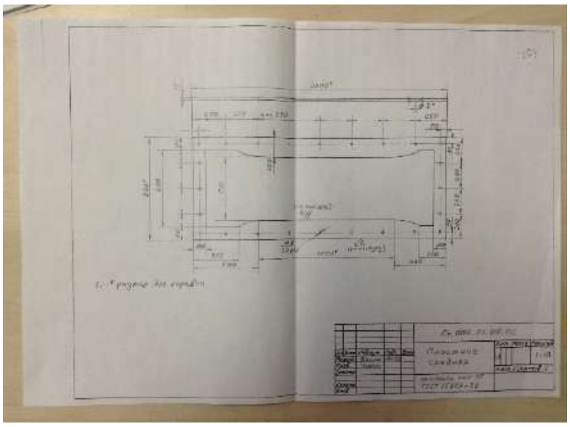


Рисунок 5.7 –

Внутрішня частина стенду (креслення)

Рисунок 5.8 –

Внутрішня частина стенду (фото)

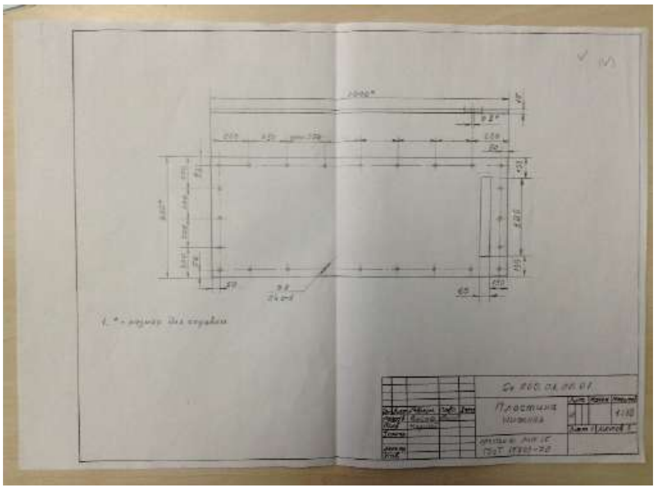


Рисунок 5.9 –
Нижня частина стенду, з отворами (креслення)

Рисунок 5.10 –
Нижня частина стенду , з отворами (фото)

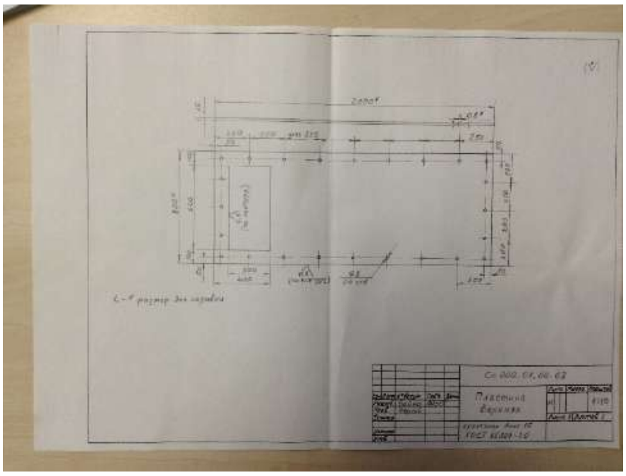


Рисунок 5.11 –
Верхня частина стенду, з отвором (креслення)

Рисунок 5.12 –
Верхня частина стенду, з отвором, для встановлення резервуару. (фото).

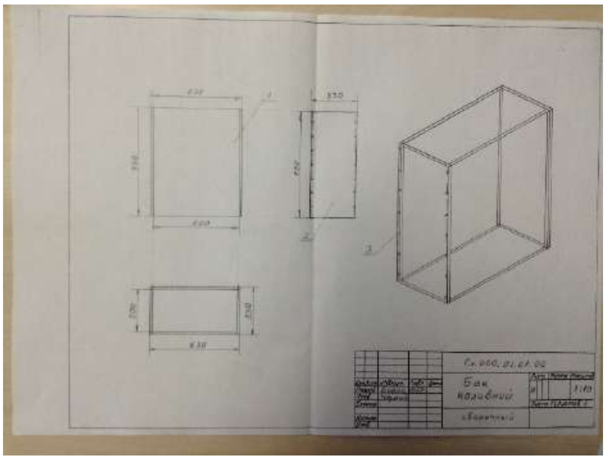


Рисунок 5.13 – Резервуар-накопичувач (креслення)

Рисунок 5.14 – Резервуар-накопичувач (фото)

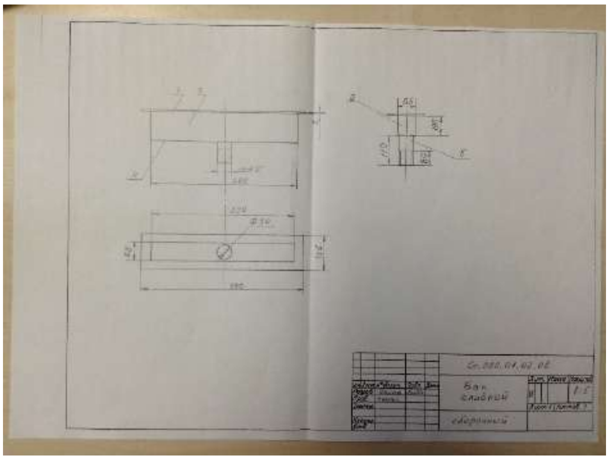


Рисунок 5.15 – Приймач для зливу рідини (креслення)

Рисунок 5.16 – Вигляд зібраної системи зливу рідини (фото)

Рисунок 5.17 –
Механізм керування швидкістю у системі зливу (розташування на стенді)

Рисунок 5.18 –
Конструкція механізму керування швидкістю зливу рідини.

Рисунок 5.19 –
Встановлення моделей в робочу частину стенду

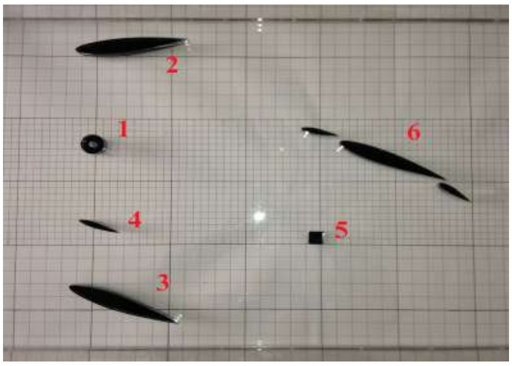


Рисунок 5.20 –
Моделі в робочої частині стенду

Рисунок 5.21 –
Вигляд системи візуалізації
(розташування на стенді)

Рисунок 5.22 –
Вигляд системи візуалізації
(механізм керування зміною
кольорів)

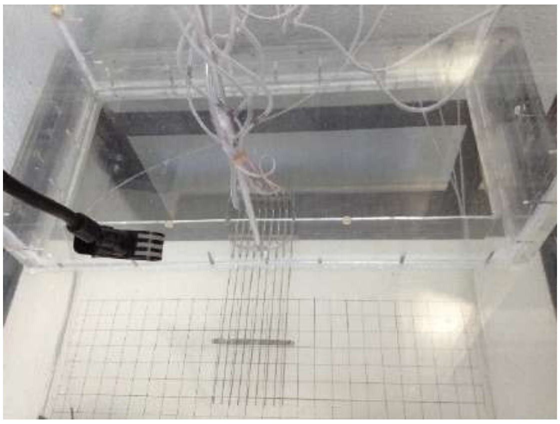


Рисунок 5.23 –
Вигляд пристрою для візуалізації
(розташування на стенді)

Рисунок 5.24 –
Вигляд пристрою для візуалізації

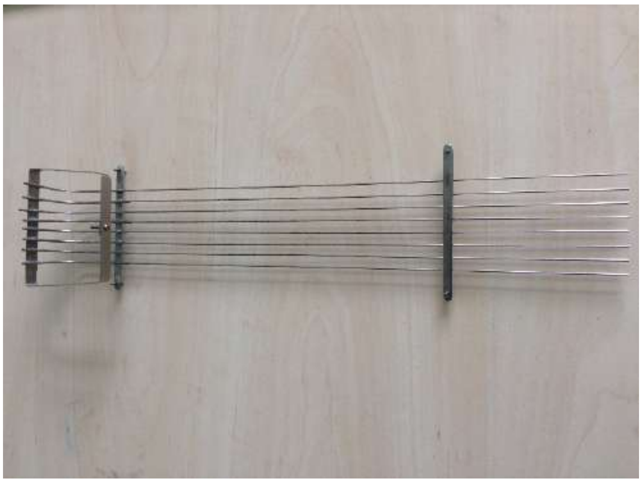


Рисунок 5.25 –
Вигляд пристрою для візуалізації

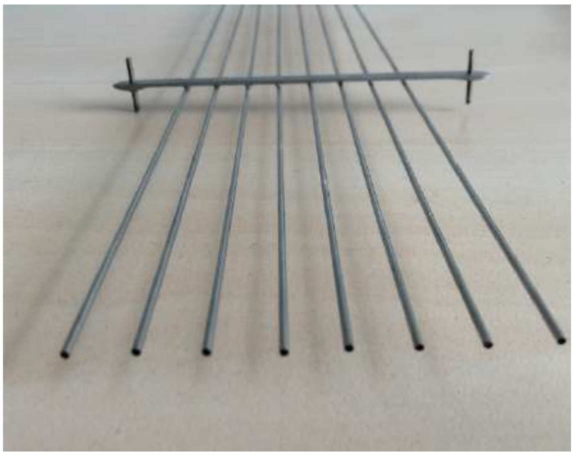


Рисунок 5.26 –
Вигляд пристрою для візуалізації

Рисунок 5.27 –
Вигляд пристрою для візуалізації

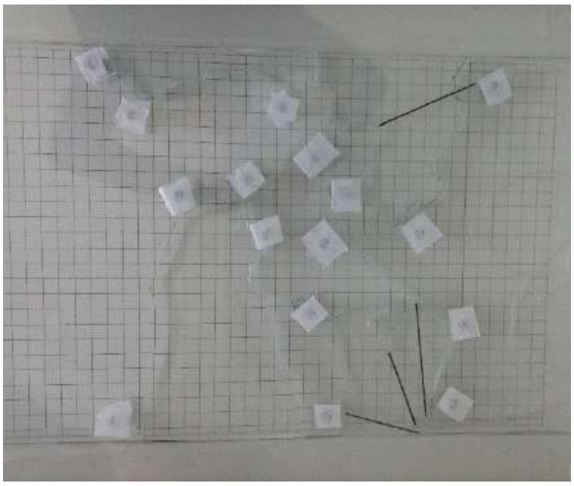


Рисунок 5.28 –
Встановлення маркерів для контролю перерізів (визначення товщини шару) в робочої частині стенду

5.3. Експериментальні методи та системи візуалізації і відео фіксації течій

Застосування високошвидкісний відеокамери дозволяло досліджувати такі нестаціонарні процеси як виникнення циркуляційних зон, виникнення вихору, розвиток вихровий доріжки, а також режими розгону або гальмування.

Експериментальні дослідження було проведено на лабораторному стенді, в плоскому каналі складної криволінійної форми.

Експериментальні дослідження проводились за класичною методикою та технологіями моделювання в'язких течій на лабораторному стенді з плоским каналом (рис. 5.19, 5.20), який має перешкоди та границі складної криволінійної форми. Крім того, у розділі представлені результати експериментальних досліджень.

Мета експериментальних досліджень – підтвердження теоретичних припущень (щодо властивостей математичних моделей):

1) виявлення діапазону числа $\mathrm{Re_h}$, в якому виникають циркуляційні режими течії в плоскому закритому каналі (глибина-товщина шару $h = 15мм$);

2) виявлення режимів течії (за $\mathrm{Re_h}$) в плоскому закритому каналі, геометрично та кінематично подібних (за профілем швидкості) течії в мілководній акваторії.

Методика проведення лабораторних експериментальних досліджень включає в себе кольорову візуалізацію виділеної частини течії в каналі (метод локального фарбування), відеофіксацію, технологію вимірювання локальної та осередненої по товщині каналу швидкості навколо перешкод.

Робочі параметри та характеристики лабораторного стенда.

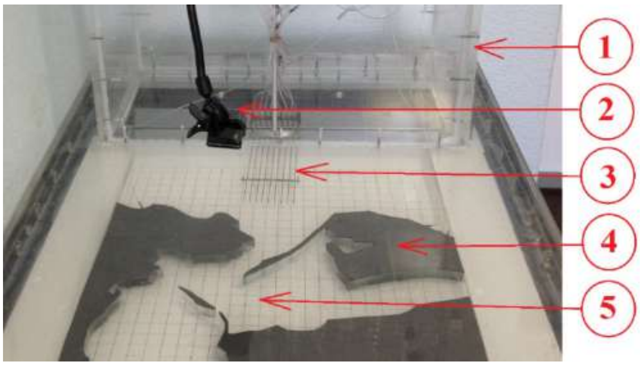


Рисунок 5.29 –
Конструкція лабораторного стенду з системою візуалізація та відеофіксації течій.

Рисунок 5.30 –
Зовнішній вигляд конструкції лабораторного стенду.

На рис. 5.29, 5.30 наведені наступні позначення: 1 – резервуар для рідини; 2 –система відеофіксації; 3 – голкова система введення фарби; 4 – встановлені моделі; 5 – робоча частина стенду; 6 – регулятор швидкості течії. Лабораторний стенд призначений для дослідження течій в плоскому закритому каналі, в робочому діапазоні чисел Рейнольдса $0 \le \mathrm{Re_h} \le 1.5 \times 10^4$, де $\mathrm{Re_h} = \dfrac{hV}{\nu}$ визначається за товщиною шару.

Технічні характеристики робочої частини лабораторного стенду:

Глибина плоского закритого каналу (товщина шару): $h = 15\textit{мм}$;

Ширина робочої частини – $500\textit{мм}$;

Довжина робочої частини – $1100\textit{мм}$;

Робоча рідина – вода, коефіцієнт кінематичної в’язкості $\nu = 10^{-2}$ *см/сек*;

Діапазон робочих швидкостей $V = 0 \div 100\textit{см}/\textit{сек}$;

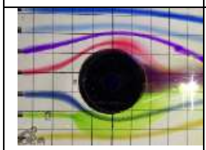
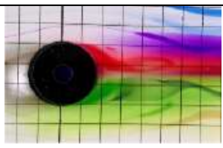
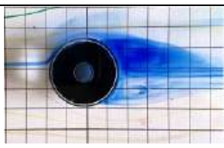
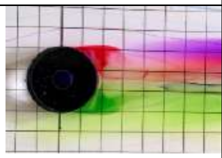
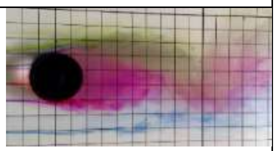
Загальні розміри лабораторного стенду: довжина – 2,0 м., висота – 1,5 м. ширина – 0,8м.

5.4. Експериментальні тестові дослідження течій (при $1 \le \mathrm{Re_D} \le 2 \times 10^3$).

Для виявлення діапазону чисел $\mathrm{Re_h}$, при яких виникає циркуляційний режим течії в пласкому каналі з перешкодою у вигляді кругового циліндру, було проведено комплекс експериментів. Результати лабораторного експерименту з виявлення режимів циркуляційної течії навколо циліндру, в шару між паралельних площин, при $0 \le \mathrm{Re_D} \le 2 \times 10^3$ представлено в таблиці 5.1.

Помітно, що для течії між паралельними площинами, в достатньо широкому діапазоні чисел Рейнольдса 0<Re<2000, де в'язкі сили мають значний вплив, у порівняні із силами інерції виникають циркуляційні режими течії. Порівняльний аналіз з відомими експериментальними результатами показав, що для течії води в шару товщиною $h = 15\text{мм}$, навколо циліндру діаметром $D = 2h = 30\text{мм}$ циркуляційний режим виникає при $\mathrm{Re_h} \ge 10$, в тому ж діапазоні чисел Рейнольдса, як для циліндрів у вільному потоці.

Таблиця 5.1 – Результати комплексу експериментів

				
а) $\mathrm{Re_D}$=1.54	**б)** $\mathrm{Re_D}$=9.6	**в)** $\mathrm{Re_D}$=26	**г)** $\mathrm{Re_D}$=30.2	**д)** $\mathrm{Re_D}$=2000
				
ж) $\mathrm{Re_h}$=1;$\mathrm{Re_D}$ =2	**з)** $\mathrm{Re_h}$=4,7;$\mathrm{Re_D}$=9,4	**і)**$\mathrm{Re_h}$=13,4;$\mathrm{Re_D}$=26,8	**к)** $\mathrm{Re_h}$=16; $\mathrm{Re_D}$=32	**л)** $\mathrm{Re_h}$= 1012; $\mathrm{Re_D}$=2024

Пояснення до табл. 5.1.: а) – д) Течія навколо циліндру в вільному потоці (М.Ван-Дайк,1982). Лабораторний експеримент: ж) – л) течія навколо циліндру встановленому в плоскому каналі глибини $h = 15\textit{мм}$. Діаметр циліндру $D = 2h = 30\textit{мм}$, $\mathrm{Re}_\mathrm{D} = \frac{DV}{\nu}$, $\mathrm{Re}_\mathrm{h} = \frac{hV}{\nu}$.

5.5. Експериментальні моделювання на лабораторному стенді вихрових в'язких течій, в шару проміж паралельних площини на скінченної відстані (течія в плоскому каналі з криволінійною межею

Для можливості порівняння двох течій, повинно бути забезпечено умови геометричної і кінематичної подібності.

При лабораторному дослідженні течії в плоскому каналі (модельної акваторії) забезпечено умови геометричної та кінематичної подібності:

– $\frac{R_н}{L_н} = \frac{R_м}{L_м} = const$ – умова геометричної подібності форми меж (натурної) акваторії та формі меж плаского каналу (модельної акваторії);

– $Sh = \frac{L_н}{T_н V_н} = \frac{L_м}{T_м V_м} = conct$ – умова кінематичної подібності (за числом Струхаля);

де: $R_н$ – характерні розміри елементів акваторії, $R_м$ – характерні розміри елементів у каналі, $V_н$ – характерна швидкість в акваторії, $T_н$ – характерний час процесу, $L_н$ –характерний розмір акваторії, $V_м$ – характерна швидкість в каналі, $T_м$ – характерний час модельного процесу, $L_м$ – характерний розмір каналу.

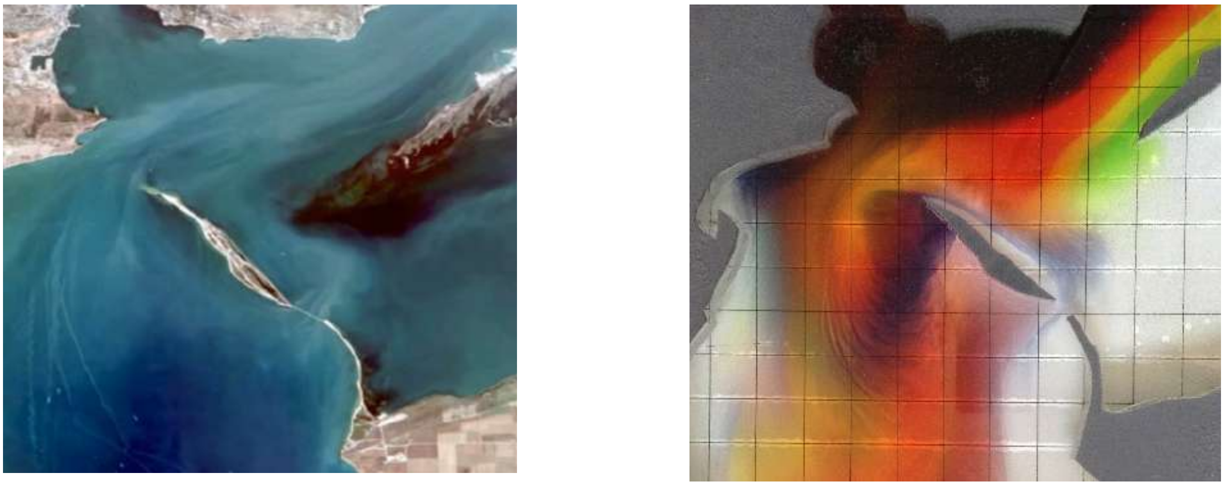


Рисунок 5.31 – Порівняння структури течії в акваторії Керченської протоки, з результатом лабораторного експерименту в плоскому каналі глибини $h = 15мм$ (з лінією стінок, геометрично подібними межам акваторії). Масштаб моделі $\frac{L_м}{L_н} = 10^{-4}$

а) Космічне фото акваторії Керченської протоки https://www.google.com.ua/maps

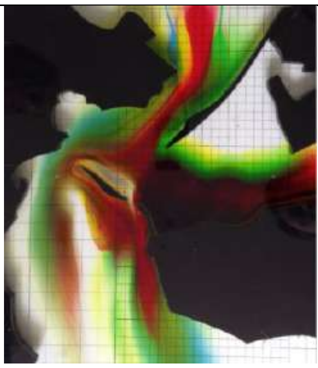
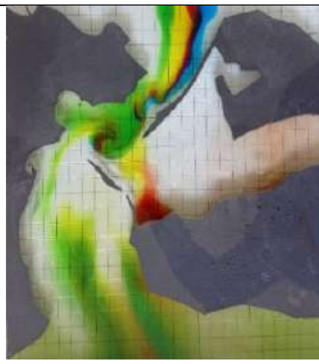
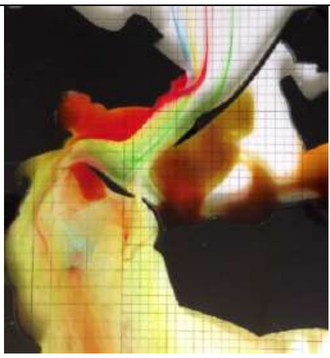
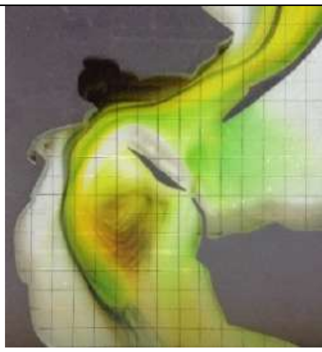
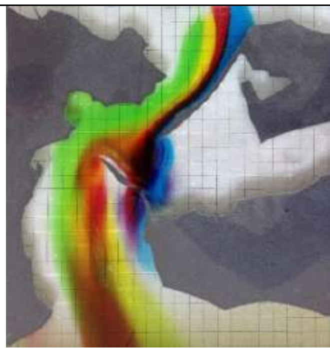
б) Лабораторний експеримент. Моделювання течії в плоскому криволінійному каналі.

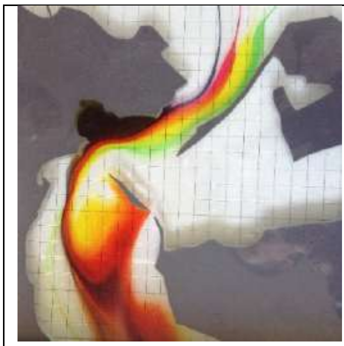
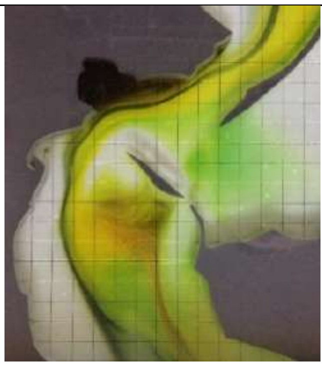
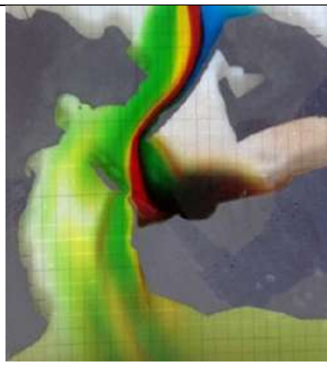
Дані умови забезпечують геометричну подібність розташування та геометрічну подібність форм циркуляційних зон течії в пласкому каналі (модельної акваторії) геометричним формам та розташуванню циркуляційних течії в (натурної) акваторії протоки.

Наявність впливу в’язких сил в шару (товщина якого для моделі дорівнює глибині каналу $h = 15мм$), при $\mathrm{Re}_h = \frac{hV_м}{\nu} \le 1.5 \cdot 10^4$ (ν – коефіцієнт кінематичної в’язкості води), призводить до формування профілю швидкості (для течії в’язкої рідини) з умовами прилипання на стінках, але не перешкоджає утворенню циркуляційних зон (Таблиця 5.2).

Результатами лабораторного моделювання підтверджено існування стійких структур та циркуляційних режимів течії в пласкому криволінійному каналі, геометрично подібних структурам течії в реальній акваторії (рис. 20, а – і). Враховуючі на слабку залежність числа Струхаля від числа Рейнольдса ($Sh(\mathrm{Re}) \approx \mathrm{const}$, при $\mathrm{Re} = \frac{L_{м} V_{м}}{\nu} > 150$), спостерігається зміна розташування циркуляційних зон (в каналі з перешкодами) геометрично подібних циркуляційним зонам акваторії протоки, в залежності від змін швидкості.

Таблиця 5.2 – Результати лабораторного експерименту. Варіанти мінливості циркуляційних течій в плоскому криволінійному каналі з перешкодою, глибини $h = 15мм$ (модель акваторії Керченської протоки)

Варіанти мінливих течій в модельної акваторії Керченської протоки		
		
а	**б**	**в**
		
г	**д**	**е**

		
ж	**з**	**і**

Експериментальні дослідження плоскопаралельних вихрових в’язких течій в плоскому каналі скінченої глибини зі стінкою складної криволінійної форми (моделі акваторії морської протоки), показали мінливість великомасштабних циркуляційних течій. Також експеримент дозволив виявити в каналі із складними межами та великомасштабними перешкодами зони, в яких виникають течії з високими градієнтами швидкостей. В реальної акваторії подібні умови визначають підсилений вплив на донні ґрунти що призводить до виникнення процесу масопереносу в акваторії. В Таблиці5.2 наведено варіанти мінливих та великомасштабних циркуляційних течій, на виникнення яких впливають кінематичні параметри течії на вході в канал.

5.6. Висновки за розділом

1. Розроблено лабораторний стенд та методологію лабораторних досліджень для тестування нових моделей нестаціонарної течії. Стенд призначено для досліджень та моделювання течій в шару з перешкодами та межами довільної форми, між паралельних площин, в діапазоні чисел Рейнольдса $1 \le \mathrm{Re} \le 1.5 \cdot 10^4$. Лабораторна верифікація моделей підтверджує

можливість застосування методу дискретних особливостей на нові класи прикладних задач.

2. Методом лабораторного моделювання підтверджено існування стійких структур та циркуляційних режимів течії в плоскому криволінійному каналі, геометрично подібних структурам течії в реальній акваторії в діапазоні чисел Рейнольдса $10 \le \mathrm{Re} \le 1.5 \cdot 10^4$.

3. Встановлено, що на мінливість великомасштабних циркуляційних течій впливають кінематичні та динамічні властивості течії на вході в канал. Вхідні умови на вході в канал та локальні зміни в геометрії перешкод здатні вплинути на структуру течії в каналі (як моделі акваторії морської протоки) та визначити особливості умов масопереносу в акваторії із складної границею при наявності великомасштабних перешкод.

РОЗДІЛ 6
МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ АЕРОГІДРОДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ТА СИСТЕМ

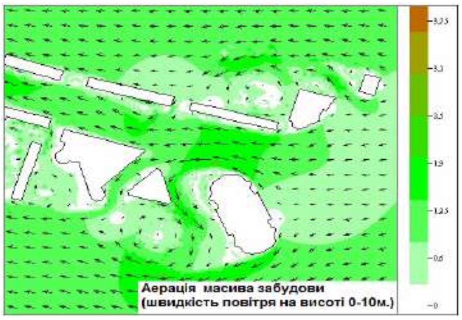
В розділі наведено результат застосування обчислювальних технологій в моделюючих програмних системах, призначених для проведення попередніх проектних та експертних досліджень в галузях будівельної аеродинаміки [56, 77-87, 225, 227], в машинобудуванні [167, 169, 170], в гідротехніці [130, 131, 219-224, 226, 233, 234, 235], в галузі контролю екологічного стану акваторій [104-110, 168, 220, 221, 235, 281] та для досліджень тривимірних аергідродинамічних явищ та ефектів [54, 55, 122, 125, 126, 129, 132].

6.1. Моделювання аеродинамічних процесів в галузі будівельної аеродинаміки

З розвитком обчислювальної техніки математичне моделювання стає одним з основних інструментів прогнозування швидкоплинних процесів. При виникненні метеорологічних та гідрологічних катаклізмів, надзвичайних ситуацій на підприємствах, що сталися внаслідок техногенних або природних катастроф, з викидом забруднюючих речовин в повітря або водне середовище, саме математичне моделювання стає інструментом прогнозування виникнення та розвитку небезпечних та небажаних процесів та явищ.

Моделювання аераційних та аеродинамічних процесів на території щільної забудови є складовою частиною передпроектних досліджень, згідно вимог Державних будівельних норм, з виявлення особливостей зазначених процесів, визначення критичних та виявлення небезпечних і небажаних аеродинамічних впливів на конструкції, виявлення наслідків впливів аеродинамічної інтерференції на споруди та прилеглі території [77-87, 225].

а) Проект забудови проспекту Перемоги у м. Києві, архітектор С. Бабушкін



в) Виявлення векторних полів швидкості повітря в прилеглому шару, на висоті до 10м.

Рисунок 6.1 – Результати дослідження аеродинамічних процесів та впливів на системи будівельних споруд та прилеглі території. Прогнозування аераційних процесів

Відзначимо, що, аналіз результатів моделювання полів (рис. 6.1.) показав, що розташування висотної споруди в масиві малоповерхової забудови може призводити до небезпечних наслідків – істотної зміни розподілу полі швидкостей та тиску навколо малоповерхових споруд. За результатами обчислювального експерименту встановлено динаміку проявлення «ефекту замикання» та реверсним режимам в вентиляційних комунікаціях малоповерхових споруд (рис. 6.2), які здатні призвести до раптових «непояснених» вибухів в малоповерхових житлових спорудах, які оснащеніiндивідуальними системами опалення або газовими колонками та розташовані поблизу висотних споруд та конструкцій.

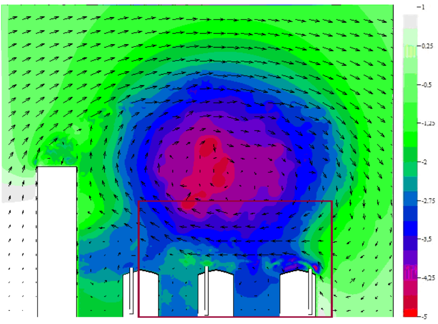


Рисунок 6.2 – Вихроутворення навколо висотної споруди – причина змін неоднорідного полю тиски поза межами будівель

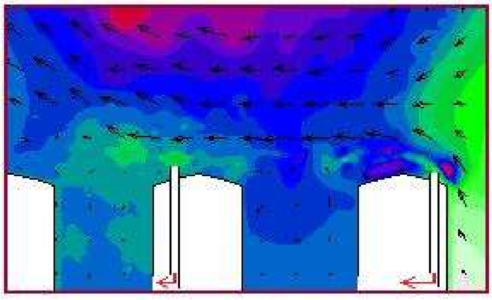


Рисунок 6.3 – Виникнення реверсного режиму у системі споруд із природничої витяжної вентиляції

Стрімкий розвиток промисловості й транспорту, загальна глобалізація формують сьогодні підвищений інтерес багатьох дослідників до питань екології та, зокрема, до проблеми обмінних процесів та масопереносу в повітрі та в акваторіях. Ці наукові задачі безпосередньо пов'язані з питаннями еволюції і прогнозування еволюції скалярних полів (забруднень, солоності, температури та інш.) в океані, атмосфері, і знаходять сьогодні широке застосування в різних областях аеро- і гідромеханіки, біології, геології, екології.

Методи досліджень аеродинамічних задач задачі застосовні до гідрологічних задач, що припускають аналогічну постановку.

Розглядається течія в мілководній акваторії (рис. 6.3 – рис. 6.5) яка являє собою широкий канал з перешкодою та з криволінійною формою лінії узбережжя. Глибина каналу вважається малою та слабозмінною. Течія вважається в'язкою та плоскопаралельною рис. 6.5. Враховуючи те, що при дослідженні течій в акваторіях, як правило, головний інтерес представляє осереднена по товщині шару [262, 263, 265, 281], поверхнева та придонна швидкість, було використано математичну модель шаруватих течій [251, 255]. Течія, яка розглядається, описується рівняннями Нав'е-Стокса, тому модель заснована на аналітичному рішенні рівнянь Нав'є-Стокса [224, 232, 234] для окремого випадку шаруватих течії паралельних площині, з урахуванням конвективних доданків та нестаціонарності (для якої, при зміні параметрів, течія Хіл-Шоу є частковим випадком).

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla(\frac{1}{2}\vec{V}^2 + \frac{p}{\rho} + U) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) = \frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{V} \qquad (6.1)$$

$$\nabla\vec{V} = 0\,, \qquad (6.2)$$

Задача зводиться до визначення плоскопаралельної течії в криволінійному каналі квазіпостійної глибини.

Рисунок 6.3 – Фото акваторії зі супутнику

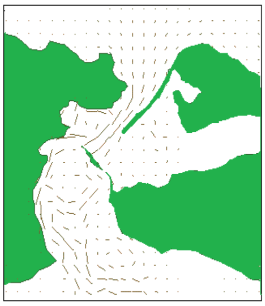


Рисунок 6.4 – Схема течії в плоскому каналі з перешкодою

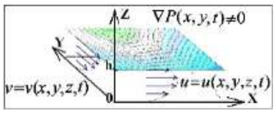


Рисунок 6.5 – Схема течії в шарі

До того, вважається, що загальна течія в акваторії вже сформована, з врахуванням впливу різних рівнів моря на вході та виході із акваторії протоки та з врахуванням впливу вітрових хвиль.

6.2. Моделювання гідрологічних процесів в акваторіях

Часто природні катаклізми і непослідовна діяльність людини призводять до екологічних аварій, в результаті яких різні забруднення потрапляють на морську поверхню і переносяться на великі відстані під впливом течій. Саме в цей момент фахівцям з надзвичайних ситуацій необхідно приймати оперативні рішення по ліквідації наслідків аварій, спираючись на швидкий і точний прогноз поширення забруднень.

Більшість задач, пов’язаних з прогнозуванням поширення забруднень, спираються на класичні методи розв’язування задач гідромеханіки і вимагають значних обчислювальних ресурсів [177, 179, 198, 204]. Багато з цих методів беруть до уваги різні фізичні процеси, що відбуваються на морській поверхні. Це, в свою чергу, значно збільшує тривалість обчислень. Вельми актуальними в цих випадках є чисельні методи розв’язання, які після отримання необхідних даних для заданого морського регіону [281] дозволяють в режимі, випереджаючому реальний час, якісно спрогнозувати динаміку поширення забруднення.

Моделювання різномасштабних гідрологічних процесів в акваторії Зміни будь яких зовнішніх умов завжди впливають на ефективність господарської діяльності в регіоні. Особливо, коли зміни умов виникають як наслідки техногенного впливу або природніх катаклізмів, які самі мають регіональний масштаб. Виникає потреба як в оперативному прогнозі, так і в довготривалому прогнозування. В значної мірі це стосується діяльності пов’язаної з використанням водних акваторій. Найбільшу потребу в прогнозі еволюції таких процесів, як поширення забруднень на водної поверхні, масоперенос (з урахуванням забруднень) в обмежених акваторіях під впливом змін гідрологічних і атмосферних умов відчувають служби, покликані оперативно попереджати розвиток природних і техногенних катастроф та зменшувати / запобігати їх вплив на навколишнє середовище. Таких прогнозів потребують гідрометслужби, служби із запобігання та подолання наслідків надзвичайних ситуацій, установи проектанти гідротехнічних споруд, мостобудівники, будівники технологічних споруд, лоцманська служба та інш. Найбільш важливими факторами для оперативного реагування є визначення тенденцій розвитку інтенсивного процесу для оцінки можливостей попереджувальних і рятувальних заходів.

Проблеми, які виникають в акваторіях, мають, як різні за масштабами та причини виникнення, так і різні масштаби проявів. На прикладі акваторії протоки, яка поєднує Азовське та Чорне море, розглянуто окремі частини гідрологічних проблем – загальна зміна структури течії та масоперенос (донних грунтів та поверхневих забруднень), що виникли як наслідок техногенного впливу – побудови великомасштабних гідротехнічних та інженерних споруд акваторії. Це дамба, яка суттєво змінила лінію узбережжя та мостовий перехід, якій побудовано в зоні підвищеного гідродинамічного впливу. Наслідки вищеназваних техногенних впливів, здатні призвести до якісних змін в структуру течії та вплинути на масоперенос донних грунтів, небезпечний в зоні фарватеру протоки.

Моделювання зміни структури течії та динамічних впливів на гідрологічні процеси в акваторії Керченської протоки, під впливом гідротехнічних конструкцій та споруд.

Структура течій і гідрологічних процесів в акваторіях протік, фіордів, в шельфових зонах зазвичай залежить від характеристик течій на вході, від погодно-кліматичних умов в зоні течії і особливостей берегової лінії. Як відомо, якісні зміни в структуру течії та гідрологічних процесів в акваторії вносяться значними, за геометричним масштабом, змінами вхідних даних (витрат на вході або змін геометрії границь області). Прикладом такого технологічного впливу є спорудження дамби в акваторії Керченської протоки з боку Таманського півострова в 2003р. (рис. 6.6-Рис.6.7), яка суттєво змінила характер течії в акваторії.

Так, особливістю гідрологічних умов Керченської протоки є досить велика швидкість течії (0.4-0.6 м/с), мала глибина (4-8 м) і відносно рівне, пласке дно. Зазначене дозволяє використовувати спрощені моделі для прогнозування зміни структури течії в акваторії протоки на підставі рішення початково-крайової задачі про течію в неоднозв'язній області – пласкому каналі зі складними межами. Нижче представлені варіанти зміни структури течії під впливом реальних (рис. 6.7), і можливих (рис. 6.8 а),б),с)) інженерних споруд. На рисунках (рис 6.9 – рис.6.11) інтенсивність забарвлення позначає інтенсивність течії в акваторії.

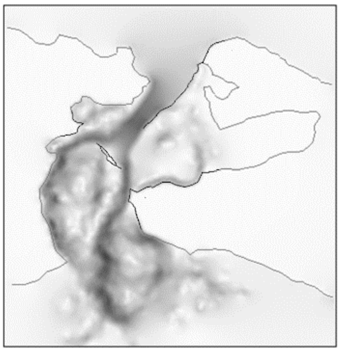


Рисунок 6.6 – Модельна структура домінуючої течії до побудови дамби

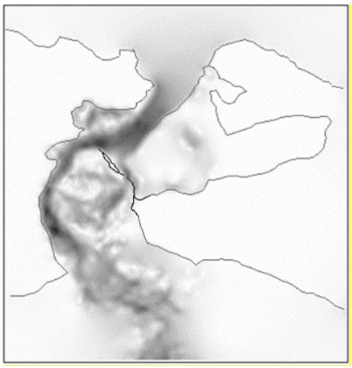


Рисунок 6.7 – Модельна структура домінуючої течії після побудови дамби в 2003р.

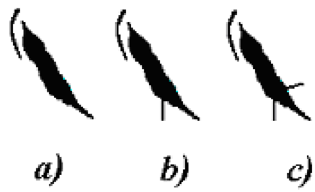


Рисунок 6.8 – Варіанти можливих гідротехнічних споруд.

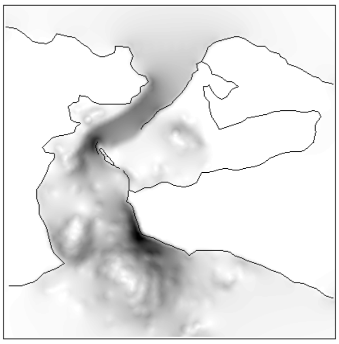


Рисунок 6.9 – Прогноз структури течії для гідротехнічних споруд за варіантом a).

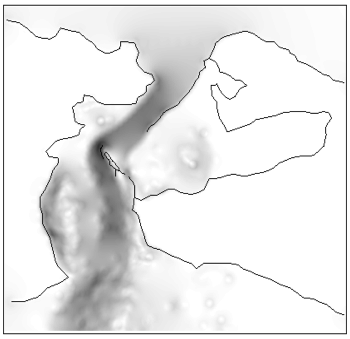


Рисунок 6.10 – Прогноз структури течії для гідротехнічних споруд за варіантом b).

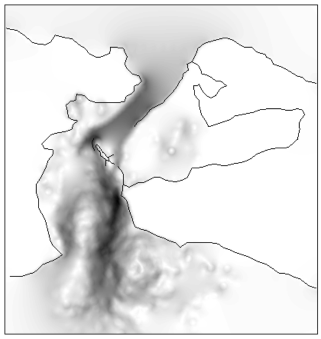


Рисунок 6.11 – Прогноз структури течії для гідротехнічних споруд за варіантом c).

Результати моделювання демонструють (рис. 6.9 – рис.6.11), що навіть реалізація будь-якого з варіантів (рис. 6.8 a, b, c) – порівняно невеликих берегових гідротехнічних споруд на острові в акваторії, може призвести до глобальної перебудови течії в усій акваторії протоки з виникненням нових зон локального посилення інтенсивності течії. Доцільно зазначити, що структура течії є визначальною для основних гідрологічних процесів в акваторії.

Порівняльний аналіз результатів космічних фото, лабораторного моделювання та результатів обчислювального експерименту представлених на рис. 6.12 – рис. 6.15 та результати обчислювального експерименту переконливо свідчать, про адекватність застосовної математичної моделі.

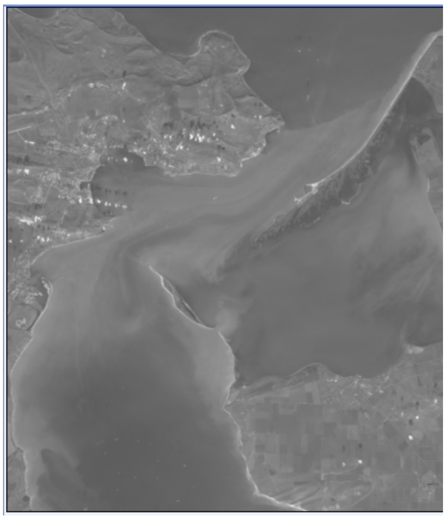


Рисунок 6.12 – Космічне фото Spot11.03.2004

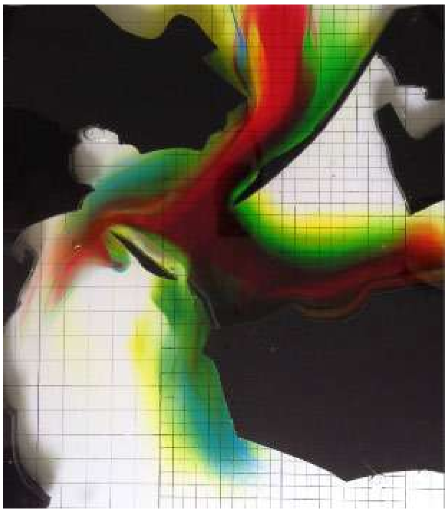


Рисунок 6.13 – Результати лабораторного експерименту

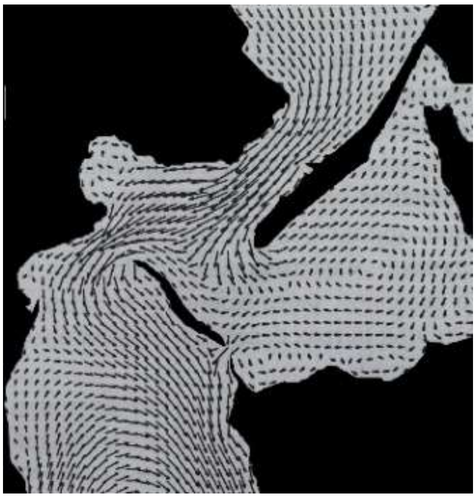


Рисунок 6.14 – Результати матмоделювання полів течії в акваторії [148]

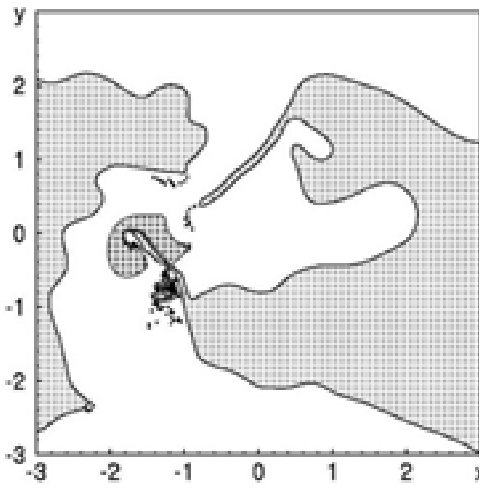


Рисунок 6.15 – Результати матмоделювання адвекції забруднення в акваторії [104-107]

Особливості загальної течії в акваторії

Для визначення особливостей загальної структури течії в акваторії, разом із математичним моделюванням, було застосовано фізичне моделювання на лабораторному стенді (модель акваторії протоки у вигляді криволінійного каналу з постійною глибиною) та у гідродинамічному лотку. Враховуючи те, що швидкість у локальних частинах акваторії може досягати 1м/сек, число Рейнольдса, визначене по глибині, вважається $Red=Uh/\nu>\cdot10^6$. Наведене нижче порівняння космічних фотознімків, модельних експериментів та результатів математичного моделювання демонструє якісне співпадіння спостерігаємих полів швидкості, осереднених по глибині акваторії, що підтверджує коректність зроблених припущень.

Рисунок 6.16 – Космічне фото (Google maps)

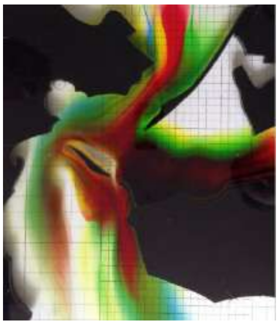


Рисунок 6.17 – Результати експерименту

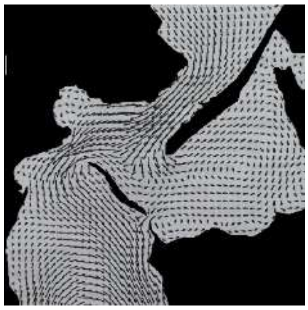


Рисунок 6.18 – Результати матмоделювання [148].

Представлені на рис. 6.16. – рис. 6.17 результати лабораторного та математичного моделювання [223, 224], демонструють добру сбіжність зі спостерєжною із космосу структурою течії в акваторії (рис. 6.16). Варто звернути увагу на мінливість структури течії в акваторії (рис. 6.16, рис. 6.17) яка відбувається при змін вхідних умов, що підтверджено лабораторним експериментом (рис. 6.17.) та математичним моделюванням (рис. 6.18).

Рисунок 6.19 – Космічне фото (Google maps)

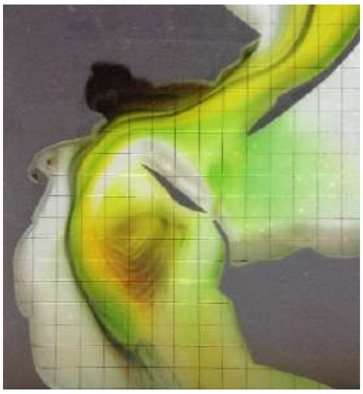


Рисунок 6.20 – Експеримент на стенді

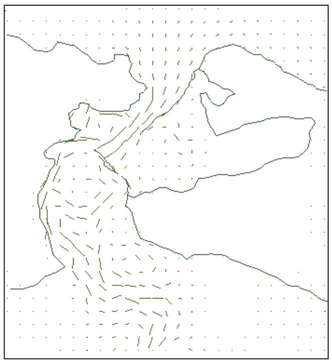


Рисунок 6.21 – Матмоделювання [224,234]

Ефективність застосування математичних моделей, побудованих на основі методу інтегральних рівнянь [223], для прогнозування переносу забруднень по водної поверхні можливо оцінити із порівняння рис. 6.22 – рис. 6.23.

Рисунок 6.22 – Космічне фото (TerraSAR-X. 16.11.2007)

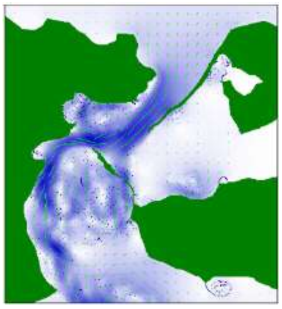


Рисунок 6.23 – Прогнозування разповсюдження забруднень через 100 годин

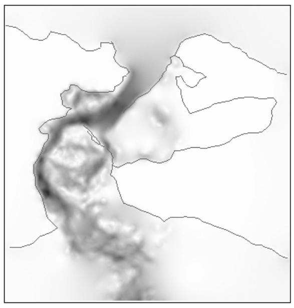


Рисунок 6.24 – Матмоделювання [223]

Мінливість структури течії в акваторії, при зміні вхідних умов на вході в акваторію, підтверджено даними метеослужб Азово-Черноморського басейну.

Рисунок 6.25 – Експеримент на лабораторному стенді

Рисунок 6.26 – Експеримент на лабораторному стенді

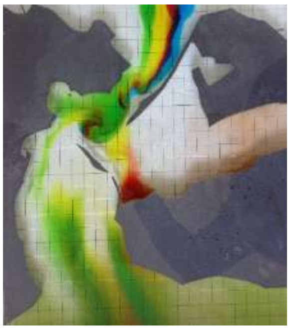


Рисунок 6.27 – Експеримент на лабораторному стенді

Експериментальне моделювання на лабораторному стенді, також підтверджує суттеву залежність течій від параметрів на вході у акваторію (рис. 6.25 – рис. 6.27).

Рисунок 6.28 – Експеримент на лабораторному стенді

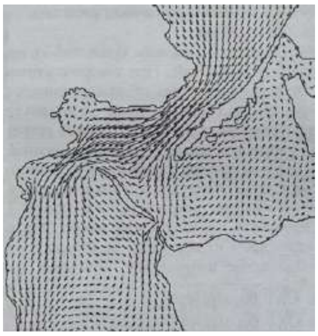


Рисунок 6.29 – Матмоделювання [1]

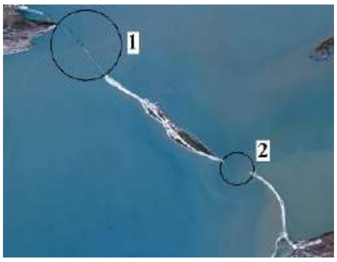


Рисунок 6.30 – Космічне фото (Google maps)

Результати фізичного та математичного моделювання, при різних вхідних даних, засвідчують (рис. 6.28, рис. 6.29), що підвищення швидкості спостерігаються у проміжках між та кінцівками острова-перешкоди та матеріковию частиною протоки, це зони 1) та 2), (рис. 6.30). При цьому, у визначених зонах середня по глибині обчислена швидкість, а також та, що спостерігається (як в експерименті та при натурних вимірюваннях [1]), завжди суттєво вище ніж в інших частинах акваторії. У окремих, локалізованих, частинах акваторії осереднена швидкість течії може наближаеться до величини 1м./сек. Доцільно звернути увагу на те, що у цих зонах 1) та 2) встановлено гідротехнічні конструкції (опори мостового переходу через протоку, рис. 6.30 – рис. 6.31), які мають локальний вплив на придоннй течію. Тому, виникає типова природня проблема гідродинамічної взаємодії з перешкодою, яка супроводжується переносом грунтів під впливом придонних течій та впливом масопереносу на зміну характеристик фарватеру. Враховучи те, що придонна течія впливає на конструкції та споруди, яки істановлені на донному грунті, доцільно розглянути вплив перешкод (наприклад, опор мосту) на масоперенос та зміну поверхні дна, що викливаеться гідродинамічним впливом.

Локальні зони підвищеного гідродинамічного впливу

Значна кількість гідродинамічних, гідрологічних та інженерних проблем виникає саме тоді, коли погано обтічна перешкода встановлюється на розмивній та нерозмивній поверхні, над якою протікає потік рідини. У безпосередній близькості до області спряження перешкоди та обтічної поверхні виникають градієнти тиску, які обумовлені наявністю перешкоди. Перед перешкодою примежовий шар над поверхнею дна русла або прибережної поверхні (ламінарний або турбулентний) знаходиться в області несприятливого градієнту тиску, що викликає його тривимірний відрив. У відривній області зароджується та розвивається система вихорів, які витягуються навколо основи погано обтічного тіла вздовж контуру, що схожий на підкову [45]. Так, під час обтікання мостових опор в області їх перетину з русловим дном утворюється складний вихровий рух, який обумовлює розмив ґрунту поблизу опор (рис.6.31).

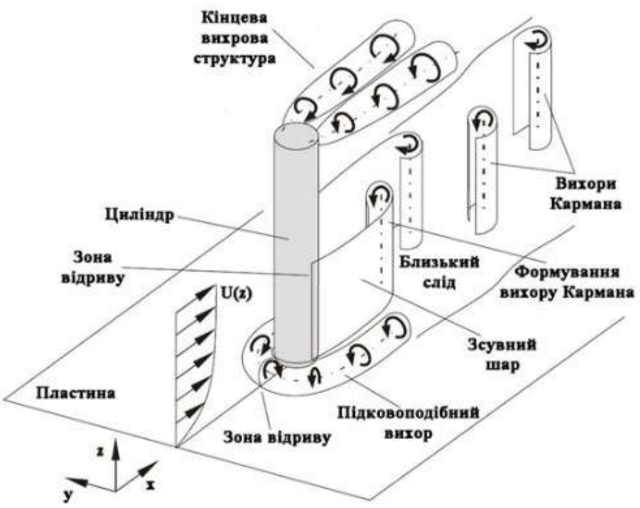


Рисунок 6.31 – Структура вихорових течій навколо першкоди встановленої на пластині

Глибина розмиву становить одну з основних характеристик як під час проектування мостових переходів, так і під час їх експлуатації. Незалежно від форми мостової опори основним механізмом, який керує формуванням та розвитком отвору розмиву є підковоподібна вихрова система, що утворюється біля основи опори. Стан та характеристики потоку впливають на форму та розмір вихрових систем. Серед основних факторів, які формують процес ерозії ґрунту поблизу мостових опор та виступів і визначають глибину локального розмиву, треба відмітити наступні: це глибина потоку, швидкість течії, ширина та форма опори, довжина опори та її кут розташування відносно напрямку течії, розмір та градація матеріалу ґрунту, конфігурація дна руслу та деякі інші [298]. Групування опор призводить до зміни глибини локального розмиву, що обумовлено взаємним впливом вихрової течії навколо окремих опор, які формують групову конструкцію. В залежності від місцезнаходження, конструкції опор та режиму їх обтікання змінюються кінематичні та динамічні характеристики підковоподібних, бокових і слідових вихорів, а також їх інтенсивність дії на ерозію ґрунту, який прилягає до опор [298]. Неоднорідність і нестаціонарність вихрової та струменевої течії поблизу і усередині групових конструкцій опор гідротехнічних споруд і поруч з прибережною лінією складної геометрії обумовлює проведення чисельного і фізичного моделювання механізмів і процесів вихореутворення, переносу грунту, зміни придонного та прибережного рельєфу та інших гідродинамічних і гідрологічних характеристик. Виникає важливе завдання – визначення впливу загромадження або звуження потоку на гідрологічні характеристики руслових та прибережних течій.

В якості прикладу можливостей швидкого прогнозування поширення можливого локального забруднення в акваторії мілководної Керченської протоки (зі складною береговою лінією, зі зведеною ділянкою дамби біля острова Тузла), розглянуто модельну задачу адвекції виділеної частини рідини в двозв'язаній області з кусково-гладкою межею.

6.2.1. Прогнозування процесу переносу поверхневого забруднення в акваторії Керченської протоки

Модедювання адвекції рідини в морській протоці. Структура і топологія гідродинамічних течій в морських протоках, фіордах і затоках багато в чому залежить від особливостей берегової лінії. Будівництво дамби (2003), що з’єднує Таманський півострів з островом Тузла в Керченській протоці – яскравий приклад техногенного впливу, який викликав глобальну зміну потоку в акваторії всієї протоки. Зростання в швидкості потоку в області фарватеру призводить до небезпечних тенденцій в гідрології Керченської протоки, підвищення небезпеки судноплавства при погіршенні погодних умов. Аварія (11 листопада, 2007) танкера «Волганефть-139» в Керченській протоці призвела до екологічної катастрофи, в результаті якої більш ніж 1300 т. сирої нафти вилилося на поверхню моря.

Як приклад прогнозу поширення локального забруднення в акваторії мілководної Керченської протоки (зі складною береговою лінією, з зведеною ділянкою дамби біля острова Тузла), розглядається модельна задача про адвекцію виділеної рідини в двозв’язній області з кусково-гладкою межею. Висока швидкість потоку ($0.4 - 0.6\frac{\text{м}}{\text{с}}$), мала глибина ($4 - 8$м) і велика річна витрата ($40 - 50\frac{\text{км}^3}{\text{рік}}$) є основними гідрологічними особливостями протоки.

На рис. 6.32 показаний супутниковий знімок Керченської протоки з масштабною лінійкою, вміщеною в нижній частині рисунка.

Рисунок 6.32 – Супутниковий знімок Керченської протоки [260]

Характерними величинами для задачі є: L – характерний розмір перетину протоки, V – характерна швидкість (середня швидкість в поперечному перерізі протоки).

Берегова лінія протоки володіє різкими виступами, на яких формуються великомасштабні вихрові структури: в районі м. Керч, південний край Таманської коси, Західна і Східна краю о. Тузла, західний край зведеної дамби і виступ в південній частині Керченської протоки з боку Керченського півострова [148].

Помістимо в початковий момент на морській поверхні, перед входом до Керченської протоки, пляму забруднення у вигляді кола радіуса $R = 0.4$ с центром в точці з координатами $x_c = 0.0$, $y_c = 2.0$, як показано на рис.6.33, а.

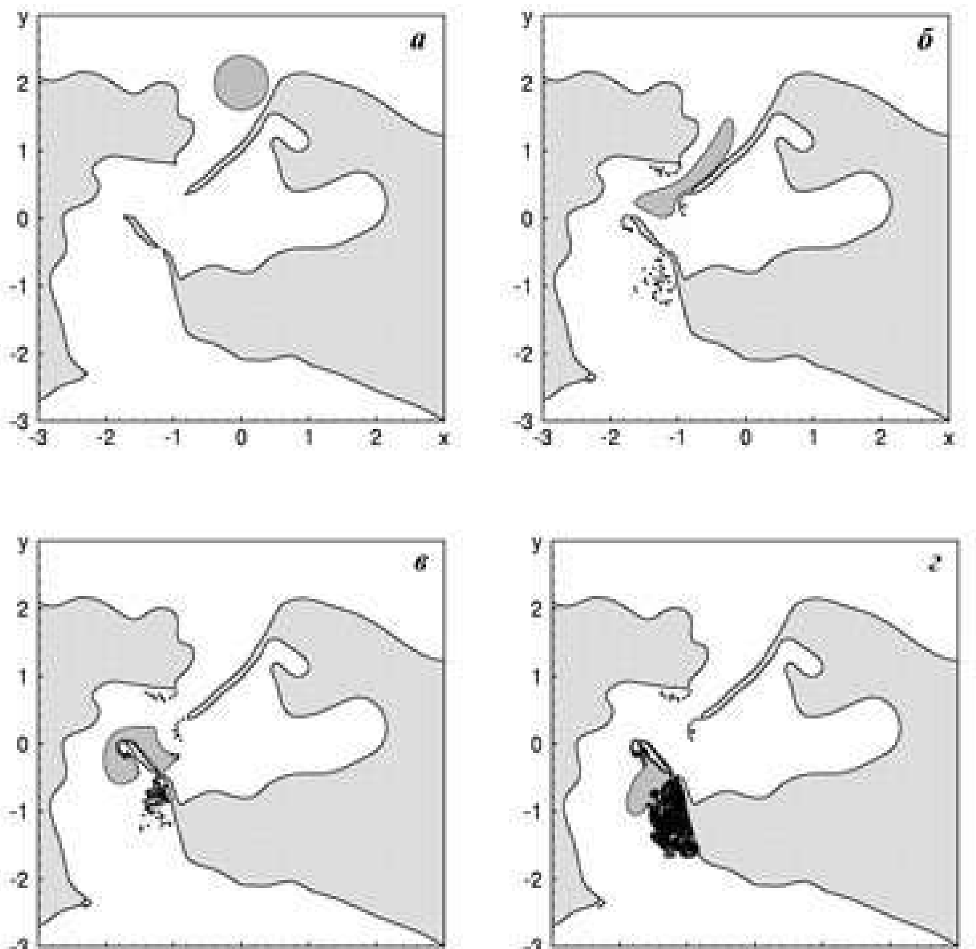


Рисунок 6.33 – Поширення плями забруднення на поверхні Керченської протоки з плином часу:а) $t = 0.0$, б) $t = 1.5$, в) $t = 2.5$, г) $t = 3.5$.

На початковому етапі процесу адвекції виділеної рідини на поверхні протоки відбувається поступове залучення виділеної рідини в основну течію в області фарватеру Керченської протоки. При цьому виділена рідина витягується в напрямку протоки. На виступах берегової лінії утворюється система локалізованих вихрових структур. З плином часу виділена рідина досягає південного краю Таманської коси, витягнувшись в тонку довгу смугу під впливом системи великомасштабних вихорів, що сходять з виступу у м.Керч і південного краю Таманської коси.

Однак наближення виділеної рідини до о.Тузла істотно пригальмовує її просування вздовж Керченської протоки. Близько північного узбережжя о. Тузла починає формуватися каплеподібна область виділеної рідини, яка поступово наближається до острова. Положення виділеної рідини в характерний момент $t = 1.5$ показано на рис. 6.33, б.

Потім виділена рідина починає обтікати о.Тузла. При цьому одна частина проходить між островом і Керченським півостровом, а інша частина направляється уздовж північного берега острова в напрямку до штучно зведеної дамби з боку Таманського півострова. При цьому послідовність великомасштабних вихорів, утворена в протоці, утворює непроникний бар’єр для виділеної рідини. Цей сценарій процесу адвекції триває до моменту $t = 2.5$ (рис. 6.33, в). Виділена рідина розділилася приблизно на дві частини, які обтікають о.Тузла з протилежних сторін. При цьому частина рідини з північного узбережжя острова потрапляє під вплив сильної вихрової течії між о.Тузла і дамбою на Таманському півострові. З плином часу можна чітко помітити регулярну структуру виділеної рідини, яка обігнула о.Тузла із західного боку і хаотичну структуру виділеної рідини, яка протекла між островом і дамбою з боку Таманського півострова. Положення виділеної рідини в момент $t = 3.5$ показано на рис. 6.33, г. Видно, що більша частина виділеної рідини поширюється уздовж південного узбережжя Таманського півострова.

Доцільно зауважити, що було розглянуто модельну задачу про двовимірну адвекцію пасивної домішки морськими течіями з довільними межами. Чисельне розв’язання задачі засноване на методі дискретних особливостей, адаптованому до двовимірних задач адвекції, який дозволяє врахувати відрив великомасштабних вихрових структур при обтіканні виступів берегової лінії морськими течіями.

В якості демонстраційного прикладу розглянуто вирішення задачі про адвекцію пасивної домішки морською течією в протоці, берегова лінія якого представлена в певному масштабі. Чисельне розв’язання задачі не вимагає великих обчислювальних ресурсів і дозволяє в першому наближенні досить швидко отримати попередній прогноз поширення області забруднення, що потрапила на морську поверхню. Відзначимо, що розрахунки, засновані на адаптованому методі дискретних особливостей, проходять в режимі, який значно перевищує режим реального часу. Попередні результати адвекції, отримані зазначеним вище методом, можуть надати істотну допомогу при формуванні рішень по ліквідації наслідків екологічних аварій в безпосередній близькості до берегових ліній на морі і в океані.

Зауваження

Постфактум, розглянуто модельну задачу про двовимірну адвекцію пасивної домішки після реальної катастрофи. Аварія (11 листопада 2007р.) танкера «Волганефть-139» в Керченській протоці, призвела до екологічної катастрофи, в результаті якої понад 1300 тон сирої нафти вилилося на поверхню моря (рис. 6.34). Результати швидкого прогнозування із застосуванням адвекційної моделі наведено на рис. 6.35. При моделюванні враховано вплив вітру та короткотривалі зміни напрямку течії.

Рисунок 6.34 – Космічне фото (TerraSAR-X.16.11.2007).

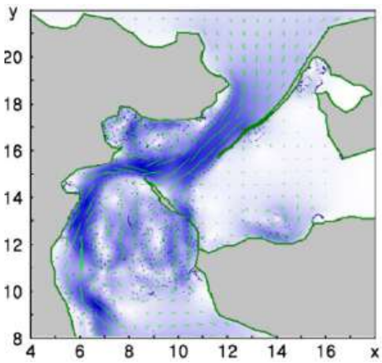


Рисунок 6.35 – Результат прогнозування розповсюдження забруднень через 100 годин.

Результати моделювання демонструють, що завдання початковій локації забруднення при відомому полі течії визначає ареал розповсюдження забруднення в акваторії. Так при існуючій структурі течії в акваторії, велика частина виділеної рідини поширюється уздовж східного узбережжя Криму (рис. 6.34. – рис.6.35.).

Доцільно відзначити, що особливостю моделювання адвекції пасивної домішки в замкненої області зі складною геометрією меж е вимога до гладкості границь.

Так, для двовимірного потенціального руху ідеальної нестисливої рідини всередині каналу, обмеженого непроникними межами складної геометрії (рис. 6.30). Метод дискретних особливостей, адаптований до задач адвекції, дозволяє визначити розподіл функції потоку $\Psi(x, y, t)$ течії для заданої геометрії каналу і профілю швидкості $U_1(s, t)$ течії (де s – лінія що Для отримання розв'язку задачі було необхідно визначити розподіл поля швидкості $U[U(x, y, t), V(x, y, t)]$ в течії, яка аналізується.

Гідродинамічна задача може бути розв'язною в термінах функції течії $\Psi(x, y, t)$. Оскільки лінія течії постійного значення є кривою, уздовж якої нормальна компонента швидкості дорівнює нулю, то граничні умови на обмежуючих поверхнях каналу (x_c, y_c) можна записати на кожній з поверхонь у вигляді

$$\Psi|_{(x_c, y_c)} = const. \tag{6.3}$$

Відомо, що розподіл функції потоку в двомірному випадку пов'язаний з розподілом компонент поля швидкості виразами

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{6.4}$$

В цьому випадку, при проведенні обчислень, зручно прийняти значення функції течії на одній з берегових ліній каналу $\Psi_0 = 0$. Тоді значення функції течії на інших обмежуючих поверхнях каналу визначається інтегралом

$$\Psi_\alpha = \int_{C_\alpha} U_\alpha(s) ds + \Psi_0, \tag{6.5}$$

де C_α – лінія, яка з'єднує границю 0 з границею α, а $U(s)$ – профіль компоненти поля швидкості течії в напрямку, перпендикуляром до лінії s в поточній точці (рис. 9.5). Фактично, інтеграл в правій частині виразу (9.8) є поверхневою витратою рідини $Q(t)$, що протікає між межами каналу.

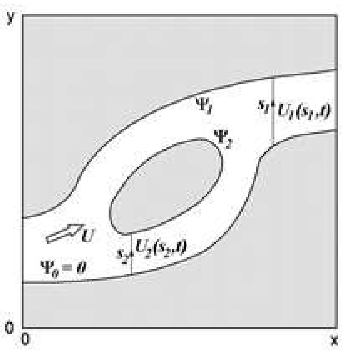


Рисунок 6.36 – Приклад геометрії каналу

Для просторової фіксації лінії потоку, що збігаються з межею каналу, метод дискретних особливостей передбачає введення в розрахункову схему системи точок колокацій і фіксованих точкових вихорів. Точки колокацій розташовуються уздовж межі на деякій відстані Δ_i ($i = 1,2,\dots,N$), де N – загальне число точок колокацій в даній системі) один щодо одного, яке визначається точність дискретизації границь каналу. Велика кількість точок колокацій дозволяє більш точно сформувати границю течії. При цьому ті сегменти кордону течії, які мають малий локальний радіус кривизни, повинні містити більшу кількість точок колокацій в порівнянні з сегментами границь з великим локальним радіусом кривизни границь.

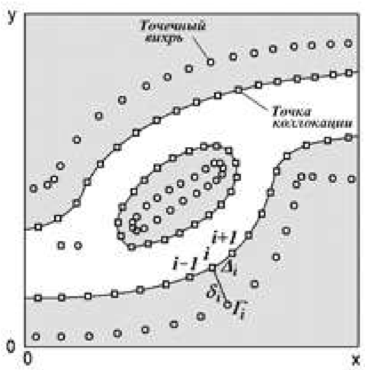


Рисунок 6.37 – Приклад апроксимації системою точок колокацій і фіксованих точкових вихорів граніць акваторії

Досвід проведення дискретизації берегової лінії морських течій показує, що недотримання цих рекомендацій може призвести або до істотної деформації фіксованої лінії потоку між точками коллокацій (це в кінцевому підсумку може призвести до потоку рідини через границю течії), або високої обумовленості фінальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (чисельне розв’язування таких систем рівнянь може привести до помилок в розв’язку, що в кінцевому підсумку може також призвести до проникнення рідини через границю течії). Приклад розташування точок колокацій для двомірного каналу з перешкодою показаний на рис. 6.37.

Система фіксованих точкових вихорів, розташованих близько до точок колокацій, наводить поле функції потоку, яке описує течію всередині каналу. Слідуючи рекомендаціям, кожен точковий вихор повинен розташовуватися на відстані δ_i на перпендикулярі до дотичної, проведеної до границі течії в точці колокації. При цьому рекомендується дотримуватися умови

$$\delta_i > \Delta_i,$$

де Δ_i – відстань між поточною і попередньої точками коллокацій [104]. Зазвичай приймають $\delta_i = (1.0 \dots 1.5)\Delta_i$. Рис. 6.37 ілюструє розташування системи фіксованих точкових вихорів в розглянутому прикладі на рис. 6.36 Кількість точок колокацій і кількість фіксованих точкових вихорів в методі дискретних особливостей, адаптованому до задачі переносу виділеної рідини, повинні збігатися.

Функція потоку, наведена системою точкових вихорів з інтенсивностями Γ_i, розташованими в точках з координатами (x_i, y_i), визначається виразом

$$\Psi(x, y) = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \ln[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2], \qquad (6.6)$$

яке є сумою внесків кожного точкового вихору в розглянуту точку течії.

Умова рівності значень функції потоку в точках коллокацій на кожній границі розглянутої течії дозволяє сформувати на основі (6.6) систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих інтенсивностей Γ_i системи фіксованих точкових вихорів. Отримана система рівнянь може бути записана у вигляді

$$\Gamma_i \ln[(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2] = -4\pi\Psi(x_j, y_j), j = 1,2, \dots, N. \qquad (6.7)$$

У цьому випадку розподіл функції потоку в течії буде визначатися сумою (6.6), а компоненти швидкості течії можна визначити диференціюванням цього рівняння за просторовими координатами відповідно до (6.4).

Отже, компоненти поля швидкості течії в точці (x, y) будуть визначатися виразами

$$U(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \frac{y-y_i}{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2},$$
$$V(x,y) = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \frac{x-x_i}{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2}, \qquad (6.8)$$

які враховують внесок всіх фіксованих точкових вихорів.

6.2.2. Прогнозування процесу переносу поверхневого забруднення в акваторії навколо о. Боронхольм

Приклад моделювання адвекції пасивної домішки в відкритої області зі складною геометрією меж. Прогнозування процесу переносу поверхневого забруднення в акваторії навколо о. Боронхольм. Розглядається процес адвекції забруднення, яке потрапило на поверхню Балтійського моря в результаті зіткнення в 31 травня 2003 року (12h18 local time (UTC +2)) китайського суховантажу Fu Shan Hai і кіпрського контейнеровоза Gdynia біля острова Борнхольм (55° 21.0’ N - 014° 44.6 ’E). У 20h49 local time китайське судно затонуло (рис.7). При цьому 1200т масла і палива потрапила на поверхню моря [107, 110]. У момент зіткнення стояла ясна погода, мав місце слабкий вітер WSW 6 m/s.

Рисунок 6.38 – Занурення китайського суховантажу Fu Shan Hai після зіткнення з кіпрським контейнеровозом Gdynia біля острову Борнхольм в Балтійському морі [110]

На наступний день (1 червня) вранці подув західний вітер, який почав зносити пляму забруднень на поверхні моря в сторону Швеції. Увечері 2 червня берегові служби Швеції зареєстрували забруднення в безпосередній близькості до берегової лінії. У ніч на 4 червня вітер посилився, але при цьому змінив свій напрямок на NE. Це призвело до віддалення плями забруднень від берегів Швеції в північно-східному напрямку. Опівдні 5 червня помірний вітер став дути в східному напрямку і пляма, минувши північну частину острова Борнхольм, стала дрейфувати до східного узбережжя південної частини Балтійського моря. Деякі подробиці поширення забруднень після зіткнення суден можна знайти в [107, 110].

Балтійське море є внутрішнім морем з площею (без островів) 415 тис. $км^2$ і середньою глибиною 51 м. У західній частині моря є кілька Датських проток, які з’єднуються з Серенним морем. Датські протоки є системою проток між Скандинавським півостровом і Ютландським півостровом, які включають протоки Малий Бельт (мінімальна ширина протоки ≈ 0.5 км), Великий Бельт (≈ 3.7 км), Ересунн (≈ 10.5 км) та інші. Півдобові припливи в Балтійському морі піднімають рівень моря в середньому на 20 см.

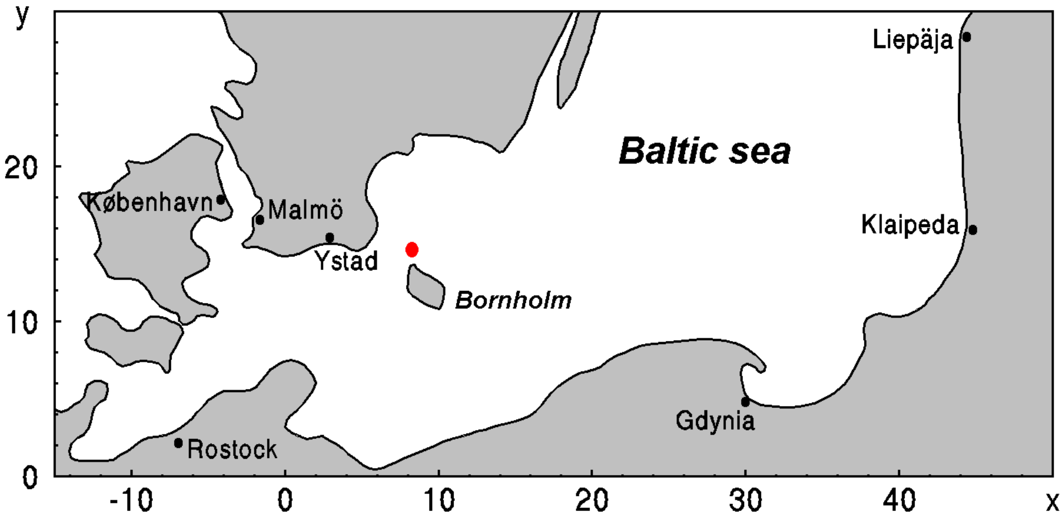


Рисунок 6.39 – Схема південної частини Балтійського моря с нанесеною масштабною сіткою

Надалі завдання адвекції пасивного забруднення на поверхні Балтійського моря зручно пронормувати на характерний геометричний розмір $L_0 = 10$ км і характерний часовий масштаб $T_0 = 3$ ч. В цьому випадку всі швидкості будуть віднесені до величини $\frac{L_0}{T_0}$, а значення функції потоку і поля завихреності будуть пронормовані на величину $\frac{L_0^2}{T_0}$. Схема південної частини Балтійського моря, виконана з масштабі L_0, представлена на рис.6.39 в якій використовувалося $N = 595$ точок колокацій. У центральній частині схеми розташований острів Борнхольм. Місце аварії на рисунку позначено червоним круглими маркерами.

Беручи до уваги середню висоту півдобового припливу в Балтійському морі і геометрію проток в західній частині Балтійського моря, можна оцінити значення нормованих функцій потоку на берегових лініях південній частині моря. Якщо прийняти на материковій береговій лінії $\Psi_0 = 0.0$, тоді в момент максимальної швидкості припливної течії через Датські протоки значення функції потоку дорівнюватимуть: $\Psi_0 \approx 0.35$ (Скандинавський півострів), $\Psi_0 \approx 0.27$ (острів Борнхольм), $\Psi_0 \approx 0.33$ (острів Оланд (Öland - GA)), $\Psi_0 \approx 0.27$ (острів Зеландія (Zealand - GA)), $\Psi_0 \approx 0.27$ (острів Лолланн (Lolland - GA)).

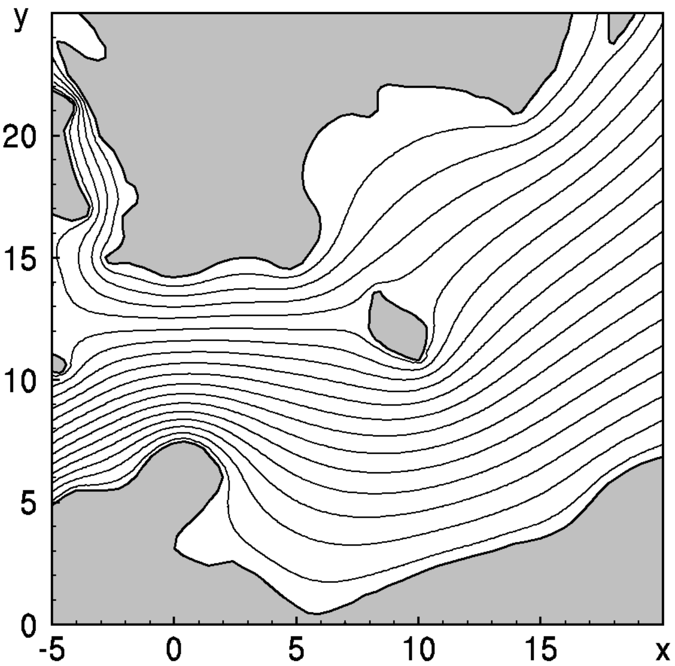


Рисунок 6.40 – Розподіл функції течії під дією припливу

Розподіл функції потоку $\Psi(x, y)$ на поверхні моря в області, прилеглій до острова Борнхольм, показано на рис. 6.40, на якому нанесено сімейство ліній потоку з кроком $\Delta\Psi = 0.02$. На рис. 6.40 показані розподілу функції потоку $\Psi(x, y)$, наведеної вітром зі швидкістю $U_f = 0.1$ для різних напрямків вітру при відсутності припливної течії. На всіх рисунках нанесено сімейство ліній течії з кроком $\Delta\Psi = 0.2$. У випадку східного вітру ($\alpha = 0°$) течія формує циркуляційну область на південь від острова Борнхольм (рис.6.41, а). Циркуляційна зона примикає до материкового узбережжя.

Для вітру з $\alpha = 30°$ циркуляційна зона збільшується в розмірах і зміщується вздовж південної берегової лінії (рис.6.41, b). При цьому формуються дві нові циркуляційні зони біля берегової лінії Швеції. Зі збільшенням α циркуляційна зона, прилегла до датського узбережжя, збільшується в розмірах і займає, фактично, всю західну частину Балтійського моря (рис.6.41, c). При північно-західному вітрі вона зміщується вздовж південного узбережжя моря. Характерний випадок при $\alpha = 120°$ показаний на рис.6.41, d. Зазначимо, що у всіх випадках через острів Борнхольм проходить сепаратриса, яка розділяє циркуляційні зони даної течії.

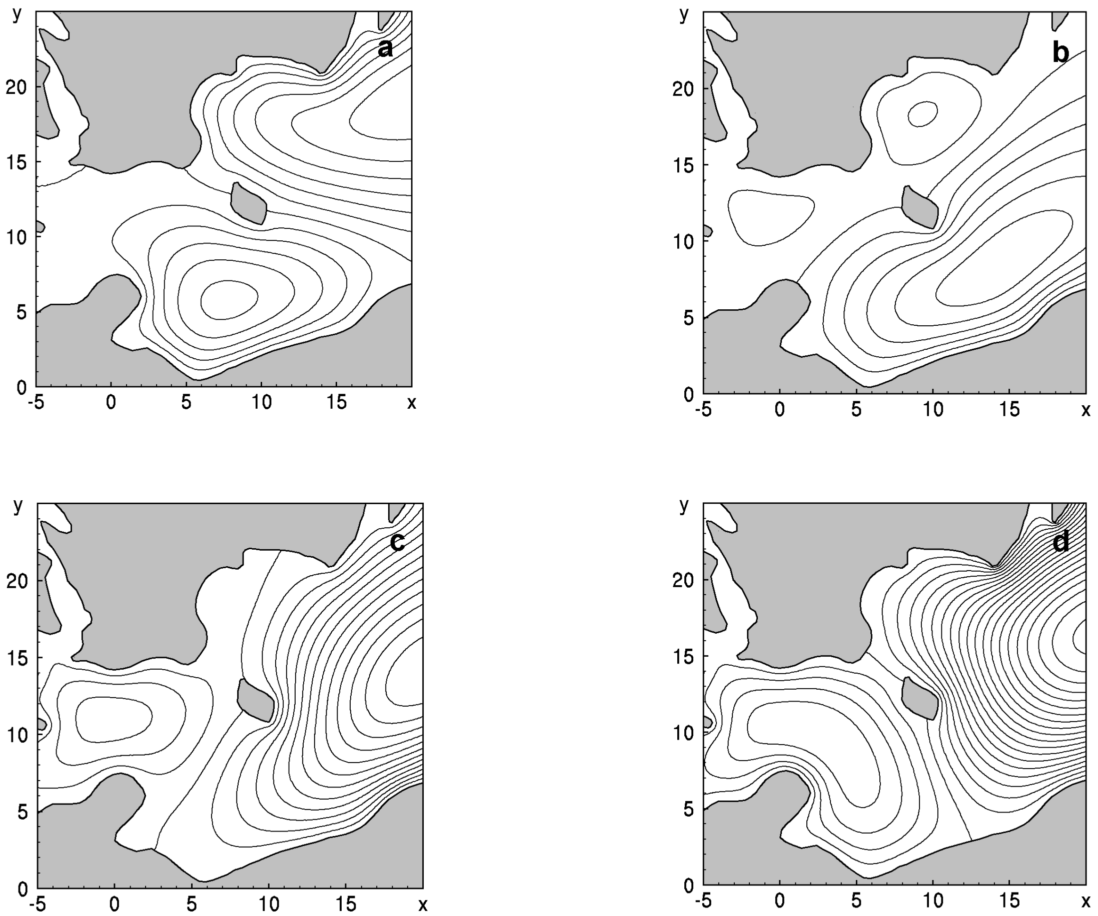


Рисунок 6.41 – Розподіл функції течії, наведена вітром зі швидкістю U_f= 0.1 за напрямками: a) α=0 o, b) α=30 o, c) α=60 o, d) α=120 o

Не дивлячись на те, що приливна течія в Балтійському морі формує поле швидкості, модуль якого істотно нижчий модуля швидкості течії, наведеного помірним вітром, приливна течія надає певний вплив на стан сепаратриси в течії.

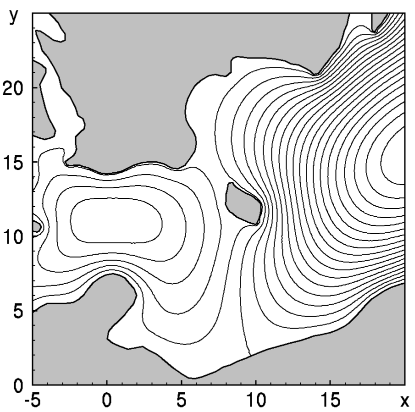


Рисунок 6.42 – Розподіл функції течії під дією приливу і вітру для випадку рис. 9.33, d

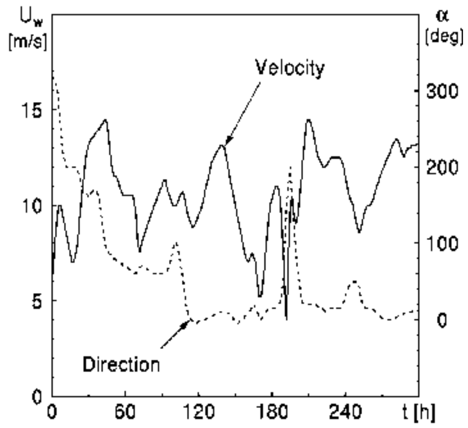


Рисунок 6.43 – Швидкість і напрям вітру в районі зіткнення кораблів

На рис. 6.42 показано розподіл функції течії, аналогічно розподілу на рис.6.41, d, на який накладено приливну течію. Видно, що сепаратриса змістилася на східне узбережжя острова Борнхольм. Таким чином, острів Борнхольм є розділовим бар’єром для пасивної домішки на морській поверхні при різних напрямках вітру.

Протягом декількох днів після зіткнення кораблів, над Балтійським морем проходила система атмосферних циклонів, які викликали в області, прилеглій до острова Борнхольм, нестійкий вітер. Протягом найближчих декількох днів вітер міняв як свій напрямок, так і швидкість. Аналіз даних (KTH Royal Institute of Technology, Stokholm, Sweden) даних спостережень [281] дозволив побудувати усереднені значення швидкості вітру і його напрямку (напрямок $\alpha = 0°$ прийнято за східний вітер), які показані на малюнку 6.43. Видно, що в перші дні після аварії вітер міняв свій напрям від східного до західного і на п'ятий день прийняв знову східний напрямок. Сила вітру змінювалася в діапазоні від слабкої (приблизно 3-5 м/с) до помірного (10-15 м/с).

Результати чисельного моделювання процесу переносу забруднень на поверхні Балтійського моря показані на рис. 6.44 та рис. 6.45, виконані в нормованій системі координат, позначеній на рисунку 6.39. Початкове положення забруднення ($t = 0.0$) показано на рисунку 6.44, а. У цей момент дме слабкий SE вітер, який зносить поверхневе забруднення в напрямку північно-східного узбережжя острова Борнхольм. Поверхневе забруднення витягується в тонку смугу (рис. 6.44, б). У момент часу $t = 1.0$ вітер починає змінювати свій напрямок на S, а потім і на W. Це призводить до дрейфу смуги забруднення в західному напрямку. Положення забруднення в момент $t = 6.0$ показано на рис. 6.44, с.

Подальше посилення вітру до помірного призводить до зміщення забруднення в напрямку берегової лінії Швеції. Малюнок 6.44, d ілюструє стан поверхневого забруднення в момент $t = 14.0$. З плином часу швидкість вітру падає до слабкого, однак до моменту часу $t = 22.0$ виділена рідина поверхневого забруднення сягає берегів Скандинавії (рис. 6.44, е). У цей момент атмосферний циклон над Балтійським морем призводить до посилення вітру і зміни його напряму на NE. Забруднення починає дрейфувати в північно-східному напрямку, при цьому частина забруднення продовжує рухатися по сепаратрисі функції потоку (див.рис. 6.42) і досягає берегової лінії Швеції [381]. Положення забруднення в момент часу $t = 35.0$ показано на рис. 6.44, е.

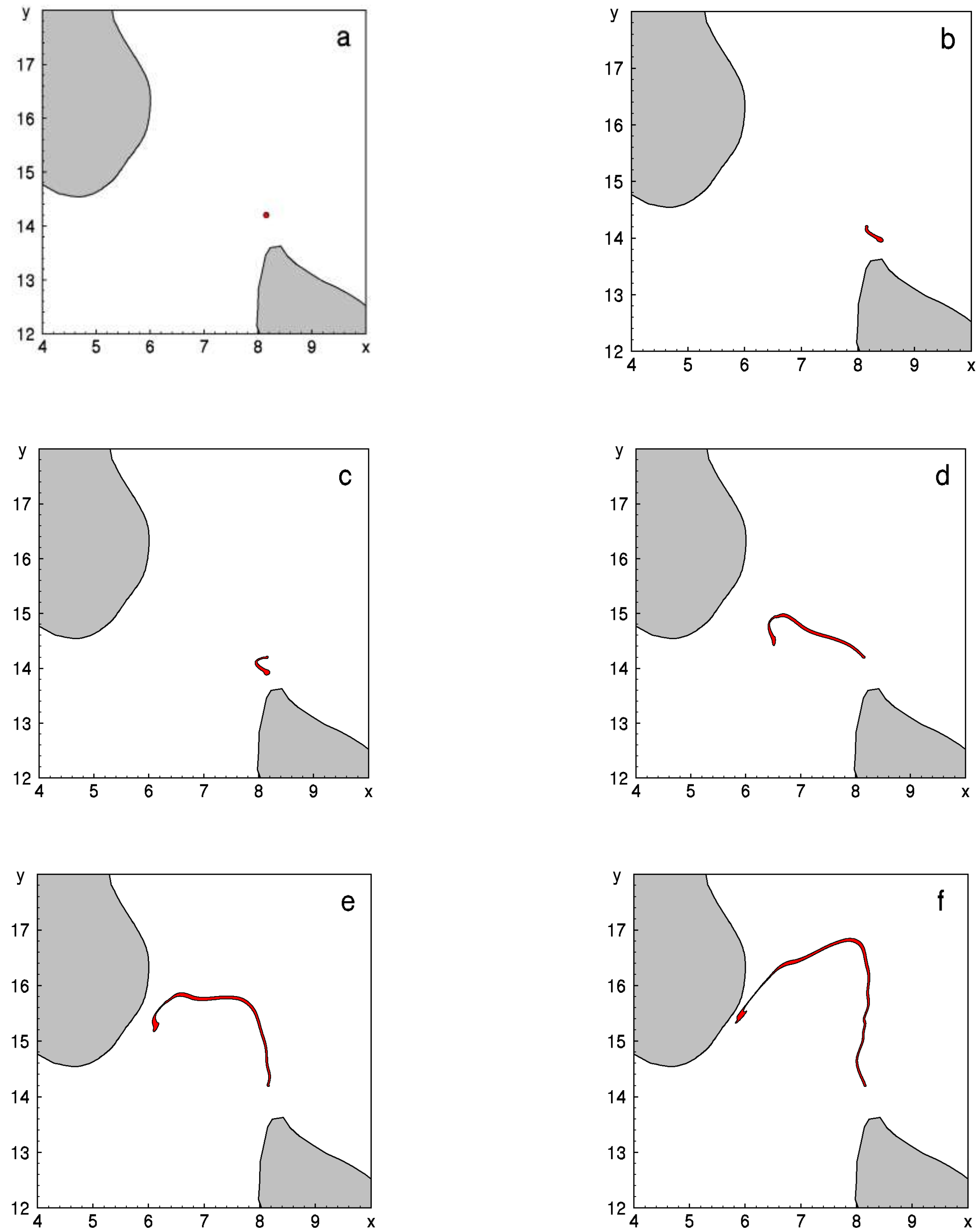
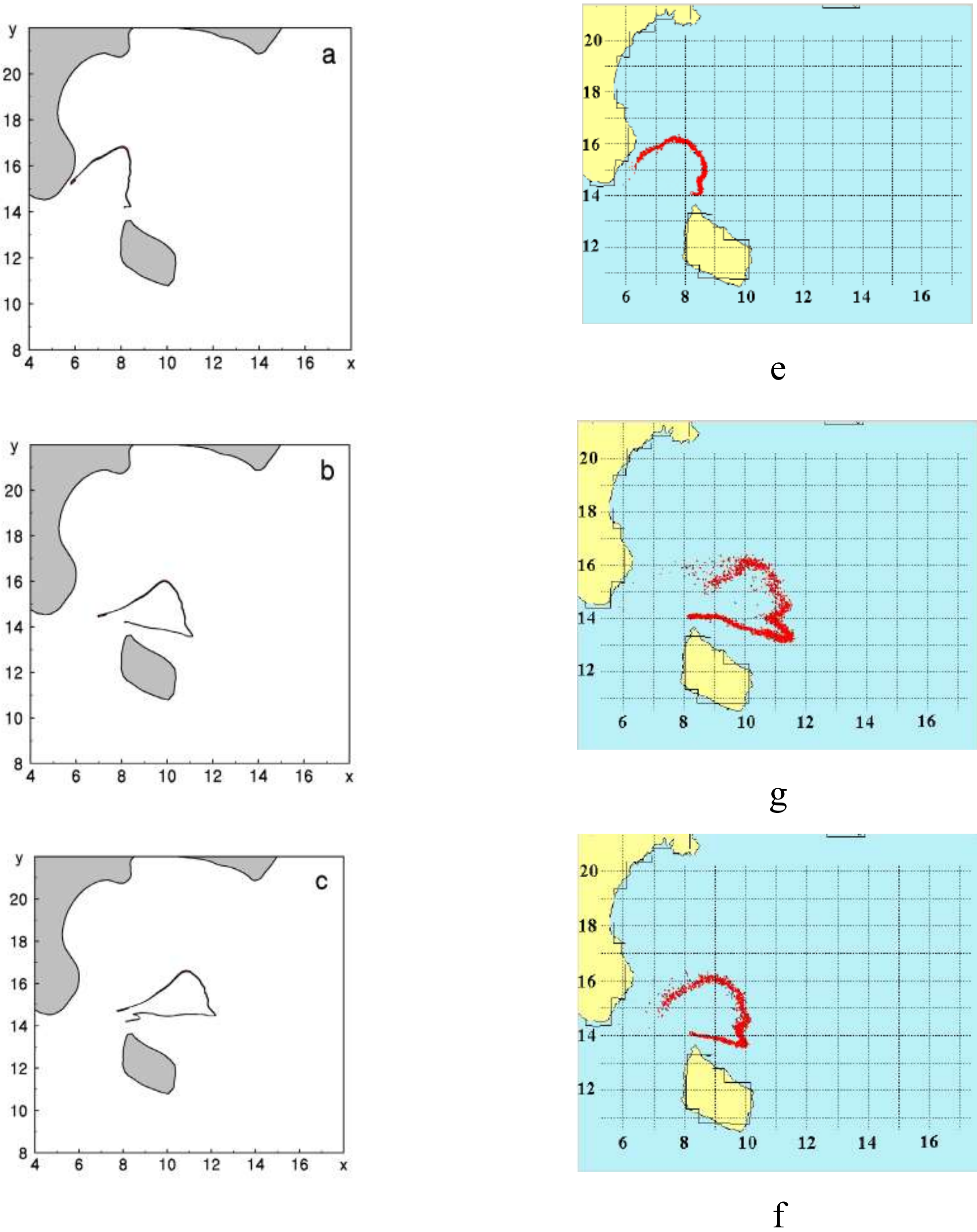
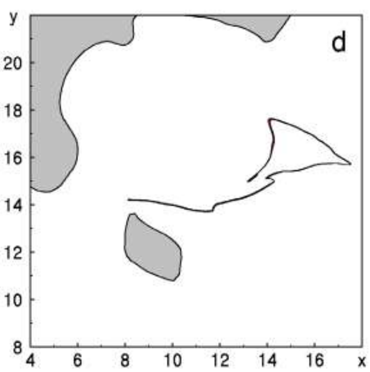
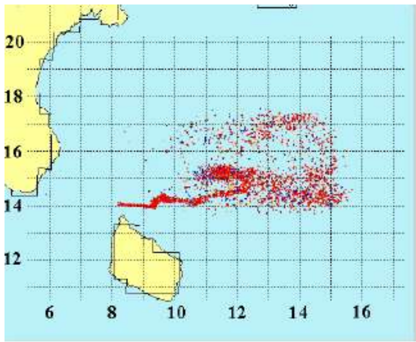


Рисунок 6.44 – Початкова стадія адвекції забрудення на поверхні моря:
a) t = 0.0, b) t = 1.0, c) t = 6.0, d) t = 14.0, e) t = 22.0, f) t = 35.0

Протягом $t \approx 30.0 \dots 35.0$ вітер поступово посилюється до помірного і змінює свій напрямок на W. Це призводить до віддалення забруднення від берегової лінії Швеції в сторону південній частині Балтійського моря. Напрямок вітру можна оцінити по зсуву забруднення в області, прилеглій до точки зіткнення кораблів (рис. 6.45, а). На рисунку 6.45, b показано положення забруднення в момент часу $t = 46.0$.







h

Рисунок 6.45 – Фінанльна стадія адвекції забрудення на поверхні моря:

a) t = 38.0, b) t = 46.0, c) t = 60.0, d) t = 100.0

Порівняння (a-d) з прогнозуванням масопереносу (g-h), Данні KTH Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.

До моменту часу $t = 60.0$ східний вітер змінює свій напрямок спочатку на NE, потім знову на W. Забруднення, яке продовжує надходити на поверхню моря, формує характерну петлю (рис. 6.45, з) і потім знову починає зміщуватися в східному напрямку. На фінальній частині розглянутого часового інтервалу (рис. 6.44) вітер посилюється до помірного, поверхневе забруднення продовжує зміщуватися в східному напрямку. Положення забруднення в момент часу t = 100.0 показано на рисунку 6.45 d. Видно, що поверхневе забруднення заповнило велику область в північно-східній частині Балтійського моря по відношенню до острова Борнхольм.

Моделювання було зведено до двовимірної задачі адвекції виділеної рідини (забруднення) на морській поверхні в наближенні ідеальної нестисливої рідини. Вихідними даними до складання прогнозу є час і місце аварії, гідрологічна обстановка (наявність глобальних течій, приливних течій та інше) в області, прилеглій до аварії і оцінка тривалості витікання забруднення на морську поверхню (тривалість роботи джерела забруднення).

Для проведення моделювання необхідно знати прогноз напрямку і швидкості вітру на період проведення моделювання поширення в течії.

Розв'язок задачі зводиться до спільного розв'язання гідродинамічної задачі, результатом якої є розподіл поля швидкості в області, прилеглої до місця аварії, і задачі адвекції, за результатами якої визначається положення забруднення для поточного моменту часу.

Гідродинамічна задача розв'язана чисельно з використанням методу дискретних особливостей, адаптованого до задач адвекції. Метод передбачає попередню дискретизацию берегової лінії, яка пов'язана з установкою системи точок колокацій, розташованих на берегових лініях течії, і системи фіксованих точкових вихорів, зміщених щодо берега вглиб материка або островів. Умова рівності значень функції потоку на кожній береговій лінії дозволяє сформувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо інтенсивності фіксованих точкових вихорів, сумарний внесок яких дозволяє визначити значення функції потоку в довільній точці розрахункової області течії.

Вплив вітрового навантаження моделюється системою вортонів над поверхнею течії (рис. 2.13) з векторами завихренности, орієнтованими вертикально для кожного вортона. Інтенсивності вортонів і їх просторова орієнтація дозволяють взяти до уваги поправку до значення поля швидкості течії, викликану нестаціонарним вітровим навантаженням над морською поверхнею.

Форма області забруднення описується системою точок (пасивних маркерів), впорядковане з'єднання яких формує границі забруднення. Рух маркерів описує еволюцію забруднення на морській поверхні з плином часу. Виділення гладких відрізків границі забруднення дозволяє сформувати процедуру додавання маркерів в області сильного розтягування сегментів границі в залежності від кількості маркерів, що утворюють сегмент.

В роботі наведено демонстраційний приклад адвекції забруднення, що з'явилось на морській поверхні в результаті зіткнення 31 травня 2003 року китайського суховантажу Fu Shan Hai і кіпрського контейнеровоза Gdynia біля острова Борнхольм в Балтійському морі. Показано, що забруднення досягло берегової лінії Швеції за три доби при помірному західному - північно-західному вітрі. Протягом наступних трьох днів помірний східний вітер перемістив забруднення назад, в північну частину острова Борнхольм. Дослідження показали, що острів Борнхольм є розділовим бар'єром для пасивної домішки на морській поверхні при різних напрямках вітру.

Чисельне моделювання поширення забруднення на морській поверхні може бути проведено на персональному комп'ютері і не вимагає істотних обчислювальних ресурсів. Зокрема, розрахунки демонстраційного прикладу, розглянутого в роботі, були проведені на персональному комп'ютері (AMD Athlon XP 1900+, 1.6 GHz, 2GB) в режимі, що випереджає реальний час. Загальна тривалість обчислень склала приблизно 1 годину.

6.2.3. Прогнозування процесу переносу поверхневого забруднювача в акваторії Дніпровсько-Бузького лиману

Як приклад складання прогнозу розглянемо можливий випадок викиду поверхневого забруднення в Дніпровсько-Бузькому лимані (Дніпровська затока), в який впадають Дніпро і Південний Буг. Схема затоки показана на рис. 6.46, який виконаний в масштабі $L_0 = 5.0$ км. В ролі тимчасового масштабу вибираємо значення $T_0 = 1.0$ година.

Рисунок 6.46 – Карта Дніпровського затоки, сформованого гирлами р.Дніпро і р.Південний Буг

Річка Дніпро є однією з повноводних річок східної Європи із середньорічною витратою 1700 м ^{3}/с в гирлі річки. Середня швидкість течії в гирлі річки становить 0.6...0.7 м/с при ширині гирла порядку 4.0...5.0 км. Річка Південний Буг – одна з великих річок України з середньою витратою води близько 160 м ^{3}/с в гирлі із середньою швидкістю течії 0.4...0.5 м/с. Дніпровсько-Бузький лиман є водойма довжиною близько 35...40 км і шириною близько 5...10 км. У східну частину лиману впадає Дніпро (в південну частину лиману, з боку Кримського півострова), а в середню частину (з боку континентальної України) впадає р. Південний Буг. Вихід Дніпровсько-Бузького лиману в Чорне море являє собою вузьку протоку, утворену виступом (з боку м. Очаків) і Кінбурнської коси (з боку півострова Крим).

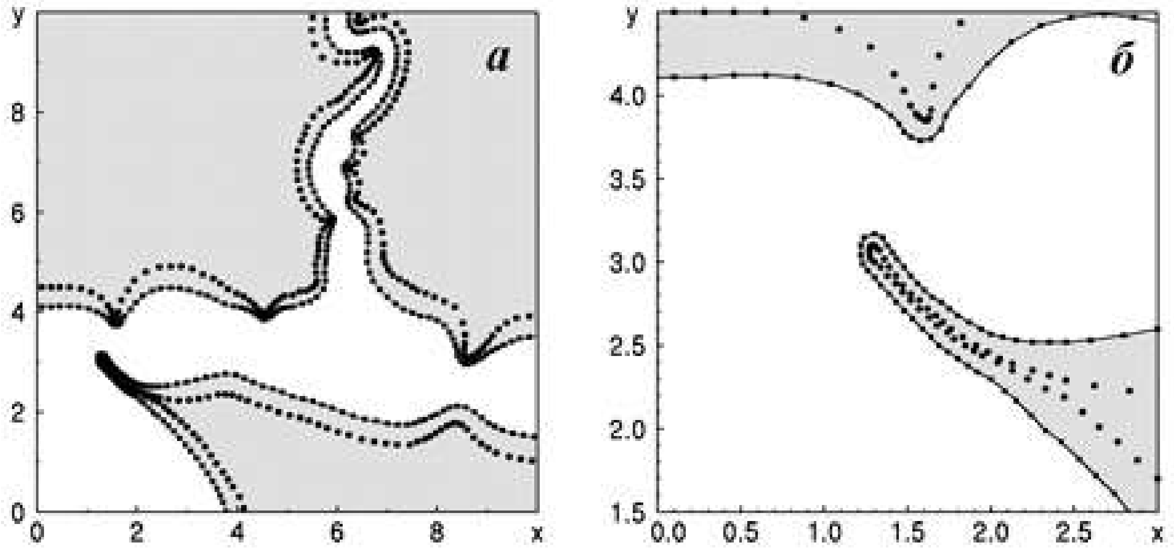


Рисунок 6.47 – Просторове положення системи точок колокацій і фіксованих точкових вихорів: а – розрахункова область течії, б – гирло Дніпровсько-Бузького лиману

На рис. 6.47 показані результати оцифровки берегової лінії Дніпровсько-Бузького лиману в розрахунковій області. Квадратними маркерами на малюнку показана система точок колокацій, а суцільними круглими маркераме нанесено систему фіксованих точкових вихорів. На процедуру оцифровки було використано $N = 369$ точок колокацій із середнєю відстанню між точками $\Delta_i = 0.15$. Точки колокації на ділянках берегової лінії зі складною геометрією розташовуються на меншій відстані одна від одної. Приклад оцифровки в методі дискретних особливостей, адаптований до задач адвекції рідини, на Кінбурнській косі в гирлі Дніпровсько-Бузького лиману показаний на рис. 6.47, б.

Аналіз чисельних значень середніх швидкостей течій в гирлах р. Дніпро і р. Південний Буг дозволяє визначити різницю значень функції потоку на берегових лініях річок. Якщо прийняти на південному кордоні р. Дніпро значення $\Psi_0 = 0.0$, то на північному кордоні річки значення функції потоку з урахуванням напрямку течії дорівнює $\Psi_1 \approx -0.45$. Аналогічний аналіз гідрологічних параметрів р. Південний Буг дозволяє визначити різницю значень функції потоку на західному і східному березі цієї річки. Оскільки р. Південний Буг тече в південному напрямку, на західному березі річки приймаємо $\Psi_2 \approx -0.55$.

Розподіл функції течії в Дніпровсько-Бузькому лимані в штиль (при відсутності вітру) показано на рис. 6.48, на якому нанесено сімейство ліній потоку з еквідистантним кроком $\Delta\Psi = 0.05$. Видно, що інтенсивний водний потік р. Дніпро займає південну частину лиману, а води р. Південний Буг протікають в північній його частині. Потік всередині Дніпровсько-Бузького лиману має сепаратрису, що розділяє водні потоки річок. Відзначимо, що вона підходить до берегової лінії в точку, розташовану на південь від гирла р. Південний Буг, на східному березі. Оскільки рідина при стаціонарній течії не перетинає лінії потоку, сепаратриса показує в яку область лиману може зайняти забруднення, яке потрапило в початковий момент в води р. Дніпро або р. Південний Буг. Видно, що поверхневе забруднення з р. Південний Буг може покрити тільки тонку берегову зону лиману вздовж континентальної України, в той час як забруднення з р. Дніпро може зайняти практично всю акваторію Дніпровсько-Бузького лиману.

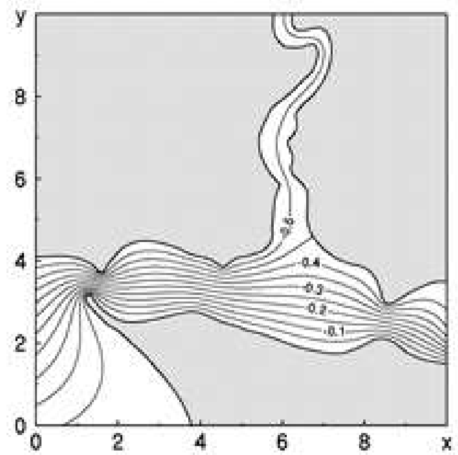
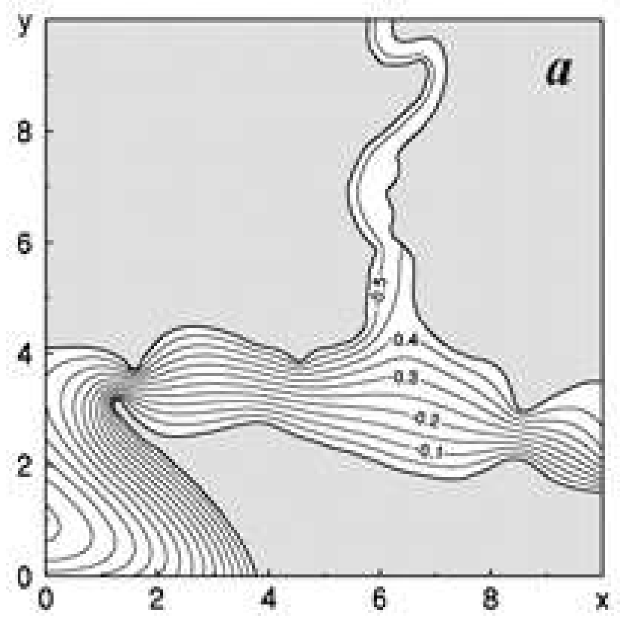


Рисунок 6.48 – Розподіл функції потоку в Дніпровсько-Бузькому лимані при відсутності вітру

Наявність вітру змінює структуру поверхневої течії в Дніпровсько-Бузькому лимані. На рис. 6.49 виконаних в стилі, аналогічному з рис. 6.48 показано розподіл поля функції течії при вітру інтенсивністю $U_w = 15.0$ м / с в різних напрямках. Така швидкість вітру відповідає помірному вітру силою 4 бали за шкалою Бофорта. У розрахунках положення базової точки (аналог точки A на рис. 2.13) було вибрано в середній частині Дніпровсько-Бузького лиману: $x_A = 5.0$, $y_A = 3.0$. Над цією точкою була розміщена система вортонів: $a = 30.0$, $b = 25.0$, $K = 20$, $h = 10.0$.

При західному вітрі ($\alpha = 0°$) поверхнева течія сповільнюється, при цьому сепаратриса зміщується вгору за течією р. Південний Буг (рис. 6.49, а). Велика частина вод лиману рухається уздовж Кримського півострова через геометрію Кінбурнської коси при даному напрямку вітру.



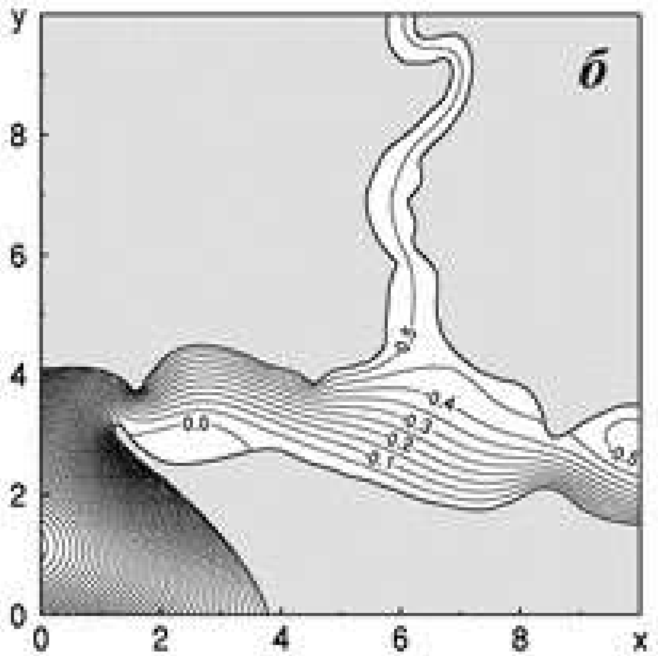


Рисунок 6.49 – Розподіл функції потоку в Дніпровсько-Бузькому лимані для помірного вітру ($U_w = 15.0\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$) при: а – $\alpha = 0°$ (західний вітер), б – $\alpha = 90°$ (північний вітер)

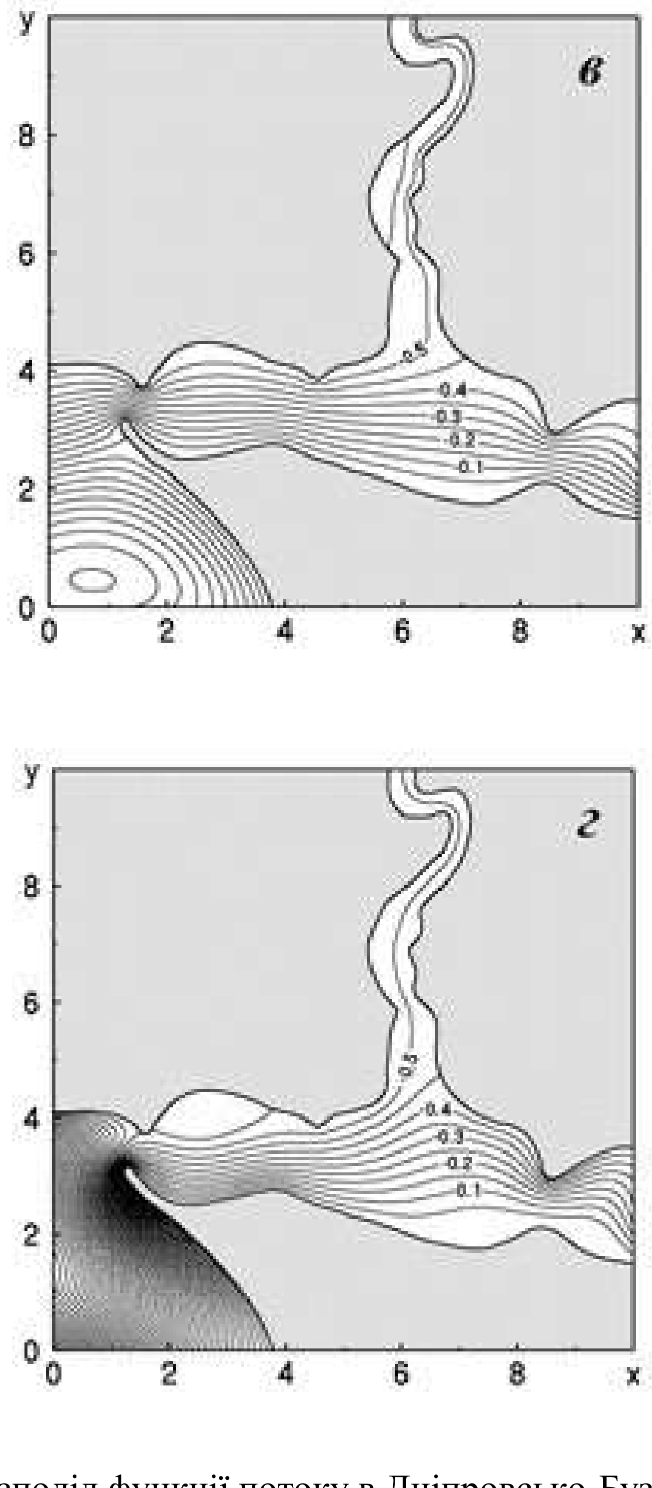


Рисунок 6.49 – Розподіл функції потоку в Дніпровсько-Бузькому лимані для помірного вітру ($U_w = 15.0 \frac{м}{с}$) при: в – $\alpha = 180°$ (східний вітер), г – $\alpha = 270°$ (південний вітер)

У випадку північного вітру ($\alpha = 90°$) сепаратриса, що розділяє води р. Дніпро і р. Південний Буг, зміщується в бік гирла Дніпра (рис. 6.40, б), при цьому частина вод р. Південний Буг потрапляє на північно-східне узбережжя Дніпровсько-Бузького лиману. Цікаво відзначити, що північний вітер сприяє утворенню циркуляційних зон. Наприклад, в гирлі Дніпра дія сильної течії (уздовж кримського узбережжя) і північного вітру сформували циркуляційну зону, в якій рідина рухається по замкнутих траєкторіях. Характерною особливістю цієї течії є суттєво низькі швидкості поверхневої течії в порівнянні зі швидкістю течії Дніпра. Другою відмітною особливістю поверхневої течії в Дніпровсько-Бузькому лимані є утворення циркуляційної зони на східному узбережжі Кінбурнської коси. Дослідження показують, що утворення цієї циркуляційної зони течії викликано не тільки впливом вітру, але і геометрією коси і відносним прискоренням течії в середній частині лиману. Аналіз кількісних даних показує, що швидкість течії в цій циркуляційній зоні на порядок менша в порівнянні з основною течією Дніпровсько-Бузького лиману в західному напрямку.

Рис. 6.49, в ілюструє розподіл поля функції течії у випадку східного вітру ($\alpha = 180°$) помірної сили. Порівняння цього малюнка з рис. 6.48 показує, що структура поверхневої течії Дніпровсько-Бузького лиману має мало відмінностей в порівнянні з течією в безвітряну погоду. Деякі відмінності можна помітити на виході з лиману, в акваторії Чорного моря. Спільна дія східного вітру і основної течії лиману призводять в формуванню інтенсивної течії вздовж берегової лінії континентальної України. Відзначимо, що дія східного вітру так само сприяє формуванню циркуляційних зон. В даному випадку вона має місце в нижній течії р. Південний Буг (вище с. Парутине). За аналогією з іншими випадками, в цій області рідина рухається по замкнутих траєкторіях зі швидкостями, значно меншими в порівнянні з основною течією річки.

Аналіз чисельних результатів показує, що дія південного вітру ($\alpha = 270°$) помірної сили призводить до загального зміщення вод р. Дніпро в північному напрямку (рис. 6.49, г). При цьому сепаратриса, що розділяє води річок, не зміщується далеко проти течії р. Південний Буг в порівнянні з випадком на рис. 6.49, а. Однак, вплив південного вітру, інерційних властивостей основного водного потоку і геометрії берегової лінії Дніпровсько-Бузького лиману близько м. Очаків призводить до формування досить великої циркуляційної зони вздовж узбережжя континентальної України.

Тепер розглянемо процес адвекції забруднення в акваторії Дніпровсько-Бузького лиману в разі відсутності вітру. Нехай в початковий момент забруднення надходить на водну поверхню в точці $(x_c, y_c) = (9.75, 2.95)$ і займає коло радіуса $R_c = 0.2$ (рис. 6.50, а). Ця точка розташована в гирлі Дніпра з боку м. Херсон. Надалі будемо вважати, що в кругову область радіуса $\frac{R_c}{2}$ з центром в точці з координатами (x_c, y_c) надходять забруднення з постійною швидкістю.

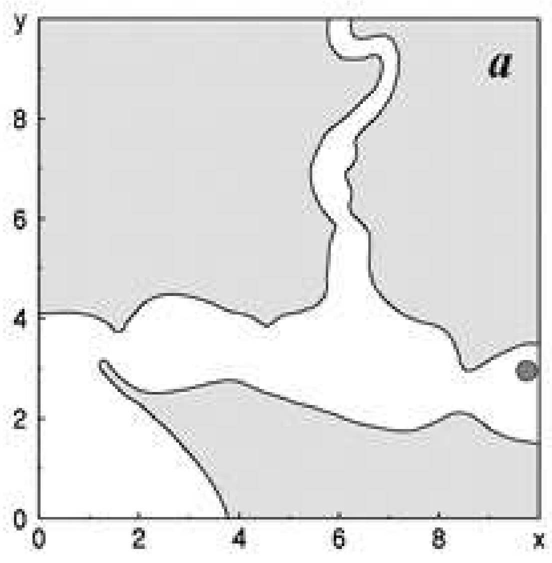


Рисунок 6.50, а – Положення плями поверхневого забруднення в Дніпровсько-Бузькому лимані при відсутності вітру в момент: а – $t = 0.0$.

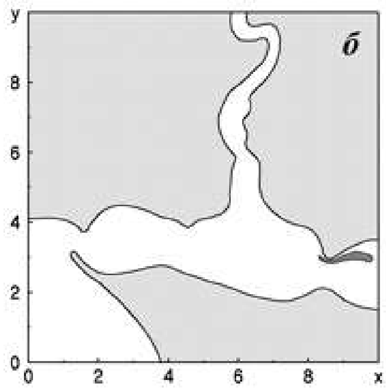


Рисунок 6.50, б – Положення плями поверхневого забруднення в Дніпровсько-Бузькому лимані при відсутності вітру в момент: б – $t = 4.0$

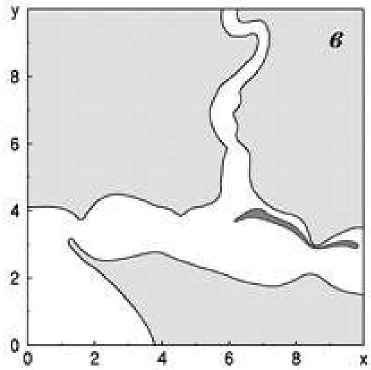


Рисунок 6.50 ,в– Положення плями поверхневого забруднення в Дніпровсько-Бузькому лимані при відсутності вітру в момент: в – $t = 16.0$.

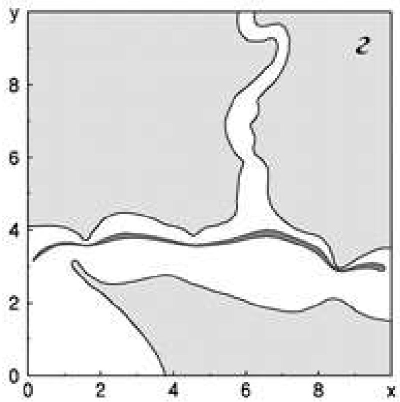


Рисунок 6.50, г – Положення плями поверхневого забруднення в Дніпровсько-Бузькому лимані при відсутності вітру в момент: г – $t = 34.0$

З плином часу пляма зноситься водами р. Дніпро в напрямку Дніпровсько-Бузького лиману. Положення плями в момент $t = 4.0$ показаний на рис. 6.50, б. Видно, що пляма забруднення рухається уздовж правого берега р. Дніпро і плавно обтікає мис в гирлі Дніпра.

У початковий момент часу центр плями розташований на лінії потоку зі значенням $\Psi \approx -0.40$, а інші точки плями – на лініях струму в діапазоні значень $\Psi_з = -0.43 \ldots -0.36$. При стаціонарному русі рідкі частинки рухаються уздовж ліній потоку постійного значення. Аналіз рис. 6.50 показує, що з плином часу пляма має рухатися уздовж правого берега р. Дніпро, наближаючись до сепаратриси, що розділяє води р. Дніпро і р. Південний Буг. Цей висновок підтверджує рис. 6.50, в, на якому показано положення плями в момент $t = 16.0$.

Надалі водний потік в західному напрямку виносить забруднення з Дніпровсько-Бузького лиману в Чорне море. Рис. 6.52, г ілюструє положення плями поверхневого забруднення в момент часу $t = 34.0$. Видно, що забруднення рухається вздовж північної берегової лінії лиману, вздовж відповідних ліній потоку.

Тепер розглянемо процес адвекції забруднення в Дніпровсько-Бузькому лимані при наявності вітру. Припустимо, що прогноз і напрямок сили вітру мають вигляд, показаний на рис. 6.52. У початковий момент часу дув північний вітер помірної сили. Через 10 годин вітер змінив напрямок на західний, а сила вітру зменшилася до слабкого. Нехай надалі сила вітру знову збільшується до помірних значень, а напрямок вітру змінюється на південний. Припустимо, що на фінальному часовому відрізку сила вітру залишається в межах помірного, а напрямок вітру знову змінюється на західний. Така зміна вітру є характерною при проходженні циклону (або антициклону) в безпосередній близькості до Дніпровсько-Бузького лиману.

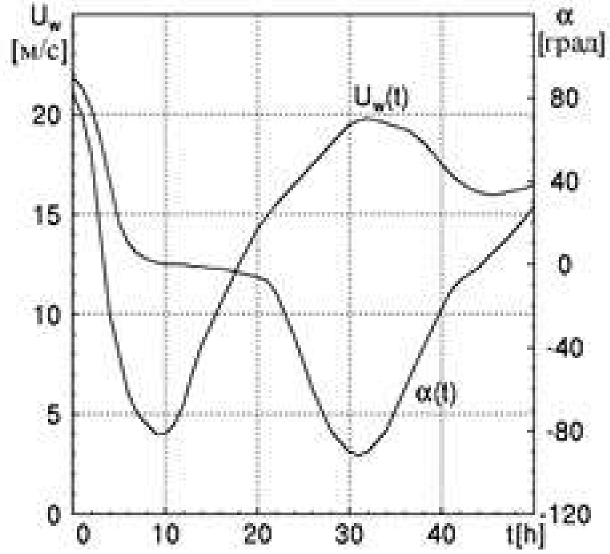


Рисунок 6.51 – Прогноз напрямку і сили вітру в Дніпровсько-Бузькому лимані

У цих умовах процес поширення поверхневого забруднення зазнає деяких змін. Нехай в початковий момент часу геометричні розміри плями і її положення збігаються з випадком, розглянутим раніше (рис. 6.52, а). Процес еволюції плями в Дніпровсько-Бузькому лимані з урахуванням дії вітрового навантаження (рис. 6.51) показаний на рис. 6.52, рис. 6.54 виконаний в аналогічному стилі і масштабі щодо рис. 6.46.

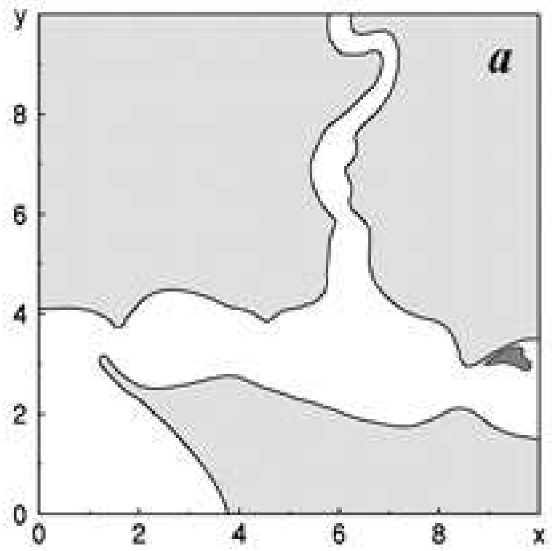


Рисунок 6.52, а – Положення плями поверхневого забруднення в Дніпровсько-Бузькому лимані під впливом вітру в момент: а – $t = 3.0$.

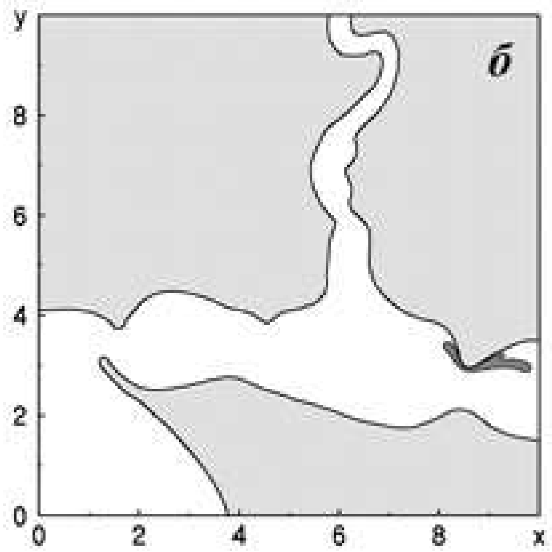


Рисунок 6.52, б – Положення плями поверхневого забруднення в Дніпровсько-Бузькому лимані під впливом вітру в момент: б – $t = 6.0$.

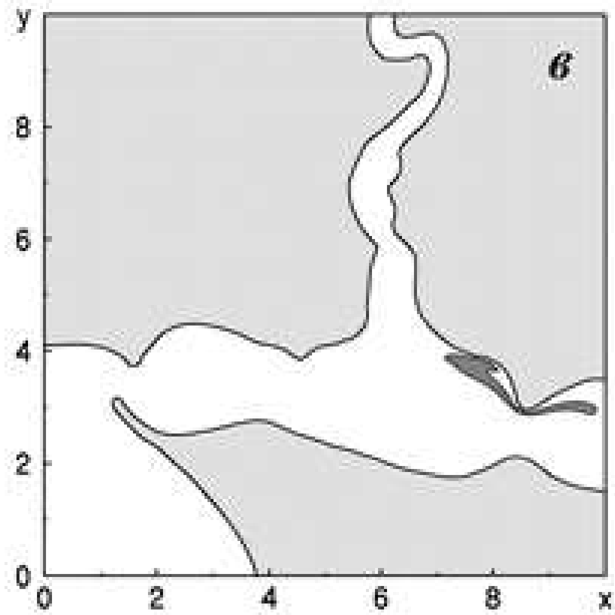


Рисунок 6.52, в – Положення плями поверхневого забруднення в Дніпровсько-Бузькому лимані під впливом вітру в момент: в – $t = 12.0$.

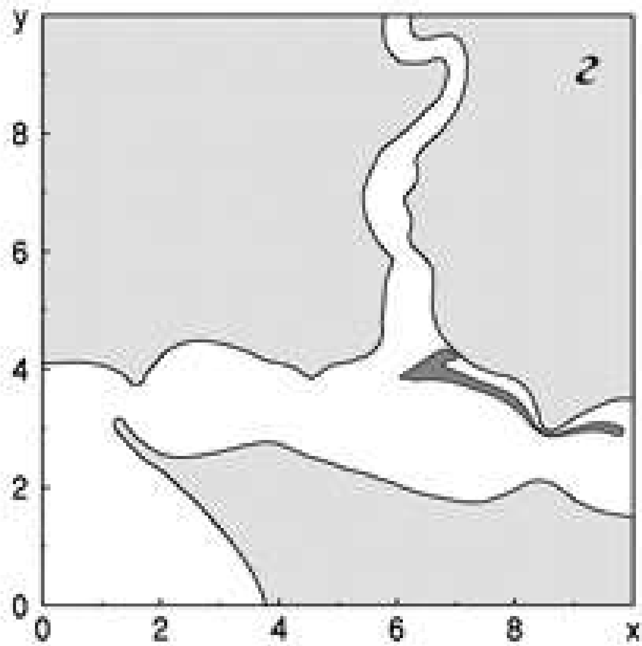


Рисунок 6.52, г – Положення плями поверхневого забруднення в Дніпровсько-Бузькому лимані під впливом вітру в момент: г – $t = 20.0$.

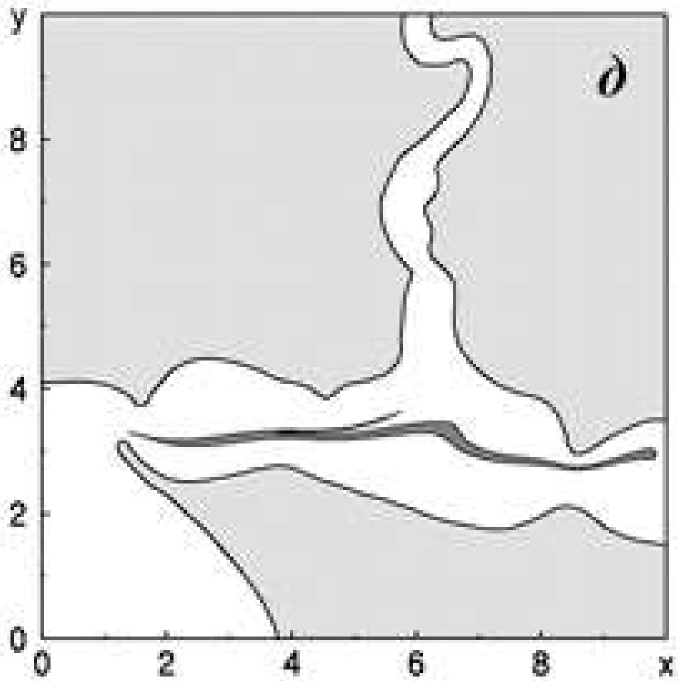


Рисунок 6.52, д – Положення плями поверхневого забруднення в Дніпровсько-Бузькому лимані під впливом вітру в момент: д – $t = 34.0$.

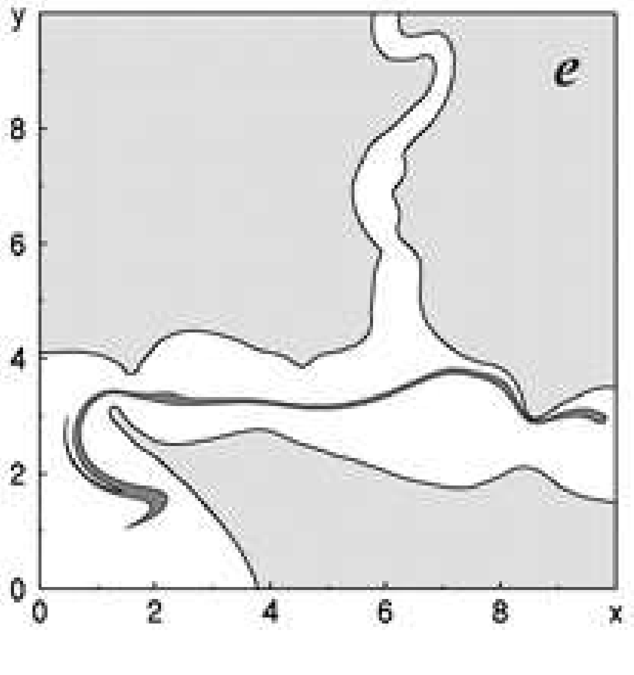


Рисунок 6.52,е – Положення плями поверхневого забруднення в Дніпровсько-Бузькому лимані під впливом вітру в момент: е – $t = 50.0$.

Оскільки в початковий момент часу мав місце помірний північний вітер, пляма забруднення потрапила в циркуляційну зону (рис. 6.52, б) і стала зміщуватися в бік лівого берега р. Дніпро з малою швидкістю в порівнянні з основною течією Дніпра. На рис. 6.52, а показано положення забруднення в момент $t = 3.0$. Видно, що до цього моменту часу забруднення наблизилося до берегової лінії і стало поступово зміщуватися в бік Дніпровсько-Бузького лиману.

Надалі вітер став поступово змінюватися на східний, зменшуючи свою силу і пляма під дією основної течії (дивись рис. 6.49) рухатися уздовж правобережного виступу в дельті Дніпра. Рис. 6.52, б ілюструє стан забруднення в момент $t = 6.0$ під дією вітру, який зменшується по силі і поступово змінює напрямок на західний.

Слід зазначити, що забруднення фактично рухається уздовж берегової лінії лиману, на відміну від випадку, показаного на рис. 6.52, б. При відсутності вітру пляма рухається на деякій відстані від берегової лінії, а при північному вітрі пляма може наблизитися до північної берегової лінії. Така незвичайність результату викликана складною геометрією берегові лінії в гирлі Дніпра, в якій вітрова компонента швидкості формує циркуляційний рух, спрямований проти вітру.

Зменшення вітру до слабкого призводить до того, що забруднення продовжує свій рух аж до сепаратриси (рис. 6.49), що розділяє води річкових систем. Характерний випадок показаний на рис. 6.52, в для моменту часу $t = 12.0$. Видно, що передня частина плями рухається фактично уздовж берегової лінії, а забруднення, що виходить з джерела забруднення рухається в західному напрямку по аналогії з випадком поширення виділеної пасивної рідини в безвітряну погоду.

На рис. 6.52, г показано положення забруднення в момент часу $t = 20.0$, при якому передня частина області забруднення розпочала свій рух уздовж сепаратриси. У цей момент вітер став поступово посилюватися в західному напрямку. Відзначимо, що більша частина забруднення як і раніше знаходиться біля лівої берегової лінії р. Дніпро, в північно-східній частині лиману.

Надалі сила вітру досягає значень, що відповідають помірному вітру, а напрямок вітру змінюється на північний (південний вітер). В цьому випадку в гирлі Дніпровсько-Бузького лиману, біля узбережжя континентальної України, починає формуватися циркуляційна зона рис. 6.49, г, яка зміщує основний водний потік лиману в сторону Кримського півострова. Таке зміщення відбивається на розподілі забруднення на водній поверхні. На рис. 6.54, д показано положення виділеної рідини в момент $t = 34.0$, яке відповідає рис. 6.54, г для випадку безвітряної погоди. Видно, що вітрове навантаження здатне зміщувати поверхневе забруднення на великі відстані в масштабах Дніпровсько-Бузького лиману. Зазначимо, що хвостова частина забруднення, розташована біля входу в лиман з боку р. Дніпро, теж зміщується в південному напрямку під дією вітру.

Незначна зміна швидкості вітру і зміна його напряму знову на західний вітер, призводить до поворотного зміщення хвостової частини забруднення в напрямку континентальної України. При цьому передня частина забруднення виходить в Чорне море і зміщується вздовж Кінбурнської коси Кримського півострова. Рис. 9.17, е ілюструє стан забруднення в фінальний момент складання прогнозу ($t = 50.0$). Видно, що середня частина забруднення знову повертається до сепаратриси, що розділяє води р. Дніпро і р. Південний Буг. Оскільки деякий час в Дніпровсько-Бузькому лимані мав місце західний вітер, який діє проти основної течії в лимані, інтервал часу, протягом якого забруднення перетнуло Дніпровсько-Бургський лиман, стало більше в порівнянні з випадком безвітряної погоди (рис. 6.50, рис. 6.52).

Порівняння результатів чисельного моделювання поширення забруднення в водах Дніпровсько-Бузького лиману показує, що вплив помірного за силою вітру надає велике значення в розподілі забруднення в акваторії лиману. Глобальне зміщення забруднення під дією основної течії в лимані призводить до помітного витягуванню забруднення, збільшення довжини кордону виділеної рідини з плином часу. На рис. 9.22 показана залежність зміни довжини границі забруднення з плином часу для випадку адвекції рідини у безвітряну погоду (штрихова лінія, позначена цифрою 1) і для випадку з урахуванням дії вітру (суцільна лінія, позначена цифрою 2). Видно, що ці залежності є в першому наближенні лінійними функціями.

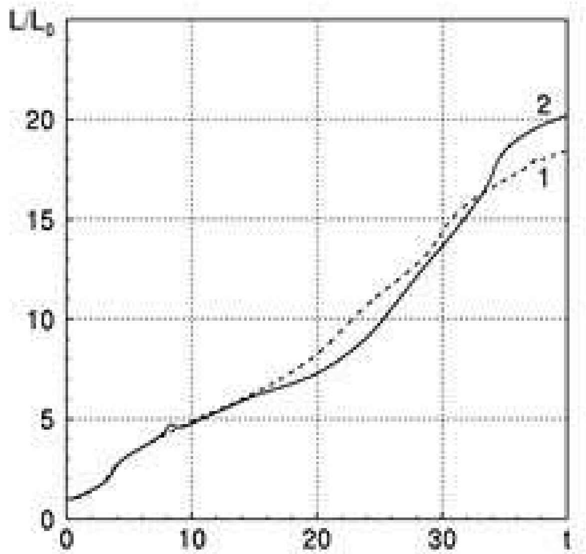


Рисунок 6.53 – Зміна довжини границі поверхневого забруднення в Днеровско-Бузькому лимані при відсутності вітру (1) і з урахуванням вітрового навантаження (2)

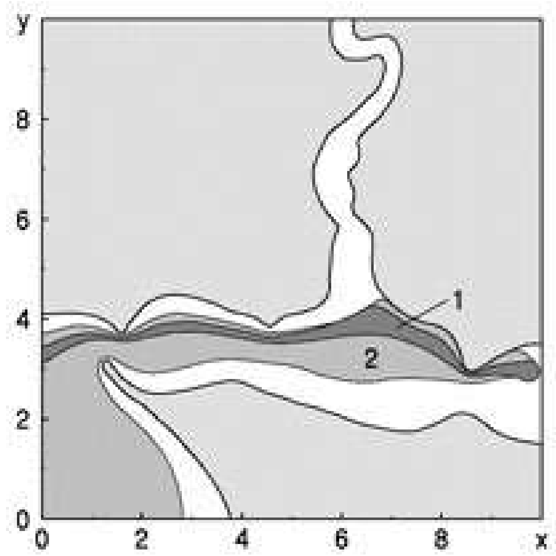


Рисунок 6.54 – Зміна площі забруднення в Дніпровсько-Бузькому лимані при відсутності вітру (1) і з урахуванням вітрового навантаження (2)

Незважаючи на те, що довжина границі області забруднення для довільного моменту часу в обох випадках були в першому наближенні однакові, можна зробити висновок про те, що вітрове навантаження істотно впливає, оскільки процеси емульгування і дисоціації забруднень (наприклад, нафтопродуктів) на морській поверхні прямо пропорційні силі вітру і довжині границі розділу забруднення з чистою водою.

Якщо протяжність області забруднення в обох випадках виявилися одного порядку, то площа ураження, кожну точку якої перетнуло забруднення, в розглянутих випадках істотно відрізняються. На рис. 6.54 показані площі зараження забрудненням поверхні Дніпровсько-Бузького лиману. Рисунок виконаний з позначеннями, що збігаються з рис. 6.50. Видно, що в разі безвітряної погоди забруднення перетнуло тільки фарватерну частина лиману. Під впливом помірного вітру різного напрямку (рис. 6.18) забруднення охопило більшу частину поверхні Дніпровсько-Бузького лиману, починаючи від лівого берега гирла Дніпра до вод, прилеглих до Кінбурнської коси півострова Крим.

Складання короткострокового прогнозу починається з оцифровки берегової лінії. Цей процес пов'язаний з розстановкою системи точок колокацій уздовж берегових ліній на розрахунковій області течії і системи фіксованих точкових вихорів, розташованих поза області течії на деякій відстані від точок колокацій. Для підвищення точності чисельного розв'язку задачі необхідно зменшувати відстань між точками коллокацій, особливо на ділянках з малими радіусами кривизни берегової лінії. Загальна кількість точок колокацій в методі не обмежена, вона визначається обчислювальними ресурсами і продуктивністю комп'ютера.

Умова стаціонарності і непротеканія рідини через берегові лінії розрахункової області вимагає виконання умови рівності значень функції потоку в точках колокації, що належать кожній береговій лінії в течії. Конкретне значення на кожній береговій лінії визначається або інтегруванням уздовж лінії, що з'єднує береги, перпендикулярних до лінії компонент швидкості течії або поверхневою (в двомірному випадку) витратою рідини по перетину каналу.

Вплив вітру моделюється дворядною системою вортонів з однаковими по модулю, але різними за знаком, інтенсивностями, які розташовані над розрахунковою областю. Інтенсивність вортона визначається значенням швидкості на водній поверхні для заданої швидкості вітру за результатами натурних спостережень в акваторії внутрішнього моря. Далі необхідно з'ясувати короткостроковий прогноз вітру над розрахунковою областю і провести інтерполяцію значень швидкості вітру і напрямки для довільного моменту часу. Зауважимо, що тривалість і точність прогнозу впливає на точність складання короткострокового прогнозу.

Умова рівності значень функції потоку в точках колокацій уздовж берегових ліній дозволяє сформувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих інтенсивностей системи фіксованих точкових вихорів, розташованих біля кожної точки колокації. Добавка впливу системи вортонів в праву частину з протилежним знаком дозволяє визначити інтенсивності фіксованих точкових вихорів для поточного моменту часу.

У моделі рух окремої рідкої частинки (маркер) описується в лагранжевому поданні системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку (задача Коші) з відповідними початковими умовами. Система маркерів, розставлена в початковий момент на границі забруднення, дозволяє описати еволюцію границі з плином часу на розрахунковій області. В процесі адвекції рідини границі області можуть стискуватися і розтягуватися, тому в моделі передбачена процедура скорочення і додавання необхідної кількості маркерів на границі виділеної рідини, яка виконана на основі інтерполяційних формул Лагранжа за схемою Ейткена третього порядку.

Дослідження показали, що складна геометрія Дніпровсько-Бузького лиману і помірний вітер різного напрямку істотно змінюють розподіл поля функції потоку в порівнянні з течією при відсутності вітру. Показано, що течія в лимані має сепатрмсу, яка розділяє рух під р. Дніпро і р. Південний Буг. Положення сепаратриси в значній мірі залежить від напрямку вітру. Показано, що для західного вітру вона може заходити навіть в гирло р. Південний Буг, а для північного вітру сепаратриса наближається до гирла Дніпра. Встановлено, що складна геометрія проходу вод лиману в Чорне море близько Кінбурнської коси (півострів Крим) і дія вітру сприяють формуванню циркуляційних зон. При північному вітрі вона утворюється на східному узбережжі Кінбурнської коси, а при південному вітрі циркуляційна зона утворюється близько берегової лінії континентальної України.

Зміна структури поля функції потоку поверхневої течії Дніпровсько-Бузького лиману під дією вітру призводить до помітних змін в зміщенні забруднення для розглянутої течії в порівнянні з випадком відсутності вітру. У стаціонарній задачі (штильна погода) поверхневе забруднення рухається уздовж ліній потоку однакового значення. Швидкості руху рідких частинок залежать від геометрії лиману, тому межа забруднення витягується в західному напрямку, однак траєкторію забруднення можна вважати цілком передбачуваною за розподілом ліній рівня функції потоку течії.

В нестаціонарній задачі, пов'язаній зі зміною напрямку і швидкості вітру, поширення плями стає складним. Частина забруднення може істотно знизити власну швидкість, потрапивши в область з циркуляційним рухом. Це в свою чергу призводить до того, що частина забруднення досягає узбережжя лиману. Зміна напрямку вітру може привести до помітного зсуву виділеної рідини в поперечному напрямку лиману. Іншими словами, дія вітру істотно збільшує площу забруднення акваторії Дніпровсько-Бузького лиману.

Процес моделювання не вимагає великих ресурсів і високої продуктивності обчислювальних засобів. Так, приклад моделювання гідрологічного процесу в акваторії, при застосуванні вищенаведеної формалізації, було реалізовано на персональному комп'ютері помірної потужності. Зокрема, розвязання задачі адвекції, яка представлена на рис. 6.48-Рис.6.54 не перевищувало 2 годин, при використанні процесору Pentium (R) Dual-Core CPU E5700, 3.0 GHz.

6.3. Моделювання аеродинамічних енергетичних систем (вітроротор Дар'є із керованою системою лопатей)

Застосування нових алгоритмів та обчислювальних технологій надало можливість швидкого моделювання динамічних впливів на систему N рухомих елементів – лопатей вітроротору вертикального типу, визначення миттєвих інтегральних та розподілених аерогідродинамічних характеристик на кожній лопаті, виявлення закономірностей змін інтегральних аерогідродинамічних характеристик ротору в цілому та усереднених моментних характеристик ротору, в залежності від умов та законів керування орієнтацією системи лопатей на віторороторі.

Розроблені обчислювальні технології були застосовані для дослідження ротору Дар`є, побудованого за принципово новою схемою (рис. 6.55, патент України №84139 від 10.10.2008). На рис. 6.56, рис. 6.57 представлено результати моделювання кінематичних і динамічних полів течії які впливають на аерогідродинамічні характеристики Динамічної система ротору Дар'є (рис.6.55) керованими крилами.

Рисунок 6.55 – Динамічна система, ротор Дар`є з керованими крилами. Принциповим для вітроагрегату, представленого на рисунку, є можливість оптимального керування крилами

Застосування обчислювальних технологій надало можливості проведення моделювання – системного обчислювального експерименту з досліджень кінематичних та аеродинамічних процесів, що забезпечують працездатність механічних вітроенергетичних систем (віторороторів з вертикальною віссю), з метою виявлення режимів їх ефективного функціонування.

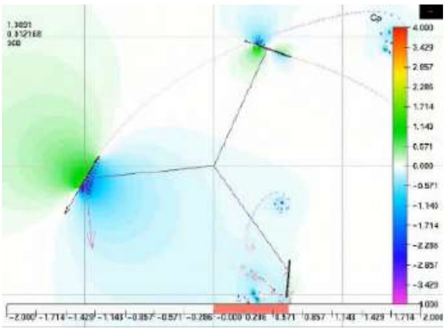


Рисунок 6.56 – Розподіл тиску навколо ротору з системою керованих лопотів (N=3). Коефіцієнт швидкохідності ротору $\lambda = 1.5$.

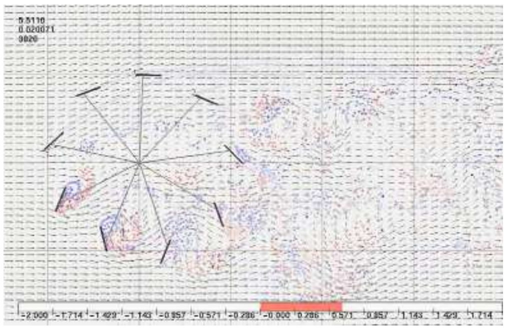


Рисунок 6.57 – Поле швидкостей навколо відривної течії ротору з системою керованих лопотів (N=9). Коефіцієнт швидкохідності ротору $\lambda < 1$

Дослідження призвели до виявлення умов та режимів підвищення енергоефективності ротору в практично актуальному низькошвидкісному діапазоні його експлуатації (при коефіцієнті швидкохідності ротору $\lambda < 2$ **).**

Особливість конструкції такого вітроагрегату (Рис. 6.1) полягає у тому, що під час обертання ротору його крила змінюють кут установки α – геометричний кут атаки.

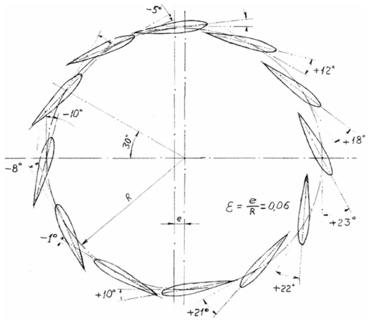


Рисунок 6.58 – Зміна кута установки крила під час обертання ротору

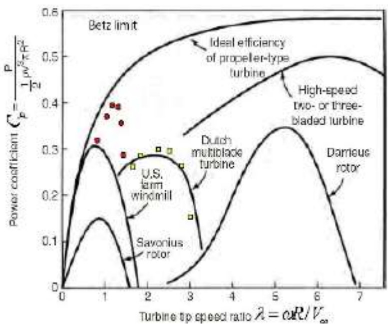


Рисунок 6.59 – Порівняння ефективності вітро/гідроенергетичних установок різних типів $C_p = 0.4$ при $\lambda \approx 1$

Це надало можливість наблизити коефіцієнт використання енергії вітру, для вітроротору з керованими лопатями, фактично до граничного режиму Бетця-Жуковського ($C_p = 0.4$ при $\lambda \approx 1$) . Дослідження призвели до разробки конструкції вітроротору з керованими лопатями, в якої коефіцієнт використання енергії вітру, фактично наближається до теоретично можливих показників (рис. 6.59.).

Приклад стабільно позитивного та імпульсно від'ємного моменту на осі обертання, при оптимальному та неоптимальному керуванні орієнтацією (кутом атаки) лопаті наведено на рис. 6.63 а) та б).

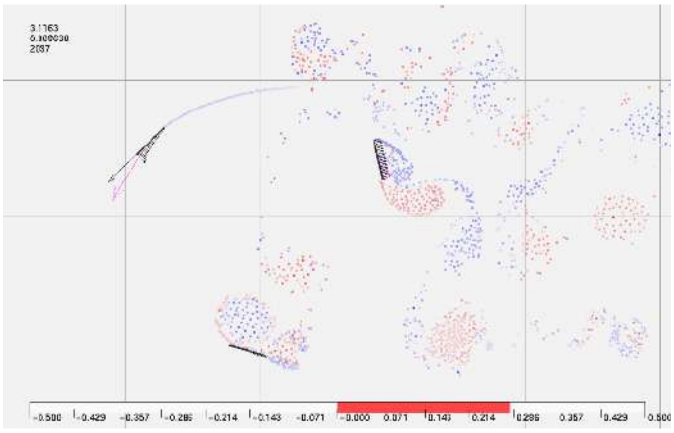


Рисунок 6.63 – а)

Момент, при оптимальному керуванні лопатю,

при $\lambda \geq 1$.

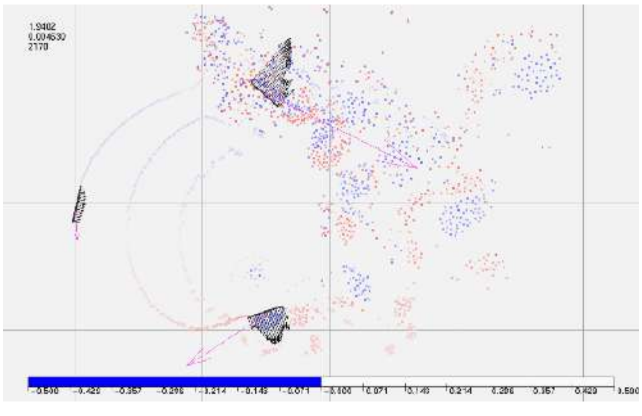


Рисунок 6.63 – б)

Момент при неоптимальному керуванні лопатю,

при $\lambda \leq 1$.

Структура течії суттєво впливає на моментні характеристики ротору. В різні моменти обертання, при неоптимальному керуванні крилами виникають розподіл тисків та сил, які діють на лопаті, що породжують від'ємні значення моменту.

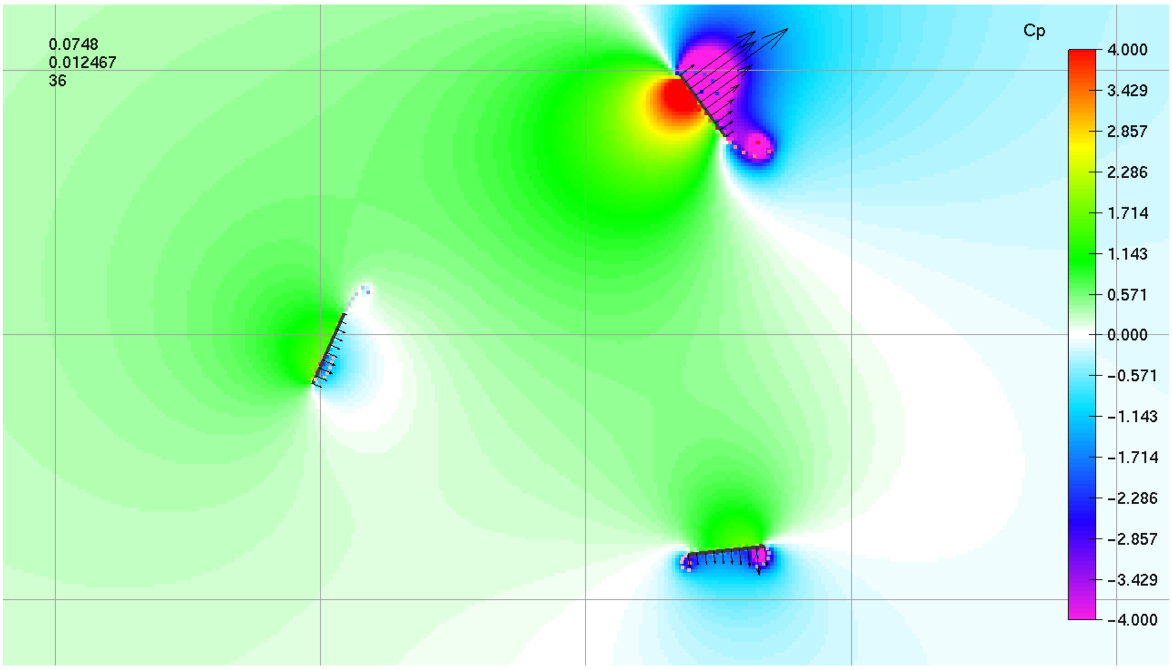


Рисунок 6.60 – Поле тиску навколо рухомих лопатів та епюри сил на лопатях

6.4. Побудова тривимірних моделей вихрових структур та ортогональних векторних полів циркуляційних течій

Тривимірні вихорові поверхні, що складаються із системи вихрових трубок здатні забезпечити ортогональні циркуляційні течії в областях, які вони обмежують. При побудові математичних моделей вихорових структур для тривимірних течій необхідно враховувати їх топологічні властивості.

Топологічна структура моделей тривимірних циркуляційних течій ідеальної нестисливої рідини навколо неоднозв'язних меж неоднозв'язної області, за постановкою задачі, повинна задовольняти законам щодо збереження циркуляції та спіральності:

$$\Gamma = \int_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = const\,, \qquad J = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j \neq i}^{M} L_{ij} + \sum_{i=1}^{\mathrm{M}} L_{ii} = const\,. \tag{6.9}$$

Умова стійкості вихрових структур полягає в збереження, при їх безперервному русі та деформуванні, основних топологічних характеристик, до який відноситься порядок їх зв'язності.

На рис. 6.62 наведене векторне поле швидкості циркуляційних течій, яке знаходиться поза системою вихрових ліній. Ці лінії розташовані на тривимірній вихровій поверхні у вигляді тору. Наведений приклад з локально ортогональними полями швидкості відповідає тривимірної течії навколо вихрової структури типу смерч/торнадо (рис. 6.61).

Моделювання ортогональних векторних полів циркуляційних течій для тривимірних моделей вихрових структур типу смерч/торнадо.

Рисунок 6.61 – Тривимірна вихрова структура смерч/торнадо

Моделювання динаміки тривимірної вихрової поверхні у вигляді тору показало, що вихорові поверхні, які складаються із системи вихрових трубок із зачепленнями мають більший запас стійкості у порівнянні із тривимірними вихровими поверхнями, що складаються із системи вихрових трубок із вузлами.

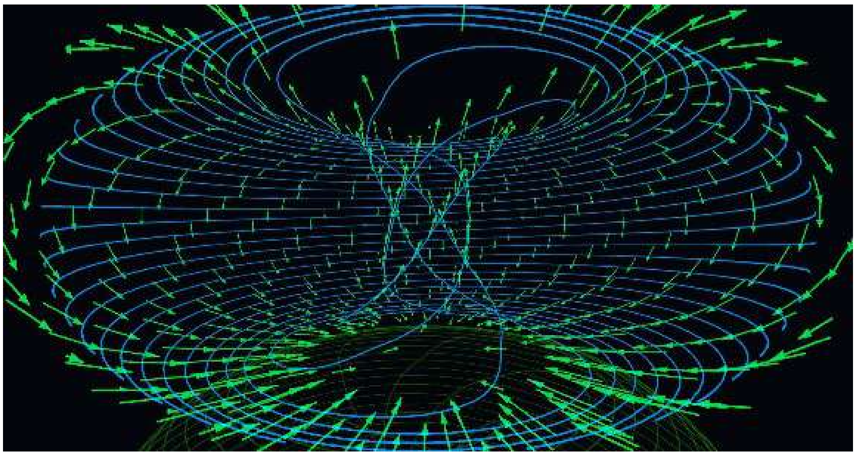


Рисунок 6.62 – Поле швидкості циркуляційних течій поза системи вихрових ліній на тривимірній вихровій поверхні, у вигляді тору

Даний факт можна пояснити тім, що розірвання однієй вихровой лінії не буде суттево впливати на стійкість усієй вихрової структури, що склажається із системи окремих вихорових ліній. Але декілка розривів на однієй вихровий лінії призводить до її руйнування.

6.5. Моделювання взаємодії тривимірного струменю та вихрових структур з обмежуючою поверхнею

Моделювання утворення тривимірних вихрових структур на неоднозв'язних поверхнях потребує врахування їх топологічних властивостей та збереження топологічних інваріантів, до яких відносяться порядок зв'язності, циркуляція в ортогональних полях течії.

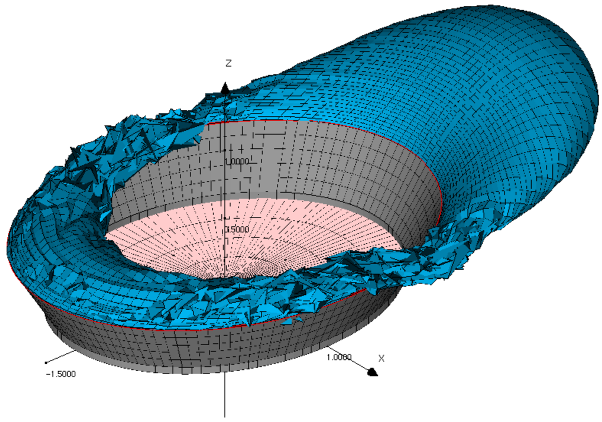


Рисунок 6.63 – Моделювання тривимірного вихроутворення навколо велико-масштабних споруд (модель течії навколо відкритого стадіону)

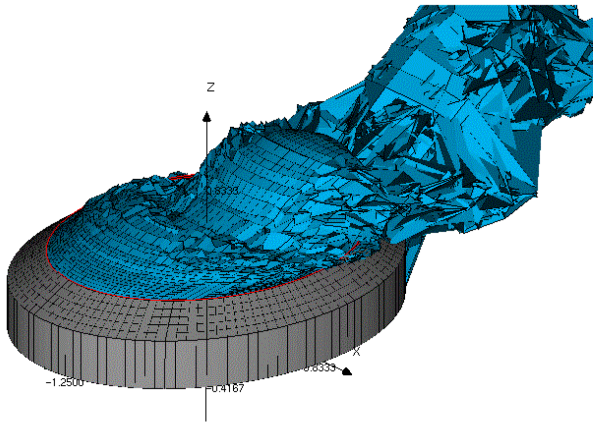
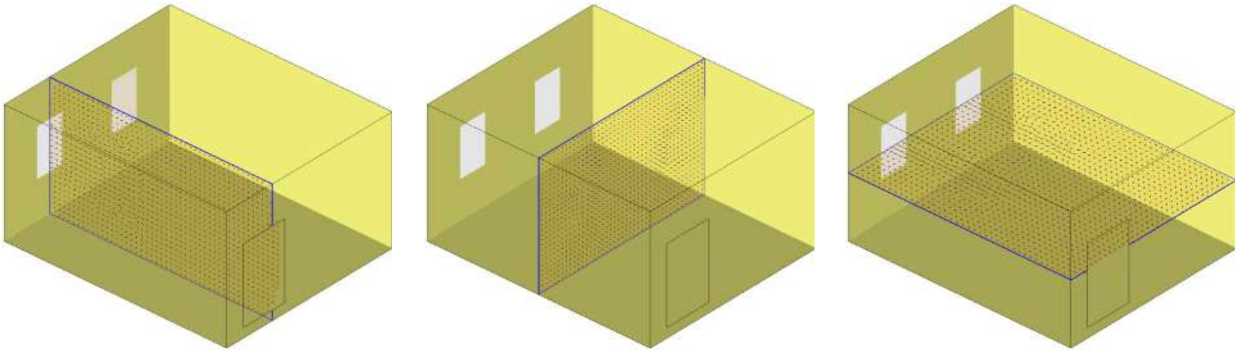


Рисунок 6.64 – Моделювання тривимірного вихроутво-рення навколо велико-масштабних споруд (модель течії навколо покритого стадіону)

Моделювання відривної течії навколо великомасштабних споруд (моделі частково покритих стадіонів) показало виникнення нестаціонарних режимів з утворенням періодичних вихорів та низькочастотних пульсацій тиску, що відображено в коливанні вихрової поверхні на рис. 6.64.

6.5.1. Моделювання в аеродинамічних полів замкненої області зі складною геометрією меж

Задачі внутришнеї аеродинаміки можна розвязувати за допомогою методів теорії потенціалу (МГЕ, КМГЕ, МДВ, МДО). У вигляді прикладу розглянуто розв’язок задачі з аерації приміщення з трьома отворами (два вікна та двірний пройом). За допомогою системи екранів вдалося виявити внутришню структуру течії, з врахуванням протягів із отвірів складної форми.



а) б) в)

Рисунок 6.65 – Застосування перерізів-екранів при моделюванні тривимірного вихроутворення у внутрішній частинні області (внутрішня задача).

Взаємодія струменя з поверхнею е достатньо складним явищем, яке супроводжується цілим спектром єфектів [15-18].

При моделюванні течії скрізь отвір – конфузор з кусково гладкоим вихідним контуром (з кутовими елементами) виявлено утворення струменевіх явищ , із виникненням ефекту інверсії струменю.

6.5.2. Моделювання взаємодії струменів та вихрових структур з крилом літака

Результат моделювання впливу струменів на тривимірні вихрові системи, які породжені несучою поверхнею, представлено на рис. 6.70. В якості несучої поверхні розглядається пласке крило складної форми, яке знаходиться під кутом атаки в 30^0.

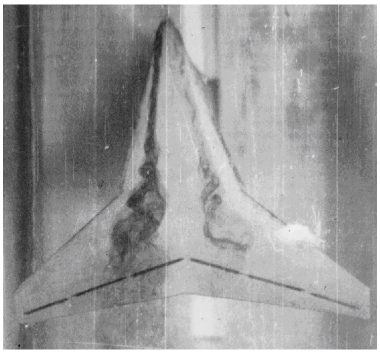


Рисунок 6.66 а)– Результат експерименту з породжені несучою поверхнею, тривимірних вихрових систем

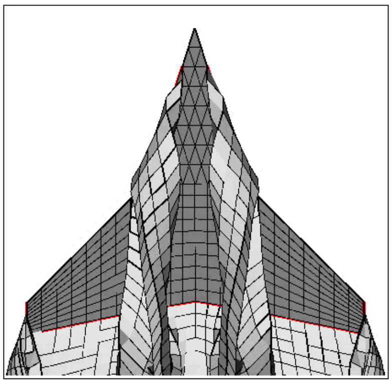


Рисунок 6.67 а)– Моделювання взаємодії тривимірних вихрових структур (вихрової поверхні) та несучої поверхні

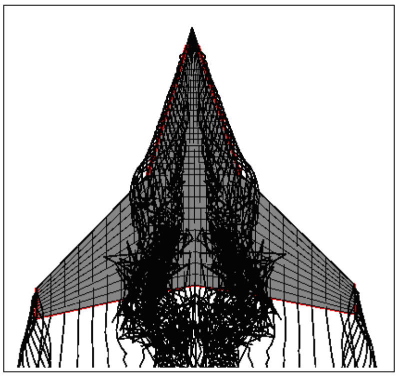


Рисунок 6.68 а)– Моделювання взаємодії тривимірних вихрових структур (системи вихрових трубок) та несучої поверхні

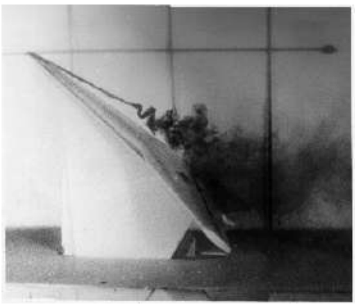


Рисунок 6.66 б)– Утворення тривимірних вихрових систем – вихрових жгутів.

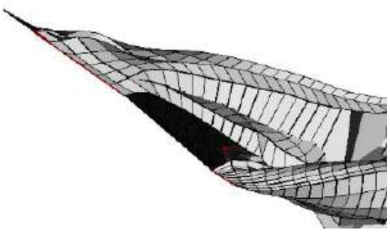


Рисунок 6.67 б)– – Утворення тривимірних вихрових систем – вихрових поверхонь.

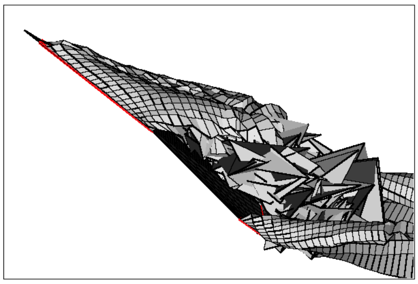


Рисунок 6.68 б)– – Утворення та руйнування тривимірних вихрових жгутів.

Порівняльний аналіз рис. 6.66 (експеримент) та рис. 6.67, рис. 6.68 (матмоделювання) показал, що при застосування грубої сітки розбіття поверхні крила, метод «вихрових рамок» не завжди коректно віддзеркалює фізичні явища, що утворюються за крилом з напливом. Розмір комірки мережі повинен біти на порядок меньще характерного розміру вихрового елементу [126].

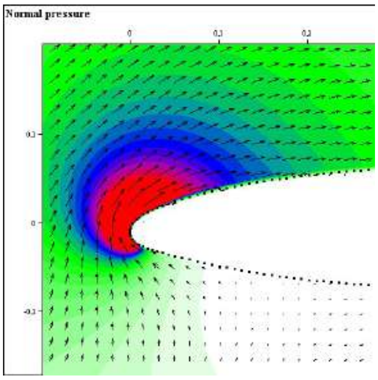


Рисунок 6.69 – Розподіл тиску. Переріз крила Ан-124

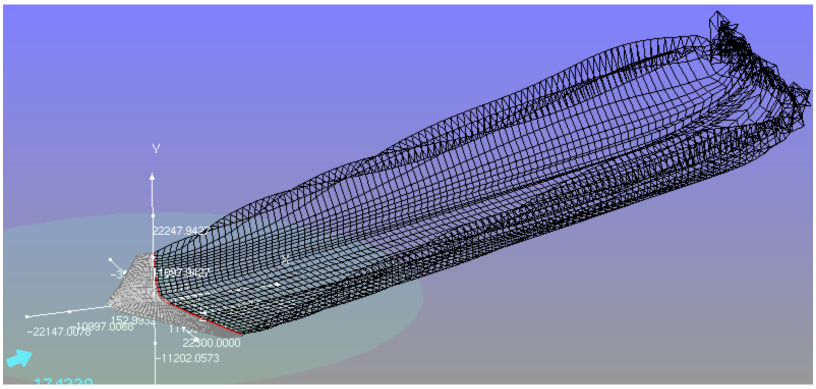


Рисунок 6.70 – Вихровий слід за тривимірним крилом Ан-124

Результат моделювання впливу струменів на тривимірні вихрові системи, які породжені несучою поверхнею, представлено на рис. 6.71. В якості несучої поверхні розглядається пласке крило складної форми, яке знаходиться під кутом атаки в 30^0.

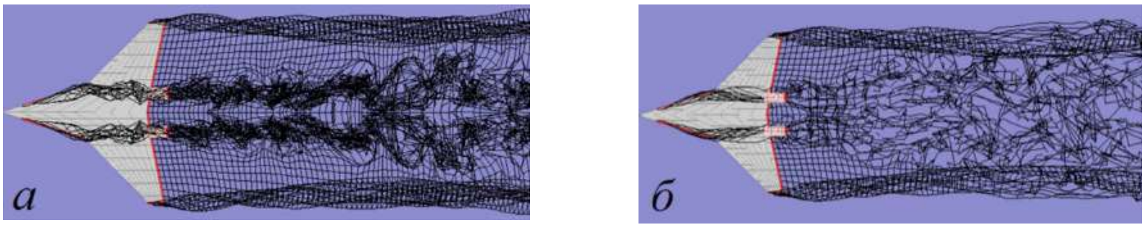
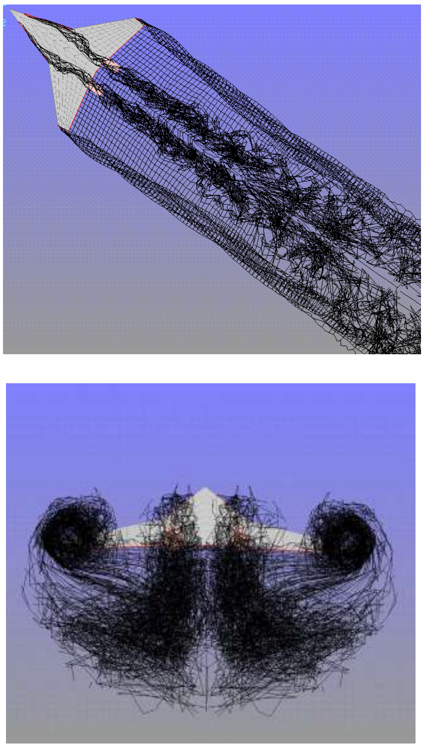


Рисунок 6.71 – Результат моделювання відривної течії, зі швидкістю V навколо плоского крила під кутом атаки 20^0. а) швидкість потоку в середині «турбіни» відсутня; б) швидкість потоку в середині «турбіни» дорівнює $10 \cdot V$.

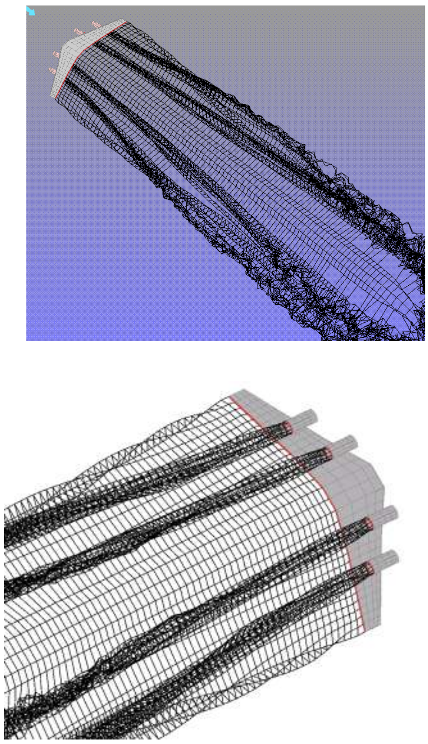
З порівняння рис. 6.71 а) та б) видно, що вплив підсмоктуючої сили та ефект направленого струменю, який утворює працююча модельна «турбіна» (рис. 6.71, б) суттєво впливає на стійкість вихрових джгутів над несучою поверхнею – над плоским крилом, яке встановлене під кутом атаки 30^0. Притискання вихрових структур до несучої поверхні регулює відрив з напливу крила. Інжекція струменю призводить до ефекту керованості відривом та забезпечує стійкість вихрових структур поблизу несучій поверхні.



а)

б)

Рисунок 6.72 Моделювання взаємодії тривимірного струменю та вихрових структур навколо несучої поверхні (взаємодія струменів та вихорових структур, слід за крилом з напливом)



а)

б)

Рисунок 6.73 Моделювання взаємодії тривимірного струменю та вихрових структур навколо несучої поверхні (взаємодія струменів та вихорових структур, слід за крилом АН-124).

З порівняння рис. 6.72 а) та а) видно, що вплив підсмоктуючої сили та ефект направленого струменю, який утворює працююча модельна «турбіна» (рис. 6.72) суттєво впливає на стійкість вихрових джгутів над несучою поверхнею – над плоским крилом, яке встановлене під кутом атаки 30^0. Притискання вихрових структур до несучої поверхні регулює відрив з напливу крила. Струмені від «турбін» частково руйнують вихрову пелену в сліду, але це, фактично, не впливає на торцеві відриви на крилі.

Рис.6.73 а).б). В даному випадку розглядалися струмені круглого перерізу. Результат моделювання тривимірних струменевих течій із конфузорів з отворами різної форми у вигляді каталогу наведено на рис. 6.74-рис.6. 79.

6.5.3. Моделювання трансформації - інверсії струменю

Можливість виникнення ефекту інверсії для затоплених струменів в середовищах з постійною щільністю визначається вихідними параметрами отвору конфузору. За результатами моделювання виявлено, що виникнення та інтенсивність проявлення інверсії струменю має залежність від нерівномірності швидкості в перерізі отвору конфузору, що є наслідком нерівномірності стискання струменю.

Результати обчислювального експерименту

Нижче наведені результати чисельного моделювання формування струменів, що стікали в затоплений простір із конфузорів, з різним перетином вихідного отвору. Еволюція струменя представлена порівнянням її форми в різні розрахункові моменти часу.

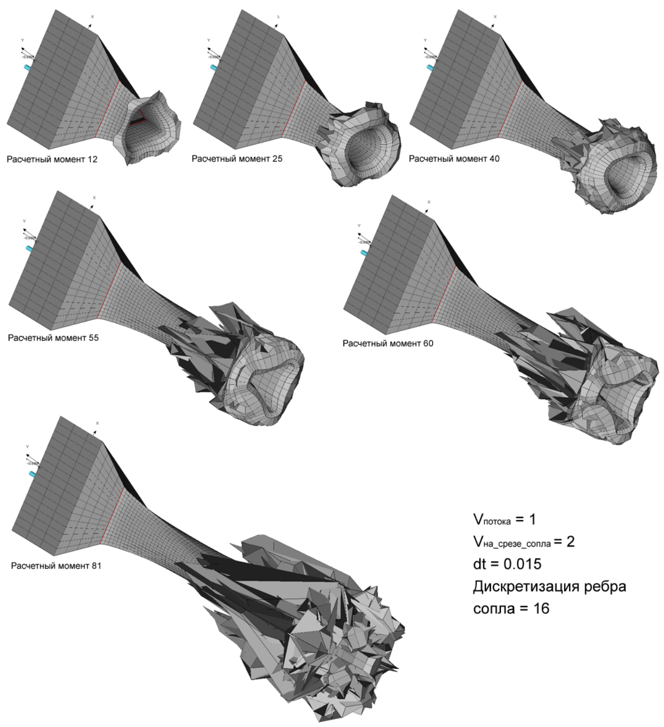


Рисунок 6.74 – Інверсія для затоплених струменів

Трикутний зріз конфузору.

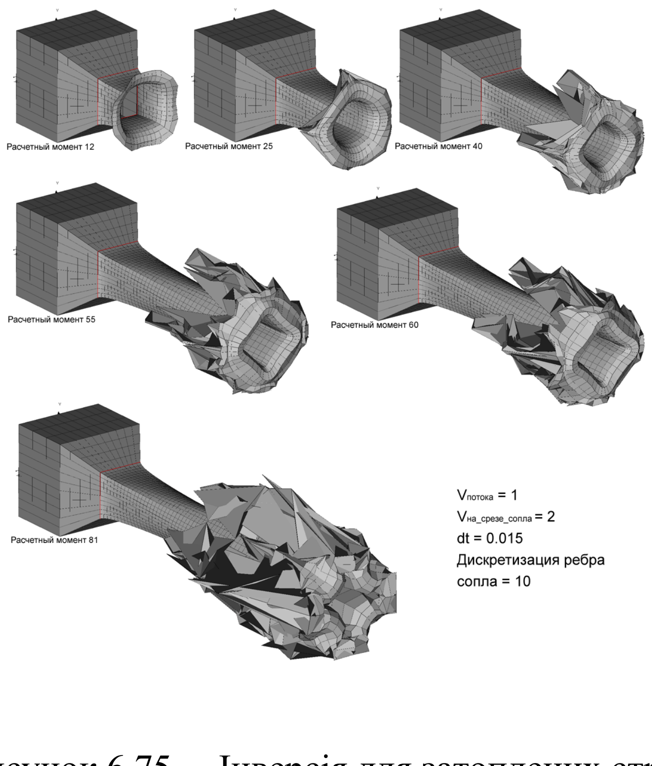


Рисунок 6.75 – Інверсія для затоплених струменів.

Квадратний зріз конфузору

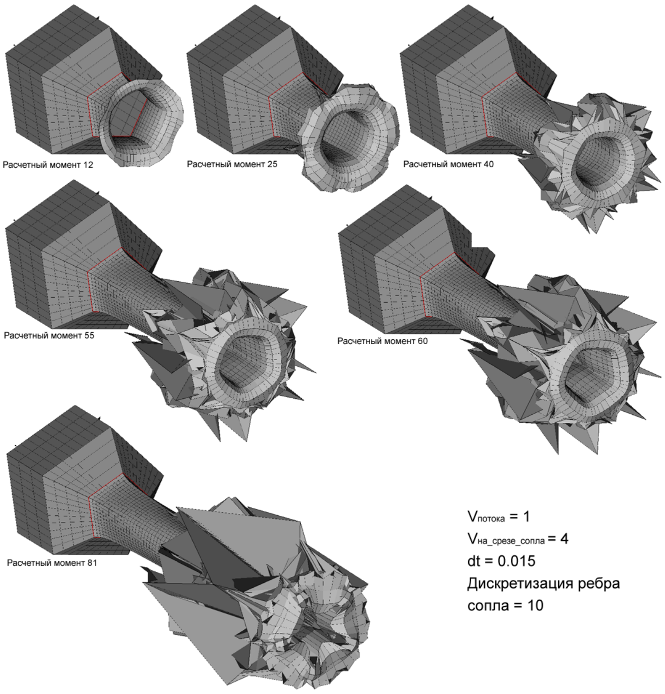


Рисунок 6.76 – Інверсія для затоплених струменів.
Пятикутний зріз конфузору

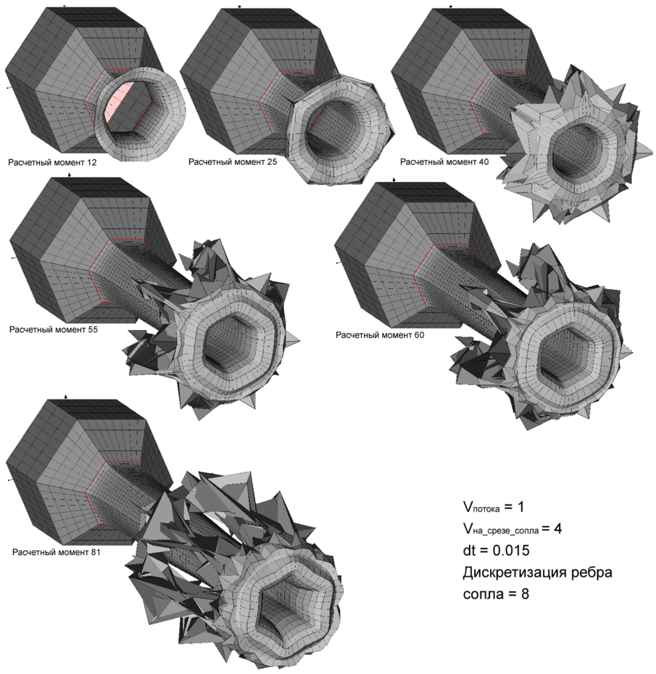


Рисунок 6.77 – Інверсія для затоплених струменів.
Шестикутний зріз конфузору.

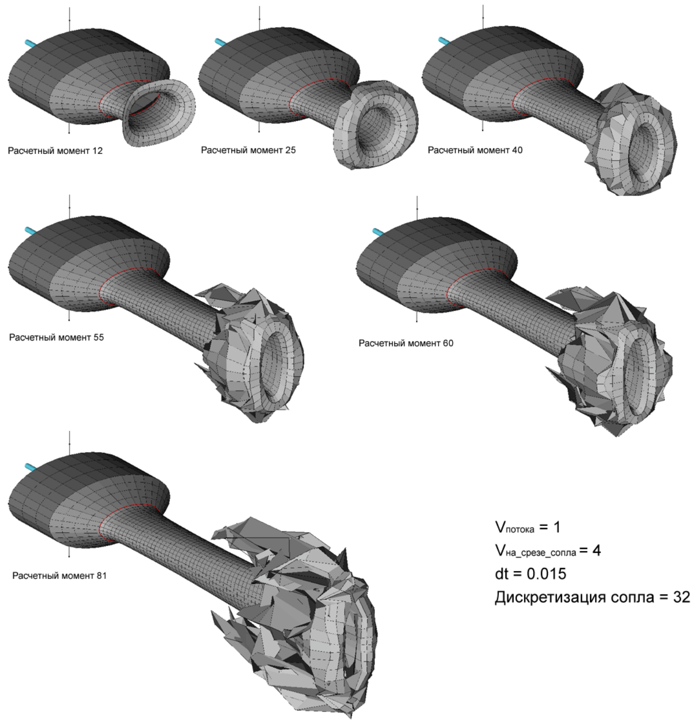


Рисунок 6.78 – Інверсія для затоплених струменів.
Еліптичний зріз конфузору

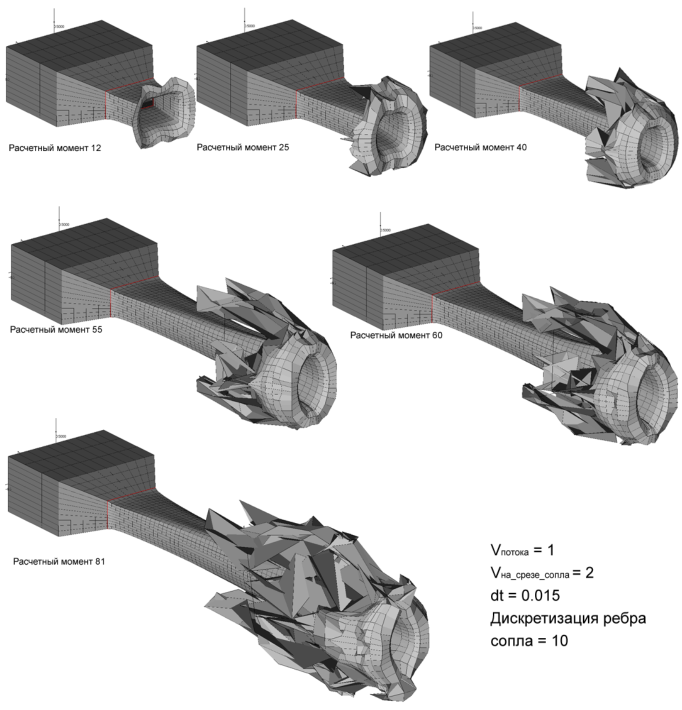


Рисунок 6.79 – Інверсія для затоплених струменів.

Незважаючи на «обчислювальні спотворення», при моделюванні гладкого згортання вихровий границі струменя, що виходить їх конфузорів з різним перетином, при комп'ютерному «видаленні» вихору (вихор стає прозорим), явно видно прояв інверсії струменів різного перетину.

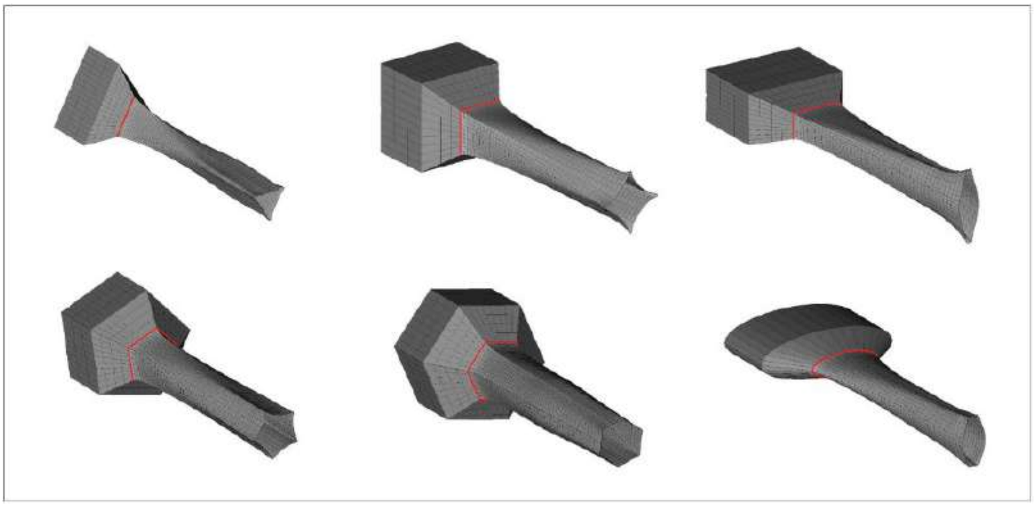


Рисунок 6.80 –
Порівняльне представлення проявлення ефекту інверсії
для затопленого струменю із отвірів конфузорів довільної форми

На рис. 6.80 в каталогізувати вигляді представлено прояв ефекту інверсії струменів. Прозорість вихровий структури в кінцевій частині струменя (за рахунок комп'ютерного «видалення» вихровий структури) виявило стійку зміну перетину струменя - прояв ефекту інверсії струменів. Ефекти в'язкості та поверхневого натяжіння при чисельному моделюванні не враховувалися. При зменшенні ефекту стискання течії в насадці, ступінь прояву інверсії послаблюється. Співвідношення швидкості в струмені і швидкості течії в затопленому просторі, в обчислювальному експерименті (рис. 6.74 – рис. 6.79) становить 2 / 1 – 4 / 1.

Можливість виникнення ефекту інверсії для затоплених струменів в середовищах з постійною щільністю визначається вихідними параметрами отвіру конфузору. За результатами моделювання виявлено, що виникнення та інтенсивність проявлення інверсії струменю має залежність від нерівномірності швидкості в перерізі отвіру конфузору, що є наслідком нерівномірності стискання струменю.

6.7. Висновки за розділом

Продемонстровано ефективність застосування нових обчислювальних технологій в моделюючих комп'ютерних системах інженерно-технологічного спрямування:

– для проведення попередніх досліджень при проектних розробок з висотного будівництва, для визначення аеродинамічних впливів на конструкції та споруди;

– для проведення передпроектних досліджень в гідротехніці, для визначення гідродинамічних впливів на різноманітні гідротехнічні конструкції та споруди в акваторіях;

– для експрес-прогнозування можливих небезпечних гідроекологічних аварій та катастроф в акваторіях з метою їх попередження та зменшення шкідливих наслідків;

– при проведенні досліджень з виявлення режимів ефективного функціонування нових конструкцій вітро/гідророторів.

Досліджено особливості аерації внутрішньої частини приміщень з врахуванням струменевих впливів. Виявлено властивості нової моделі тривимірної вихорової структури та умови виникнення ефекту інверсії струменю для конфузорів із заданою формою отвору. Побудовано каталог інверсії струменю для конфузорів з різною формою отворів

Моделювання формування та еволюції затопленого струменю здійснювалося методом вихрових рамок Показано, що ефект інверсії проявляється не тільки для рідких струменів, що стікали в газ, а й для затоплених струменів в середовищах з рівною щільністю. Інверсія струменю виникає і при нестаціонарному і вихроутворенні в затопленому струмені. У процесі формування струменя з кінцевим вихором комп'ютерне «видалення вихорів» вихровий структури в кінцевій частині струменя, виявило збереження стійкості течії під нею і прояв ефекту інверсії. Ефекти в'язкості при чисельному моделюванні не враховувалися. При зменшенні підтискання струменя в конфузорі ступінь прояву інверсії послаблюється.

Представлено результати визначення впливу крупномасштабних вихрових структур на споруди та струменевих течій на стійкість вихрових структур поблизу обтічних поверхонь.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено актуальну комплексну науково-прикладну проблему підвищення ефективності математичного моделювання аерогідродинамічних процесів та систем шляхом створення технологій моделювання, призначених для застосування в комп'ютерних системах прогнозування та керування швидкоплинними процесами в масштабі реального часу.

За результатами досліджень було вирішено наступні завдання:

–Розроблено методологію побудови обчислювальних технологій моделювання, прихначених для застосування в комп'ютерних системах прогнозування, інформаційної підтримки прийняття рішень та забезпечення керування швидкоплинними процесами в реальному масштабі часу;

– Розроблено нові математичні моделі швидкоплинних аерогідродинамічних процесів.

– Розроблено методи та алгоритми обчислення кінематичних та динамічних характеристик швидкоплинних аерогідродинамічних процесів в реальному масштабі часу;

– Побудовано обчислювальну технологію моделювання та забезпечення прогнозування аерогідродинамічних процесів в реальному масштабі часу.

В роботі отримано такі нові наукові і практичні результати:

1) Розроблено нову методологію побудови обчислювальних технологій моделювання аерогідродинамічних процесів, призначених для застосування в комп'ютерних системах прогнозування, підтримки прийняття рішень та забезпечення керування швидкоплинними процесами в реальному масштабі часу.

2) Запропоновано новий метод побудови моделей відривних течій з врахуванням впливу в'язких та інерційних сил у шару скінченної товщини

навколо перешкод. Із застосуванням теорії потенціалу, в'язкого шару, моделей масопереносу моделей Лагранжа, створено методологію прогнозування забруднень в акваторіях.

3) Розроблено нову математичну модель течії в пласкому каналі скінченої глибини із застосуванням у сингулярних та гіперсингулярних інтегральних представленнях та з врахуванням в'язкості. В моделі течії в шару скінченої товщини використано порівняльний вплив інерційних та в'язких сил, що забезпечує врахування циркуляційних режимів для течій з помірними числами Рейнольдса. Розроблено нові математичні моделі тривимірних течій для дослідження вихрових та струменевих ефектів.

4) Розроблено лабораторний стенд та методологію лабораторних досліджень для тестування адекватності нових моделей нестаціонарної течії. Стенд призначено для досліджень та моделювання течій в шару з перешкодами та межами довільної форми, між паралельних площин, в діапазоні чисел Рейнольдса $0 \le \mathrm{Re} \le 1.5 \cdot 10^4$. Лабораторна верифікація моделей підтверджує можливість застосування методу дискретних особливостей на нові класи прикладних задач.

5) Розроблено новий метод та алгоритм перетворення системи дискретних особливостей для відповідних моделей, побудованих на основі сингулярних та гіперсингулярних інтегральних представлень.

6) Представлено новий метод та алгоритм обчислення значень кінематичних характеристик процесу. Розроблено нові методи та алгоритми визначення динамічних характеристик процесу із застосуванням вже існуючого розв'язку кінематичної початково-крайової задачі.

7) Побудовано нову обчислювальну технологію, яка містить моделі, методи і алгоритми перетворення дискретних особливостей та алгоритми швидких обчислень, що надає можливість визначати динамічні параметри процесів та явищ з використанням методу перерахунку вже існуючих розв'язків вихідної задачі.

8) Представлено новий варіант моделі розповсюдження забруднень на водній поверхні, яка базується на Лагранжевому підході до спостереження хаотичної адвекції. В моделі враховано впливи вітру на формування полів течії. Модель призначена для короткотривалого прогнозування та застосовна в системах керування швидкоплинними процесами.

9) Продемонстровано ефективність застосування нових обчислювальних технологій в моделюючих комп'ютерних системах інженерно-технологічного спрямування:

– для проведення передпроектних досліджень у висотному будівництві, для визначення аеродинамічних впливів на конструкції та споруди;

– для проведення передпроектних досліджень в гідротехніці, для визначення гідродинамічних впливів на різноманітні гідротехнічні конструкції та споруди в акваторіях;

– для експрес-прогнозування можливих небезпечних гідроекологічних аварій та катастроф в акваторіях з метою їх попередження та зменшення шкідливих наслідків;

– при проведенні досліджень з виявлення режимів ефективного функціонування нових конструкцій вітро/гідророторів.

10) Розроблено нову математичну модель тривимірної вихрової структури, яка придатна для досліджень метеорологічних явищ типу смерч/торнадо. Досліджено особливості впливу крупномасштабних вихрових структур на споруди та струменевих течій на стійкість вихрових структур поблизу обтічних поверхонь.

11) Досліджено особливості аерації внутрішньої частини приміщень з врахуванням струменевих впливів. Виявлено властивості нової моделі тривимірної вихорової структури та умови виникнення ефекту інверсії струменю для конфузорів із заданою формою отвору. Побудовано каталог інверсії струменю для конфузорів з різною формою отворів.

СПИСОК ВИКОРИСТАИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я Вихревые методы расчёта нестационарных гидродинамических нагрузок. Москва: Изд-во Моск. Ун-та. 2006. – 184 с.
2. Апаринов В.А., Дворак А.В. Метод дискретных вихрей с замкнутыми вихревыми рамками // Тр. ВВИА им. Н.Е. Жуковского. – 1986, Вып. 1313. – С. 424- 432.
3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. – М.: Наука – 1989. – 472 с.
4. Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы. – М.: МЦНМО. – 2007. 250 с.
5. Аубакиров Т.О., Белоцерковский С.М., Желанников А.И., Ништ М.И. Нелинейная теория крыла и ее приложения. Алматы: Гылым, 1997. – 448 с.
6. Аубакиров Т.О., Желанников А.И., Иванов П.Е., Ништ М.И. Спутные следы и их воздействие на летательные аппараты. Моделирование на ЭВМ. Алматы. 1999. – 230 с.
7. Банникова Е.Ю., Конторович В.М., Пославский С.А. Влияние орбитального движения на коллапс кольцевых вихрей в аккреационном потоке // ЖЭТФ. – 2014, том 146, вып. 3(9). – С. 663-669.
8. Банникова Е.Ю., Конторович В.М., Пославский С.А. Колллапс и попятное движение осесимметричных тороидальных вихрей в аккреционном потоке. // ЖЭТФ, том 144, №2(8), 2013. – С. 438-444.
9. Банникова Е.Ю., Конторович В.М., Пославский С.А. Спиральность тороидального вихря с закруткой. // ЖЭТФ. – 2016, том 149, №4. – С. 888-895.
10. Банникова Е.Ю., Конторович В.М., Резник Г.М Динамика вихревой пары в радиальном потоке. // ЖЭТФ, том 132, №3, 2007, – С. 615–622.

11. Басин М.А., Корнев Н.В. Аппроксимация поля завихренности в безграничном объеме // Журнал технической физики, 1994, – С. 179-185.
12. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 630 с.
13. Беженар Р.В., Бровченко И.А., Железняк М.И., Кошебуцкий В.И., Мадерич В.С. Моделирование радиоактивного загрязнения морской среды при авариина АЭС Фукусима // Збірник наукових праць СНУЯЕтаП. – 2012, том 4(44). – С. 82-91.
14. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
15. Белоцерковский С.М. Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. – М.:Наука, 1978. – 352 с.
16. Белоцерковский С.М., Гиневский А.С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. – М.: Физматлит, 1995. – 368 с.
17. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоскопаралельного отрывного обтекания тел./Под ред С.М.Белоцерковского. – М.:Наука, ГРФМЛ, 1988. – 232 с.
18. Бабкин В.И., Белоцерковский С.М., Гуляев В.В., Дворак А.В. Струи и несущие поверхности. Моделирование на ЭВМ. – М.: Наука, 1989. – 208 с.
19. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
20. Бетяев С.К. Гидродинамика: проблемы и парадоксы // Успехи физических наук. – 1995, том 165, №3. – С. 299-330.
21. Биркгоф Г. Неустойчивость Гельмгольца и Тейлора // Гидродинамическая неустойчивость. – М.: Мир, 1964. – С. 68-94.
22. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы, каверны: Пер. с англ. – М.: Мир, 1964. – 466 с.

23. Бойков, И. В. Приближенные методы вычисления интегралов Адамара и решения гиперсингулярных интегральных уравнений : монография / И. В. Бойков, Н. Ф. Добрынина, Л. Н. Домнин. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. Ун-та, 1996. – 188 с.
24. Бойков И.В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов.Часть вторая. Гиперсингулярные интегралы. – Пенза, Изд-во Пензенского гос Университета, 2009. – 252 с.
25. Бомба А.Я. Методи комплексного аналізу / А.Я. Бомба, С.С. Каштан, Д.О. Пригорницький, С.В. Ярощак. – Рівне: НУВГП, 2013. – 415 с.;
26. Бомба А.Я. Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія / А.Я. Бомба, Ю.Є. Климюк. – Рівне: «Асоль», 2014. – 273 с.
27. Бомба А.Я. Методи теорії збурень прогнозування процесів тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах / А.Я. Бомба, І.М. Присяжнюк, О.В. Присяжнюк. – Рівне: О. Зень, 2017. – 291 с.
28. Бомба А. Я. Моделювання нелінійно збурених процесів очищення рідин від багатокомпонентних забруднень / А.Я. Бомба, А.П. Сафоник. – Рівне: НУВГП, 2017. – 296 с.
29. Бомба А.Я. Моделювання фільтраційних процесів у нафтогазових пластах числовими методами квазіконформних відображень / А.Я. Бомба, А.М. Сінчук, С.В. Ярощак. – Рівне: «Асоль», 2016. – 238 с.
30. Бомба А.Я. Нелінійні задачі типу фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін за умов неповних даних: монографія / А.Я. Бомба, В.І. Гаврилюк, А.П. Сафоник, О.А. Фурсачик. – Рівне: НУВГП, 2011. – 276 с.
31. Бомба А.Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А.Я. Бомба, В.М. Булавацький, В.В. Скопецький. – Київ: Наукова думка, 2007. – 308 с.

32. Бомба А.Я. Нелінійні сингулярно збурені задачі типу «конвекція-дифузія» / А.Я. Бомба, С.В. Барановський, І.М. Присяжнюк. – Рівне: НУВГП, 2008. – 252 с.
33. Бомба А.Я. Обчислювальні технології на основі методів комплексного аналізу та сумарних зображень / А.Я. Бомба, О.М. Гладка, А.П. Кузьменко. – Рівне: «Асоль», 2016. – 283 с.
34. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
35. Бровченко И. Применение методов частиц в задачах с нестуктурированными сетками // Мат. машины и системы. – 2010, №3. – С. 111-115.
36. Бровченко И., Городецкая Н., Мадерич В., Никишов В., Терлецкая К. Взаимодействие внутренних уединенных волн большой амплитуды с препятствием // Прикладная гидромеханика. – 2007, том 9 (81), № 1. – С. 3-7.
37. Бровченко И., Мадерич В. Исследование роли подводных каньонов в выносе наносов из береговой зоны восточного побережья Черного моря // International Journal of Civil and Structural Engineering. – 2011, том 7(2). – С. 39-46.
38. Бровченко И., Мадерич В., Двумерная лаганжевая модель переноса многофракционных наносов в прибрежной зоне моря // Прикладная гидромеханика. – 2006, 8 (81), № 2. – С. 9-17.
39. Бровченко И., Мадерич В., Терлецкая К. Численное моделирование трехмерной структуры течений в районе глубоководных каньонов восточного побережья Черного моря // International Journal of Civil and Structural Engineering. – 2011. – Том 7(2). – С. 47-53.
40. Буржинский В.А. Метод граничных элементов для плоских задач о потенциале с незамкнутыми граничными линиями // Журн.вычисл.матем.и матем.физики. – 1999, Т. 39, № 7. – С. 1169-1179.
41. Бэтчелор Д. Введение в динамику жидкости. – М: Мир, 1973. – 758 с.

42.Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л. Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. – М.: Янус-К, 2001. – 507 с.

43.Гутников В. А., Кирякин В.Ю., Лифанов И.К. и др. О численном решении двумерного гиперсингулярного интегрального уравнения и о распространении звука в городской застройке // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007, Т. 47, № 12. – С. 2088-2100.

44.Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа: Пер. с англ. – М.: Мир – 1986 – 182 с.

45.Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости: Пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 310 с.

46.Ванин В.А. Численное исследование взаимодействия тушки птицы с преградой на основе сеточного и бессеточного методов [Текст] / В.А. Ванин, С.П. Светличный // Вестник национального технического университета «ХПИ», Серия: Математическое моделирование в технике и технологиях. – Х.: НТУ «ХПИ», 2016, №16 (1188). – С. 5-15.

47.Ванин В.А. Вычислительные алгоритмы повышенного порядка слабой аппроксимации для задач газовой динамики // Вісті Академії інженерних наук України, Машинобудування та прогресивні технології. – 2007, №3(33). – С. 185-191.

48.Ванин В.А. Дискретные модели повышенного порядка точности для законов сохранения в механике сплошных сред // Труды XVIII Международного симпозиума МДОЗМФ – 2017, Харьков. – С. 67-70.

49.Ванин В.А. Применение L-функций в задачах построения разностных схем газовой динамики // Вісник НТУ “ХПІ”. – 2004, вип.44. – С.165-172.

50.Ванин В.А., Головченко А.В., Самотой Е.В. Построение и исследование разностных схем повышенного порядка слабой аппроксимации для законов сохранения // Вісник НТУ «ХПІ». Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2010, вип.68. – С. 15-22.

51. Ванин В.А., Григорьев А.А. Моделирование характеристик устойчивой волны переноса упруго–пластической деформации в винтовом стержне // Вісник НТУ «ХПІ». Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2011, вип. 42. – С. 22-36.
52. Ванин В.А., Ляшенко В.П. Метод интегрального представления при построении разностных схем повышенного порядка слабой аппроксимации // Вісник Кременчуцького національного університету ім. М. Остроградського. – 2010, 6(65) ч.1. – С. 24-30.
53. Ванін В.А. Чисельне дослідження птахостійкості лопаток авіаційного двигуна. / В.А. Ванін, С.П. Світличний // Математичне моделювання в економіці: міжнародний науковий журнал. – 2019, № 1 (14). – С. 48-62.
54. Васин П.А. Моделирование трехмерной вихревой структуры / П.А. Васин, Д.И. Черний // Комп'ютерна математика. – 2018, №1. – С. 9-16.
55. Витько В.П., Кондратенко О.В., Черній Д.І. Информационно-аналитическая система прогноза и анализа рисков воздействия интенсивных атмосферных вихревых структур типа смерч/торнадо на экологически опасные объекты // Abstract Book of International conference "Problems of Decision Making under Uncertainties" (PDMU–2003), September 8-12, Kyiv-Alushta 2003, P.171-172.
56. Вітько В.П. Чисельне моделювання еколого–аераційної ситуації в масивах висотної міської забудови / В.П. Вітько, О.В. Кондратенко, Д.І. Черній // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико–математичні науки. – 2002, Вип. 2. – С. 272-277.
57. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. – Санкт–Петербург: «БХВ–Петербург», 2004. – 600 с.
58. Войцеховський С.О. До задачі про динаміку торнадо / С.О. Войцеховський, В.І. Гаркуша, Д.І. Черній // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2004, Вип. 2. – С. 378-381.

59. Войцеховський С. О. Математична та інформаційна модель гідрологічних процесів / С.О. Войцеховський, В.І. Гаркуша, В.П. Витько, О.В. Кондратенко, О.Д. Рябоконенко, О.В. Хорошилов, Д.І. Черній // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2004, Вип. 4. – С. 276-282.
60. Войцеховський С. О. Моделювання динаміки торнадо / С.О. Войцеховський, В.І. Гаркуша, Д.І. Черній // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2004, Вип. 2(91). – С. 81.
61. Воропаев Г.А., Димитриева Н.Ф. Безымпульсная локальная подача раствора полимера в турбулентный пограничный слой. Прикладная гидромеханика. – 2014. Т.16, № 1. – С. 26-34.
62. Воропаев Г.А., Димитриева Н.Ф. Безымпульсная локальная подача раствора полимера в турбулентный пограничный слой. Прикладная гидромеханика. – 2014. Т.16, № 1. – С. 26-34.
63. Воропаев Г.А., Загуменный Я.В. Управление динамическими характеристиками обтекаемого колеблющегося крыла. Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2019. № 8. – С. 87-93.
64. Воропаев Г.А., Розумнюк Н.В. Моделирование нестационарного пограничного слоя на структурированной поверхности. Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2019. № 8. – С. 93-98.
65. Воропаев Г.А., Зайнер-Гундерсен Д. Гидродинамические характеристики колеблющегося крыла. Прикладная гидромеханика. – 2015. Т.17, № 3. – С. 3-9.
66. Воскобійник А.В. Особливості вихрового руху у спряженій течії між групою паль трирядної мостової опори / А.В. Воскобійник, В.А. Воскобійник, О.А. Воскобійник [та інш.] // Прикладна гідромеханіка. – 2009, Т. 11, № 2. – С. 16-29.

67. Воскобойник А.А. Визуализация сопряженного обтекания групповой мостовой опоры / А.А. Воскобойник, А.В. Воскобойник, В.А. Воскобойник // Вісник Донецького Університету, Сер. А: Природничі науки. – 2008, Вип. 1. – С. 219-227.
68. Гандель Ю.В. Математические модели двумерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей. / Ю.В. Гандель, В.Д. Душкін – Харків: Видавництво Академії внутрішніх військ Міністерства внутрішніх справ України, 2012. – 544 с.
69. Гандель Ю.В., Лифанов И.К. Новый подход к решению смешанных краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца / Дифференц. уравнения. – 1998, 34:9. – С. 1246-1253.
70. Гандель Ю.В., Лифанов И.К., Полянская Т.С. К обоснованию метода дискретных особенностей в двумерных задачах дифракции / Дифференц. уравнения. – 1995, 31:9. – С. 1536-1541.
71. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Учебное пособие. – Харьков, ХНУ, 2002. – 92 с.
72. Гаркуша В.І. Квадратурно-різнецеві схеми для задачі Коші з гіперсингулярним інтегралом в правої частині / В.І. Гаркуша, С.І. Ляшко, А.І. Риженко, Д.І. Черній // VIII Міжнарнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта». Тези доповідей (Луцьк-Світязь, 2-4 червня, 2019). – Луцьк, 2019. – С. 19.
73. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
74. Гиневский А.С., Желанников А.И. Вихревые следы самолётов. – М.: Физматлит, 2008. – 170 с.
75. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы (введение в теорию): Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
76. Головенко А.Д. Вычислительные особенности нестационарных аэродинамических задач / А.Д. Головенко, С.А. Голубев, Д.И. Черний //

Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2011, Вип. 1(104). – С. 24-39.

77. Головенко А.Д. Моделирование аэродинамических полей при прогнозировании нестационарных аэрационных процессов в массивах разновысотной застройки / А.Д. Головенко, С.А. Довгий, И.А. Клименкова, Д.И. Черний // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2010, Вип. 13. – С. 37-46.
78. Головенко А.Д. Обчислювальні технології та алгоритми для побудови автоматизованих моделюючих систем в будівельній аеродинаміці // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія Фізико–математичні науки, – 2011, випуск №3. – с. 131-138.
79. Головенко А.Д., Голубев С.О., Черній Д.І. Технології прогнозування аераційних процесів для підтримки прийняття рішень при будівництві промислових зон, висотних та спортивних споруд // XVI International Conference "PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES" (PDMU-2010), Abstracts, October 4-8, 2010, Yalta, Ukraine, P. 49-50.
80. Головенко А.Д., Голубев С.О., Черній Д.І. Технологія виявлення оптимальних режимів функціонування енергогенеруючих систем, прогнозування небезпечних наслідків техногенних впливів та техногенних катастроф // XV International Conference "PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES" (PDMU-2010), Abstracts, May 17-21, 2010, Lviv, Ukraine, P. 62.
81. Головенко А.Д., Довгий С.А., Гаркуша В.И., Черний Д.И. Програмно–моделирующая система для эколого-аэрационной экспертизы промышленных зон и сооружений // Труды XIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2007), Харьков-Херсон, 2007. – С. 117-120.

82. Головенко А.Д., Довгий С.А., Ефимчук В.В., Клименкова И.А., Черний Д.И. Автоматизированная программно-моделирующая система прогнозирования аэрационных и аэродинамических процессов вблизи высотных сооружений // V Міжнародна науково–технічна конференція «Нові технології в будівництві», Тема: «Надійність та безпека висотних будинків і споруд», 28-29 травня 2009 р., Київ, НДІБВ. – С. 111-115.
83. Головенко А.Д., Довгий С.А., Клименкова И.А., Черний Д.И. Моделирование аэродинамических полей при прогнозировании нестационарных аэрационных процессов в массивах разновысотной застройки.// «Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна». – 2010, Вип. 13, № 890. – С. 37-46.
84. Головенко А.Д., Довгий С.А., Клименкова И.А., Черний Д.И. Новые технологии обеспечения автоматизированной эколого–аэрационной экспертизы проектов массивов городской застройки и промышленных зон // Збірник наукових праць VIII Міжнародної науково–практичної конференції «Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях», 7-11 вересня 2009 р., Київ-Харків-АР Крим. – Київ: Видавничій дім «АДЕФ–Україна». – С. 359-367.
85. Головенко А.Д., Довгий С.О., Клименкова І.О. Черній Д.І. Виявлення небезпечних наслідків прийняття необґрунтованих рішень при розробці містобудівельних проектів та проектів промислових зон // International Workshop “PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES” (PDMU-2009), Abstracts, April 27-30, 2009, Skhidnytsia. – С. 193-194.
86. Головенко А.Д., Клименкова И.А., Черний Д.И. Математическое моделирование опасных аэрационных процессов в массивах разновысотной застройки // Труды XIV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2009). Часть 1. – Харьков–Херсон, 2009. – С. 67-70.

87.Головенко А.Д., Черний Д.И. Система автоматизированной эколого–аэрационной экспертизы проектов массивов городской застройки и промышленных зон // Матеріали III Міжнародної конференції «Обчислювальна та прикладна математика», присвяченої пам'яті академіка НАН України І.І. Ляшка, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 11-12 вересня 2009р., Київ. – С. 29.

88.Голубєв С.О. Засоби комп'ютерного моделювання в галузі обчислювальної гідродинаміки / Голубєв С. О., Лебідь О. Г., Черній Д. І. // Математичне моделювання в економіці. – 2019. – №2. – С. 21–39.

89.Гоман О.Г, Карплюк В.И., Ништ М.И., Судаков А.Г. Численное моделирование осесимметричных отрывных течений несжимаемой жидкости. – М.: Машиностроение, 1993. – 288 с.

90.Гоман О.Г. К вопросу о связи плоских и пространственных течений // Динамика сплошной среды с нестационарными границами. – Чебоксары: Чуваш. Ун-т, 1984. – С. 43-53.

91.Горбань В.А., Горбань И.Н., Довгий С.А. Некоторые вопросы численного и физического моделирования отрывных течений // В кн.: Наука – механике, Киев, 1983. – С. 44-55.

92.Горбань В.А., Горбань И.Н., Довгий С.О. О численном моделировании плоских отрывных течений // В кн.: Проблеми гідромеханіки в освоєнні океану, Київ, 1984. – 224 с.

93.Горбань И.Н., Горбань В.А. Гидродинамические характеристики тонкого профиля, движущегося вблизи границы с изломом // Мат. методы мех. жидкости и газа. – Днепропетровск, 1985. – С. 45-51.

94.Горбань І.М. Горбань В.О. Вивчення взаємодії квадратних циліндрів, розташованих тандемом // Журнал Прикладна гідромеханіка. – 2008, Том 82, Випуск 2. – С. 36-47.

95.Горелов Д.Н. Методы решения плоских краевых задач теории крыла //Новосибирск: СО РАН, 2000. – 215 с.

96.Горлин С.М. Экспериментальная аэромеханика. – М.: Высш. школа. 1970. – 432 с.

97.Гринченко В. Т., Мацыпура В. Т., Снарский А. А. Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы. – Киев, Наукова думка, 2005. – 263 с.

98.Гринченко В.Т. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках / В.Т. Гринченко, И.В. Вовк. – К.: Наук, думка, 1986. – 240 с.

99.Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.

100. Гринченко В.Т. О локальных особенностях в математических моделях физических полей / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко // Мат. методы и физ.-мех. Поля. – 1998, 41, №1. – С. 12-34.

101. Грінченко В.Т. Компютер і механіка // Вісник київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки. – 2013, Випуск № 3. – С. 30-33.

102. Грінченко В.Т., Вовк І. В., Маципура В. Т. Основи акустики. – Київ, Наукова думка, 2007. – 640 с.

103. Громадка Т., Лей Ч. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 303 с.

104. Гуржий А. А. Адаптация метода дискретных особенностей к задачам переноса поверхностных загрязнений морскими течениями / А.А. Гуржий, Д.И. Черний, В.В. Процан // Труды XVIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2017, 26-28 июня 2017, Харьков, Украина). – Харьков, 2017. – С. 82-85.

105. Гуржий А.А. Адаптированный метод дискретных особенностей к задаче адвекции пассивной примеси морскими течениями / А.А. Гуржий, Д.И. Черний // Прикладная гидромеханика. – 2009,Т. 11(83), №2. – С. 30-39.

106. Гуржий А.А. Моделирование особенностей процесса распространения поверхностных загрязнений в речных системах / А.А. Гуржий, О.И. Кордас,

Е.И. Никифорович, В.И. Осадчий, Д.И. Черний // V International Scientific Conference «Modern Problems of Mechanics». Abstracts (28-30.08.2019, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Abstracts, Kyiv, Ukraine). – Kyiv, 2019. – P. 28.

107. Гуржий А.А. Моделирование распространения загрязнения на морской поверхности / А.А. Гуржий, Е.И. Никифорович, О.И. Кордас, Д.И. Черний // V Міжнародна науково-практична конференція «Комп'ютерна гідромеханіка». (Інститут гідромеханіки НАН України, 29-30 вересня 2016, Київ). – Київ, 2016. – С. 25-26.

108. Гуржий А.А. Перемешивание пассивной жидкости в двумерных течениях со сложной геометрией ограничивающих поверхностей / А.А. Гуржий, Д.А. Кобзева, Д.И. Черний // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2011, Вип. 14. – С. 112-119.

109. Гуржий А.А. Применение метода дискретных особенностей при составлении краткосрочного прогноза распространения загрязнений на морской поверхности / А. А. Гуржий, О. И. Кордас, Е. И. Никифорович, Д. И. Черний // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – 2019, № 8 (1333). – С. 104-109.

110. Гуржий А.А. Решение задачи о двухмерной адвекции пассивной примеси морскими течениями прогностическим методом / А.А. Гуржий, Д.И. Черний // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2009, Вип. 12. – С. 83-91.

111. Гуржий А.А., Мелешко В.В., Никифорович Е.И., Адриан Р.Дж., Моделирование динамики подковообразного вихря в турбулентном пограничном слое.// Прикладная гидромеханика. – 2006, Т.8. N.2. – С. 26-49.

112. Гуржий А.А., Шалденко А.В. Анализ процессов теплопереноса в прямолинейном канале со вставками при малых числах Рейнольдса // Прикладная гидромеханика. – 2015, Т.17, N.2. – С. 55-66.

113. Гуржий А.А., Шалденко А.В. Анализ вихрей Моффатта внутри прямолинейного канала со вставками при малых числах Рейнольдса // Вісник Харківського національного університету, серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2016, Вып.30. – С. 48-58.

114. Гуржий А.А., Шалденко А.В. Численное моделирование процессов теплопередачи в микроканалах сложной геометрии при ламинарном течении вязкой жидкости // Прикладная гидромеханика. – 2016, Т.18 (90), N.2. – С. 33-46.

115. Гуржій О.А., Шалденко О.В. Аналіз процесів теплопередачі в криволінійному каналі при малих числах Рейнольдса // Вісник Київського университету. – 2015, N.4. – С. 39-42.

116. Гутников В.А., Кирякин В.Ю., Лифанов И.К., Сетуха А.Н. Математическое моделирование аэродинамики городской застройки. – М.: Пасьва, 2002, – 244 с.

117. Гущин В.А. Развитие метода расщепления по физическим факторам для расчета течений несжимаемой жидкости // Численное моделирование в аэрогидродинамике / Под ред. Г.Г.Черного. – М.: Наука, 1986. – С. 90-97.

118. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. – М.: Гостехиздат, 1953. – 415 с.

119. Даева С.Г., Сетуха А.В. О численном решении краевой задачи неймана для уравнения гельмгольца методом гиперсингулярных интегральных уравнений // Вычислительные методы и программирование. Т.16, 2015. – С. 421-435.

120. Динамические системы с разрывными коэффициентами / В.П. Диденко, И.И. Ляшко, – Киев: Вища школа. – 1977.

121. Довгий С.А. Аэрогидродинамика движдущихся крыльев. – К.: «Юстон», 2016. – 276 с.

122. Довгий С. О. Метод дискретних особливостей в задачах математичної фізики і механіки / Довгий С. О., Черній Д. І. // V International Scientific Conference «Modern Problems of Mechanics». Abstracts (28-30.08.2019, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Abstracts, Kyiv, Ukraine). – Kyiv, 2019. – P. 32.

123. Довгий С. А. Алгоритмы метода дискретных особенностей и вычислительные технологии / Довгий С.А., Черний Д. И. // Труды XVIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2017, 26-28 июня 2017, Харьков, Украина). – Харьков, 2017. – С. 86-91.

124. Довгий С.А. Апробация УМДВ для класса задач о колебаниях крыла в вязкой среде с ограниченным решением на кромках / С.А. Довгий, А.В. Шеховцов // Вісник Харк. нац. Ун-ту. Сер. "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління", вип. 12. – 2009, № 863. – С. 111-128.

125. Довгий С.А. Математическое моделирование пространственных струйных эффектов / С.А. Довгий, А.В. Фломбойм, Д.И. Черний // Комп'ютерна математика. – 2016, №1. – С. 27-35.

126. Довгий С.А. Метод сингулярних интегральных уравнений и вычислительные технологии / С.А. Довгий, И.К. Лифанов, Д.И. Черний. – К.: «Юстон», 2016. – 380 с.

127. Довгий С. О., Красовський Г. Я., Радчук В. В., Трофимчук О. М., Андреєв С. М. та інш. Сучасні інформаційні технології екологічного моніторингу Чорного моря. – К.: Інформаційні системи. – 2010. – 260 с.

128. Довгий С.О., Лялько В.І., Трофимчук О.М., Федоровський О.Д. та інші. Інформатизація аерокосмічного землезнавства.– К.:Наукова думка,2001.– 607 с.

129. Довгий С.А., Черній Д.І. Нелинейное взаимодействие вихревых структур.//Труды XVI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013), Харьков-Херсон, 2013, С. 155-156.

130. Довгий С.А., Черний Д.И., Воскобойник А.А., Воскобойник В.А. Лабораторное исследование течений на модели акватории Керченского пролива.// Матеріали 15-ї Міжнародної науково-практичної конференції: «Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях», 3-6 жовтня 2016р., Пуща-Водиця, Київ, с.11-12.

131. Довгий С.А., Черний Д.И. О математическом решении для прогнозирующих систем в области гидрологии.//13 Міжнародна науково-практична конференція: «Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях», 29-30 вересня 2014р., Київ, Пуща-Водиця, 2014, Збірник наукових праць, с.5-9.

132. Довгий С.А., Гаркуша В. И., Головенко А.Д., Кудляк В.М., Фломбойм А.В., Черний Д.И. Технологии визуального и графического представления данных в задачах экспериментальной и математической физики // Збірник наукових праць X Міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях», 5-9 вересня 2011р., Київ-Харків-АР Крим. – С. 128-135.

133. Довгий С.А., Копейка О.В., Циганюк А.И. Численное моделирование работы роторов ветроагрегатов // Математические методи механики жидкости и газа. Днепропетровск. – 1995.

134. Довгий С.А., Лифанов И.К. Методы решения интегральных уравнений. Теория и приложения. – К.: Наукова думка, 2002. – 344 с.

135. Довгий С.О. Вихрові течії ідеальної рідини. Класичні моделі та метод дискретних вихорів / С.О. Довгий, Г.Г. Буланчук, О.М. Буланчук. – К.: Інститут обдарованої дитини НАПН України, 2016. – 342 с.

136. Довгий С.О. Еволюція вихорових структур в атмосфері та водних потоках. – К.: Видавництво “Тираж”, 1997. – 119 с.

137. Довгий С.О. Методи прогнозування в системах підтримки прийняття рішень / С.О.Довгий, П.І.Бідюк, О.М.Трофимчук, О.І.Савенков. –К.: «Азімут-Україна», 2011. – 608 с.

138. Довгий С.О., Головенко А.Д., Черній Д.І. Обчислювальні технології для визначення аеродинамічних навантажень та впливів // VI Міжнародна науково–технічна конференція «Будівельні конструкції спортивних та просторових споруд: сьогодення та перспективи розвитку», Тези доповідей, 6-10 вересня 2010р., Україна. – Київ: Видавництво «Сталь», 2010. – С. 196-197.

139. Довгий С.О., Ліфанов І.К. Метод сингулярних інтегральних рівнянь. Теорія та застосування. – К.: “Наукова думка ”, 2004. – 510 с.

140. Дослідження динаміки вихрових структур в кутовій області та поблизу поверхні з заглибленням / В.О. Горбань, І.М. Горбань // Прикладна гідромеханіка. – 1999, Т. 1, № 1. – С. 4-11.

141. Дубровин Б.А., Новиков С.П, Фоменко А.Т. Современная геометрия. – М.: Наука,1979. – 760 с.

142. Дынникова Г.Я. Движение вихрей в двумерных течениях вязкой жидкости // Известия РАН. МЖГ. – 2003, №5. – С. 11-19.

143. Дынникова Г.Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье–Стокса // ДАН. – 2004, Т.399. №1. – С. 42-46.

144. Дынникова Г.Я. Расчет трехмерных течений несжимаемой жидкости на основе дипольного представления завихренности // ДАН. – 2011, Т. 437, №1. – С. 35-38.

145. Желанников А.И. Особенности распространения вихревого следа за воздушными судами на режимах взлёта и посадки при наличии бокового ветра. // Научный вестник МГТУ ГА. – 2016, № 223(1). – с. 5-11.

146. Загуменный Я.В., Воропаев Г.А. Численное моделирование обтекания нестационарно движущихся тел // Компьютерная математика. – 2018, №2. – С. 13-20.

147. Зайцев О.В. Метод розв’язання прямої та оберненої крайових задач про невісесиметричне обтікання конічних тіл зі вдувом / О.В. Зайцев, О.В. Хорошилов, Д.І. Черній // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія математика-механіка. – 2004, Вип. 14. – С. 176-184.

148. Иванов В.А. Математическое моделирование динамических процессов в зоне море- суша / В.А. Иванов, В.В.Фомин // Севастополь, НВЦ «ЕКОСІ–Гідрофізика». – 2008. – 363 с.

149. Ищенко С.А., Жданов А.И., Давидов А.Р. Экспериментальные исследования ветровых нагрузок на плохо обтекаемые высотные сооружения // Аэрогидродинамика: проблемы и перспективы. Сб. ст. ХАИ. – Х.: ХАИ, 2004. – С. 33-42.

150. Келдыш М.В. Избранные труды: Механика. – М.: Наука, 1985. – 567 с.

151. Кирякин В.Ю., Сетуха А.В. О сходимости вихревого численного метода решения трехмерных уравнений Эйлера в лагранжевых координатах // Дифференциальные уравнения. – 2007. Т. 43, № 9. – С. 1276.

152. Кобрин В.Н., Соловьев О.В., Чмовж В.В. Анализ процесса формирования вихревых следов за летательными аппаратами // Теоретичні основи розробки систем озброєння / Системи озброєння і військова техніка. – 2013, № 2(34). – С. 93-98.

153. Копейка О.В. Исследование влияния вязкости на гидродинамические характеристики кореблющегося профиля крыла //Тез. докл. VIII Республиканской конференции Бионика- 89. – Киев, 1989. – С. 139.

154. Копейка О.В. Теоретические исследования гидродинамических характеристик двух колеблющихся тонких крыльев при наличии твѐрдой поверхности // В кн:Численные методы механики сплошной среды. – Абакан, 1989. – С. 71-72.

155. Копейка О.В., Щипцов А.А. К задаче о колебаниях биплана // В кн: Гидродинамика средств освоения и изучения океана. Тез. докл. Киев, Часть 2, 1988. – С. 126.

156. Костюков А. А. Взаимодействие тел, движущихся в жидкости / А. А. Костюков – Л.: Судостроение, 1972. – 312 с.

157. Кочин Н.Е. Кибель И.А., Розе Н.В.Теоретическая гидромеханика: В 2 ч. – М.: ИФМЛ, 1963. – Ч. 1. – 583 с.

158. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика: В 2 ч. – М.: ИФМЛ, 1963. – Ч. 2. – 728 с.

159. Краснопольская С.С., Швец А.Ю. Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. – М. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008 – 280 с.

160. Крылов, В.И. Приближенное вычисление интегралов. – М. : ГИФМЛ, 1959. – 327 с.

161. Лаврентьев М.А. О построении потока, обтекающего дугу заданной формы // Труды Центрального аэрогидродинамического института. Выпуск 118. – М., 1932. – С. 1-53.

162. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного: Учеб. пособие для ун-тов. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

163. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1977. – 408 с.

164. Ладиков-Роев Ю.П. Математические модели сплошных сред / Ладиков-Роев Ю.П., Черемных О.К. – К.: Наукова думка, 2010. – 552 с.

165. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1988. – 532 с.

166. Лебедева С.Г., Сетуха А.В. О численном решении полного двумерного гиперсингулярного интегрального уравнения методом дискретных особенностей // Дифференциальные уравнения. – 2013, Т. 49, № 2. – С. 223-233.

167. Лебедь А.Г. Математические, вычислительные и технологические решения для выявления и использования нелинейных закономерностей в ветроэнергетике / С.А. Довгий, С.А. Голубев, А.Г. Лебедь, Д.И. Черний // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: Труды XV Международного симпозиума (МДОЗМФ-2011), Харьков-Херсон, 2011. – С. 175-180.

168. Лебедь А.Г. Технологии прогнозирования эволюции физических процессов для систем поддержки принятия решений / С.А. Довгий, А.Г. Лебедь, И.Н. Литвин, Д.И. Черний // Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях: 10 Міжнародна науково–практична конференція (5–9 вересня 2011 р.), Київ-Харків-АР Крим, 2011. – Збірник наукових праць. – С. 5-36.

169. Лебедь А.Г. Характеристики вихревого течения за ротором Дарье / С.А. Голубев, В.П. Каян, А.Г. Лебедь, Д.И. Черний // Методы дискретных особенностей в задачах математической физики: Труды XIV Международного симпозиума (МДОЗМФ-2009). – Харьков-Херсон, 2009. – Ч. 2. – С. 382.

170. Лебідь О.Г. Обчислювальні технології моделювання фізичних та геодинамічних процесів / С.О. Довгий, В.І. Гаркуша, О.Г. Лебідь, І.М. Литвин, Д.І. Черній // Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях: 11 Міжнародна науково–практична конференція (16-21 вересня 2012р.), Київ-Харків-АР Крим, 2012. – Збірник наукових праць. – С. 274-281.

171. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.

172. Лифанов И.К., Сетуха А.В. О сингулярных решениях некоторых краевых задач и сингулярных уравнений // Дифференциальные уравнения – 1999, Т. 35, N 9. – С. 1227-1241.

173. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 904 с.

174. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твёрдого тела с полостями, содержащими жидкость. – К.: Наукова думка, 1990. – 296 с.

175. Луковский И.А. Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы. – К.: Наукова думка, 1975. – 135 с.

176. Ляшко И.И., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А. Методы вычислений.– К.: Вища школа, 1977. – 408 с.

177. Мадерич В., Беженар Р., Бровченко И. Трехмерное моделирование взаимодействия волн и течений // Прикладна гідромеханіка. – 2010, 12(84), №3. – С. 38-46.

178. Мадерич В.С, Терлецкая Е.В., Бровченко И. Моделювання різномасштабних процесів формування придонних і шельфових вод у південній частині моря Ведделла. Український Антарктичний Журнал. – 2017, № 16(3). – С. 45-51.

179. Мадерич В.С., Никишов В.И., Стеценко А.Г. Динамика внутреннего перемешивания стратифицированной среды. – К.: Наукова думка, 1988. –256 с.

180. Майборода А.Н. Математическая модель гидродинамики для тела, пересекающего свободную поверхность идеальной весомой жидкости // Докл. Ан УССР. Сер. А. – 1991, № 5. – С. 50-53.

181. Мелешко В.В., Гуржий А.А., Краснопольская Т.С. Вихревые кольца: история и современность // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011, 54, № 4. – С. 184-214.

182. Мелешко В.В., Гуржий А.А., Краснопольская Т.С. Смешивание вязкой жидкости в прямоугольных микроканалах // Гидродинамика и акукстика. – 2018, N2. – С. 191-222.

183. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур // К.: Наукова думка, 1993. – 280 с.

184. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 210 с.

185. Метод мажорантных областей в теории фильтрации / И.И. Ляшко, И.М. Великоиваненко, В.И. Лаврик, Г.Е. Мистецкий. – Киев: Наук. думка. – 1974.

186. Милн-Томпсон Л.М. Теоретическая гидромеханика. – М.: Мир, 1964. – 655 с.

187. Мищенко В.В. Чисельне моделювання процесу шунтирування у плазмі / В.В. Мищенко, Г.В. Сандраков, Д.І. Черній // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико–математичні науки. – 2006, Вип. 3. – С. 235-239.

188. Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. – Новосибирск: Наука, 1977. – 420 с.

189. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Из-во физ.-мат. лит-ры, 1962. – 599 с.

190. Найфэ А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.

191. Наконечний О.Г. Моделювання та аналіз глобальних біосферних процесів/ О.Г. Наконечний, О.М. Трофимчук, І.В. Трофимова, Д.І. Черній. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2002. – 92 с.

192. Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1988. – 255 с.

193. Павловский Р.Н., Іщенко С.О., Жданов О.І., Дегтярьов В.В. Визначення умов виникнення аеропружних коливань погано обтічних конструкцій у трубному експерименті // Вісник НАУ. – 2006, №1 (27). – С. 6469.

194. Петрик М.Р., Хіміч О.М., Бойко І.В., Михалик Д.М., Петрик М.М., Ковбашин В.І. Математичне моделювання теплопереносу та адсорбції вуглеводнів внанопористих цеолітних каталізаторах систем нейтралізації

відпрацьованих газів. – Національна академія наук України. Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова, 2017. – 280 с.

195. Положий Г.Н. Теория и применение p-аналитических и p,q-аналитических функций. – Киев: Наук.думка, 1973. – 424 с.

196. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. М.: Изд. Иностранной литературы,1949. – 520 с.

197. Приходько А.А. Моделирование нестационарных турбулентных течений при обтекании подвижных тел сложной геометрии на основе уравнений Навье–Стокса // В.А. Дзензерский, А.А. Приходько, Н.М. Хачапуридзе, Д.А. Редчиц / Вісник Харківського національного університету. – 2009, Вип. 11, № 847. – С. 283-286.

198. Приходько А.А. Компьютерные технологии в аэрогидромеханике и тепломасообмене. – Киев: Наукова думка, 2003. – 380 с.

199. Приходько А.А., Алексеенко С.В. Обледенение в кучевых и слоистых облаках // Комп'ютерно–вимірювальні технології контролю та управління ракетно-космічної техніки / Під загальною редакцією проф. Малайчука В.П. / Монографія – Дніпро: Ліра, 2018. – 344 с.

200. Рекомендации по оценке аэрации территории в жилой застройке г.Москвы / Отв.ред. Лифанов И.К. – М.: «Макс–Пресс», 2006. – 160 с.

201. Реттер Э.И. Архитектурно–строительная аэродинамика. – М.: «Стройиздат», 1986. – 194 с.

202. Риженко А.І. Обґрунтування методу сіток для параболічних варіаційних нерівностей другого порядку з обмеженням у середені області // А.І. Риженко, В.С. Саженюк, Д.І. Черній / Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2006, Вип. 3. – С. 245-249.

203. Риццо Ф. Метод граничных интегральных уравнений – современный вычислительный метод прикладной механики // Механика. Новое в зарубежной науке. – М.: Мир, 1978. – с. 11-17.

204. Роуч А. Вычислительная гидродинамика: Пер.с англ. – М.: Мир. 1980. – 616 с.

205. Сарпкайя Т. Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988) // Современное машиностроение. Серия А. – 1989, №10. – С. 1-60.

206. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1981. – 478 с.

207. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М.: Наука, 1980. – 449 с.

208. Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А. Колебания и волны в слоистых средах. – К.: Наукова думка, 1990. – 222 с.

209. Селезов И.Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. – Наукова думка, 1989. – 250 с

210. Сергієнко І.В., Петрик М.З., Хіміч О.М., Кане Д., Михалик Д.М., Леклерк Д., Фресар Ж. Математичне моделювання масопереносу в середовищах частинок нанопористої структури. – Київ: Національна академія наук України, Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова, 2014. – 208 с.

211. Сетуха А.В. Обоснование метода дискретных вихрей в задаче о движении конечной вихревой пелены при аналитических начальных условиях // Дифференциальные уравнения. – 1996, Т. 32, № 9. – С. 1272-1279.

212. Сетуха А.В. Трехмерная краевая задача Неймана с обобщенными граничными условиями и уравнение Прандтля // Дифференциальные уравнения. – 2003, Т. 39, № 9. – С. 1208-1208.

213. Скопецкий В.В., Волох Л.В. Математическое моделирование процесса фильтрационной консолидации водонасыщенных случайно–неоднородных грунтовых массивов / В.В. Скопецкий, Л.В. Волох // Кибернетика и системный анализ. – 2008, Т. 44, № 1. – С. 89-100.

214. Теоретичні основи і методи створення наукоємних моделюючих програмних систем [Текст] : автореф. дис. . д-ра техн. наук : 01.05.02 / Міщенко Віктор Олегович ; Харк. нац. Ун-т ім. В. Н. Каразіна. – Х., 2013. – 35 с.

215. Уолш Дж.Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. – М.: Изд. иностранной лит-ры, 1961. – 508 с.

216. Фломбойм А. В. Вычислительные технологии моделирования эффекта «кроссовера» для затопленных струй / А.В. Фломбойм, Д.И. Черний // ІІІ Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика», присвячена пам’яті академіка НАН України І. І. Ляшка. Матеріали конференції (Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 11-12 вересня 2009 р.). – Київ, 2009. – С. 67.

217. Химич А.Н., МолчановИ.Н., Попов А.В., Чистякова Т.В., Яковлев М.Ф. и другие. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики. – Киев: Наукова думка, 2008. – 152 с.

218. Черний Д.И. Вычислительные технологии для метода дискретных вихрей / Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – 2016, № 6 (1178). – С. 116-123.

219. Черний Д.И. Вычислительные технологии для метода дискретных особенностей в гидродинамике / Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2016, Вип. 32. – С. 75-83.

220. Черний Д.И. Интеграл типа Коши-Лагранжа для нестационарных течений типа Hele-Shaw.// Труды XIV Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2009).- Часть 1, Харьков-Херсон, 2009, с. 185-187.

221. Черний Д.И. Интеграл уравнений движения для нестационарных слоистых течений вязкой несжимаемой жидкости. //Матеріали ІІІ Міжнародної конференції «Обчислювальна та прикладна математика», присвяченої пам’яті академіка НАН України І.І.Ляшка, Київський

національний університет імені Тараса Шевченка, 11-12 вересня 2009р., Київ, с.71.

222. Черний Д. И. Математическая модель течения в мелководной акватории / Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2016, Вип. 29. – С. 78-86.

223. Черний Д. И. Моделирование течений в акватории Керченского пролива / Д.И. Черний, С.А. Довгий // Колективна монографія за матеріалами 16-ї Міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях» (Київ, Пуща-Водиця, 3-6 жовтня 2017р.). – Київ: «Юстон», 2017. – С. 18-21.

224. Черний Д. И. Экспериментальное и математическое моделирование слоистых течений в плоском канале / Д.И. Черний, А.А. Воскобойник, В.А. Воскобойник // V Міжнародна науково-практична конференція «Комп'ютерна гідромеханіка». (Інститут гідромеханіки НАН України, 29-30 вересня 2016, Київ). – Київ, 2016. – С. 68-69.

225. Черний Д.И, Довгий С.О., Головенко А.Д. Особенности моделирования аэродинамики высотной застройки и строительных конструкцій // Труды XII Международного симпозиума МДОЗМФ'2005, г.Херсон-2005, С.375-377.

226. Черній Д.І. Аналитические решения для вязких слоистых течений.//Труды XVI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013), Харьков-Херсон, 2013, С. 386-388.

227. Черний Д.И, Довгий С.А., Головенко А.Д. Особенности моделирования аэродинамики высотной застройки и строительных конструкций // Труды XII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ–2005). – Херсон, 2005. – С. 375-377.

228. Черний Д.И. О проблемах определения локальных и интегральных характеристик при решении начально–краевых задач с подвижными границами. // Труды XIII Международного симпозиума МДОЗМФ-2007. – Харьков-Херсон, 2007. – С. 315-318.

229. Черний Д.И. Аппроксимация решения начально–краевой задачи с подвижными границами // Обчислювальна та прикладна математика. – Київ: Київський університет. – 1997, Вип. 2(82). – С.112-123.

230. Черний Д.И. Метод и алгоритм вычисления поля давления при использовании МДО // Труды XIII Международного симпозиума МДОЗМФ–2007. – Харьков-Херсон, 2007. – С. 319-322.

231. Черній Д.І. Про похідні для інтегральних представлень // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико–математичні науки. – 2016, Вип. 3. – С. 111-116.

232. Черній Д.І. Програмна система для дослідження аерогідродинамічних процесів // Д.І. Черній, В.І. Гаркуша, А.І. Рижинко, О.Ф. Кашпур / Наукові розробки Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Частина 1. Природничі науки. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2009. – С. 137.

233. Черній Д.І., Головенко А.Д. Технологія експрес-прогнозу нестаціонарних нелінійних аераційних та гідрологічних процесів // XIII International Workshop “PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES” (PDMU-2008), Abstracts, September 22-27, 2008, Crimea (Novy Svit),Ukraine, P.127-128.

234. Черній Д.І. Метод побудови математичної моделі шаруватих течій // Екологічна безпека та природокористування, № 1 (33), 2020. – С.115-130.

235. Черній Д.І., Гаркуша В.І., Головенко А.Д., Кашпур О.Ф., Риженко А.І. Технології прогнозування наслідків небезпечних техногенних впливів та катастроф // XVII International Conference International Workshop “PROBLEMS

OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES” (PDMU-2011), Abstracts, May 23-27, 2011, Skhidnytsia, P. 174-176.

236. Чжен П. Отрывные течения. – М.: Мир,1973. – 280 с.

237. Шеховцов А.В. Инерционно–вихревой принцип генерации усилий на крыльях насекомых / Прикладная гидромеханика. – 2011, Том 13 (85), № 1. – С. 61-76.

238. Шкадов В.Я. Течения вязкой жидкости / В.Я. Шкадов, З.Д. Запрянов // М.: Изд-во Моск.ун-та, 1984. – 200 с.

239. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 710 с.

240. Alekseenko S.V. Prikhod’ko A.A., Mathematical Modeling of Ice Body Formation on the Wing Airfoil Surface // Fluid Dynamics, 2014, Vol. 49, No. 6, P. 715-732.

241. Alekseyenko S.V., Prykhodko O.A. Numerical simulation of icing of a cylinder and an airfoil: model review and computational results // TsAGI Science Journal. Volume 44, 2013. Issue 6. – P. 761-805.

242. Barker A.I. Finite element computational fluid mechanics – New York, McGraw-Hill, 1983. – P. 184.

243. Baskova O., Voropaiev G. Investigation of flow structure and heat exchange formation in corrugated pipes at transient Reynolds numbers. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2017. Vol. 3/8 (87). P. 40-45.

244. Gavrilyuk I., Makarov V., Chapko R. On the numerical solution of linear evolution problems with an integral operator coefficient // Journal of Integral Equations and Applications.– 1999.–11.– No1.– P. 37-56.

245. Chapko R. The numerical solution of the evolution problem of the second order in time on the closed smooth boundary // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2002. – 145. – P. 493-503.

246. Chapko R., Kress R. A hybrid method for inverse boundary value problems in potential theory // Journal of Ill-Posed and Inverse Problems. – 2005. – 13. – P. 1-14.

247. Chapko R., Johansson B.T. An alternating boundary integral based method for inverse potential flow around immersed bodies // Journal of Numerical and Applied Mathematics. – 2009. – 97. – P. 10-25.

248. Chapko R., Vavrychuk V. On the numerical solution of a mixed initial boundary value problem for the heat equation in a double-connected planar domain // Journal of Numerical and Applied Mathematics. – 2009. – 97. – P. 26-38.

249. Cherniy D. On a Model of Viscous Flow / Cherniy D. // XXVIII International Conference «Problems of Decision Making under Uncertainties». Abstracts (PDMU-2016, August 25-35, 2016, Brno, Czech Republic). – Kyiv, 2016. – P. 132-133.

250. Cherniy D.I. A Circulation Flow in Sea Strait Simulation./ Stanislav A. Dovgiy, Dmytro I. Cherniy // Тези науково-практичної конференції «Комп'ютерна гідромеханіка», м. Київ, 30 вересня - 01 жовтня 2008р., Інститут гідромеханіки НАН України, с.20-21.

251. Cherniy D.I. Mathematical modeling of impurity propagation in sea channels. / Cherniy D.I., Dovgiy S.A. , Gourjii A.A. //Матеріали III Міжнародної конференції «Обчислювальна та прикладна математика», присвяченої пам'яті академіка НАН України І.І.Ляшка, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 11-12 вересня 2009р., Київ, с.11.

252. Cherniy D. One Case of the Analytical Solution of the Navier–Stokes Equation/ Cherniy D. // XVII International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation". Abstracts of Conference Reports (DSMSI-2015, May 27-29, 2015, Kiev, Ukraine). – Kyiv, 2015. – P. 87.

253. Cherniy D. The Transformation to Discrete Singularities / Cherniy D. // XXX International Conference «Problems of Decision Making under Uncertainties» dedicated to 80-th anniversary of Professor Yurii Yermoliev. Abstracts (PDMU-2017, August, 14-19, 2017, Vilnius, Lithuania). – Kyiv, 2017. – P. 32-33.

254. Cherniy D. The Transformation to Discrete Singularities/ Cherniy D. // XXIX International Conference «Problems of Decision Making under Uncertainties».

Abstracts (PDMU-2017, May 10-13, 2017, Mukachevo, Ukraine). – Kyiv, 2016. – P. 30-31.

255. Cherniy D. The Vortex Model of a Viscid Wall's Layer / Cherniy D., Dovgiy S., Meleshko V. // IUTAM Symposium on ”Vortex Dynamics: Formations, Structure and Function”. Abstract Book (March 10-14, 2013, Centennial Hall, Kyushu University School of Medicine, Fukuoka, Japan). – 2013. – P. 126-127.

256. Cherniy D. An algorithm for finding similar objects in an image / Dmytro I. Cherniy, Yaroslav M. Linder, Volodymyr T. Matvienko, Volodymyr V. Pichkur // 2019 IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory. Conference Proceedings (IEEE ATIT 2019, 18.12.2019 – 20.12.2019, Kyiv, Ukraine). – Kyiv, 2019. – P. 365-368.

257. Cherniy D. Computing technologies of the discrete singularities method/ Cherniy D. // XXVII International Conference “Problems of Decision Making under Uncertainties”. Abstracts (PDMU-2016, May 23-27, 2016, Tbilisi-Batumi, Georgia). – Kyiv, 2016. – P. 35-36.

258. Cherniy D. Development Wake Behind of a Moving Grid and Computational Technologies / Cherniy D., Dovgiy S. // the 7th Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations. Proceedings (BBVIV-7, Carry-le-Rouet (Marseille), France, 3-6 July, 2018). – P. 79-80.

259. Cherniy D. I. Modeling of complex fluid dynamics with phase transitions / Sandrakov G. V., Cherniy D. I., Meleshko V. V. // Fluid Mechanics Conference. Abstracts. Volume 2 (EFMC6 KTH-EUROMECH, Royal Institute of Technology, Stockholm, June 26-30). – Stockholm, 2006. – P. 330. URL: http://www2.mech.kth.se/efmc6/web_vol1.pdf

260. Cherniy D. I. The vortex model of circulation flow in sea channel / Cherniy D. I. // IUTAM Symposium «150 Year of Vortex Dynamics». Proceedings (Technical University of Denmark, Oktober 12-16, 2008). – Copenhagen: Springer, 2008. – P. 5.

261. Cherniy D. I. Topological Aspects of the Vortex Structure of Tornado / Cherniy D. I., Meleshko V. V., Dovgiy S. A. // IUTAM-Symposium «Hamiltonian dynamics. Vortex structure. Turbulence». Book of Abstracts (Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow, August 25-30, 2006). – Moscow, 2006. – P. 69-71.

262. Cherniy D. Interaction of Group of Bridge Piers on Scour. /Andrey Voskoboinick, Vladimir Voskoboinick, Vladimir Turick, Oleksandr Voskoboinyk, Dmytro Cherniy, and Lidia Tereshchenko/In book: Advances in Computer Science for Engineering and Education III, Volume 1247, Springer Nature Switzerland AG, ISSN 2194-5357 ISSN 2194-5365 (electronic) Advances in Intelligent Systems and Computing ISBN 978-3-030-55505-4 ISBN 978-3-030-55506-1 (eBook), P. 3-17.

263. Cherniy D. Methods of geodynamic processes simulation as a means of forecasting in decision support systems / Cherniy D., Trofymchuk O. // XXXI International Conference «Problems of Decision Making under Uncertainties». Abstracts (PDMU-2018, 3-6 July 2018, Baku-Lenkoran, Azerbaijan). – Kyiv, 2018. – P. 79-80.

264. Cherniy D. Numerical methods for the Cauchy problem with hypersingular integral on the right side. / Cherniy D., Voloshchuk S. // XXXV International Conference “Problems of Decision Making under Uncertainties”. Abstracts (PDMU-2020, 11-15 May 2018, Baku-Sheki, Azerbaijan). – Kyiv, 2020. – P. 30-31.

265. Cherniy D. Numerical simulation of impurity propagation in sea channels / D. Cherniy, S. Dovgiy, A. Gourjii // Bulletin of the American Physical Society. 62–nd Annual Meeting of the APS division of Fluid Dynamics (Minneapolis, Minnesota, USA, November 22-24, 2009). – Vol. 54, 19. – P. 149.

266. Cherniy D. One of Partial Solutions of the Navier-Stokes / Cherniy D. // XXIV International Conference «Problems of Decision Making under Uncertainties». Abstracts (PDMU-2014, September 1-5, 2014, Cesky Rudoles, Czech Republic). – Kyiv, 2014. – P. 29-30.

267. Cherniy D. Transformation of discrete singularities in the numerical method for singular equations / Cherniy D., Dovgiy S. // International Conference

«Ukrainian Conference on Applied mathematics» dedicated to the 100th birth anniversary of professor Olexander Kostovskiy. Proceeding (UCAM-2017, 28-30, September, 2017, Lviv, Ukraine). – Lviv: PAIS, 2017. – P. 31-33.

268. Cherniy D.I. Topological aspects of the tornado problem / Cherniy D. I., Meleshko V. V., Dovgiy S. O. // 21-st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Abstract Book (August 15-21, 2004, Warsaw, Poland). – Warsaw, 2004. – P. 176.

269. Dovgiy S. A. An Improved Vortex Lattice Method for Nonstationary Problems / S. A. Dovgiy, A. V. Shekhovtsov // Journal of Mathematical Sciences. – 2001. – Vol. 104, № 6. – P. 1615-1627.

270. E. Yu. Bannikova, V.M.Kontorovich, S. A. Poslavsky. Acceleration and ejection of ring vortices as a mechanism for formation of jet components in AGN. // Astrophysics. – 2010. – 53, №2, – P. 174-188.

271. Ginevsky A. S., Zhelannikov A. I. Vortex wakes of Aircrafts. – Springer Verlag Berlin, Heidelberg, 2009. P. 154.

272. Golubiev S. The Structure of a Vortex Wake Behind Vertical Wind Turbines as a Criterion for the Efficiency / Golubiev S., Dovgiy S., Lebid O., Cherniy D. // the 7th Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations. Proceedings (BBVIV-7, Carry-le-Rouet (Marseille), France, 3-6 July, 2018). – P. 163-165.

273. Dovgiy S. O. Algorithms of the Discrete Singularity Method for Computing Technologies/ Dovgiy S. O., Lyashko S. I., Cherniy D. I. // Cybernetics and Systems Analysis. – 2017. – Vol. 53, 6. – P. 950-962.

274. Dyyak I.I., Prokopyshyn I.I. and Yashchuk Yu.O. A Combined Algorithm of Decomposition of a Domain and h-Adaptation for the Solution of Contact Problems of Elasticity Theory // Journal of Mathematical Sciences, Vol. 174, No. 4, February, 2014. – p. 101-117.

275. Gorban I. Gorban V. Dynamics of vortices in near–wall flows:eigenfrequencies, resonant properties, algorithms of control// AGARD Report, 1998, V827, P. 15–11.

276. Gourjii A.A., van Heijst F.J.F.,Zannetti L. Two-dimensional vortex pair interaction with wedge // Вісник Харківського національного університету, серія "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління". – 2016, Вып. 31, N1. – с.16-37.

277. Grigorev M.A., Zhelannikov A. I., Zamyatin A.N., Rogozin V. Airflow visualization during research of Large Scale Vortex Flows. ICAS 2016, CONGRESS INFORMATION. 30th Congress of the International Council of the Aeronautical Science in Daejeon, Korea, September 2016. P. 1-7. http://meetings.aps.org/Meeting/DFD09/Session/HT.10.

278. Jones S.W., Thomas O.M., Aref H. Chaotic advection by laminar flow in a twisted pipe // Journal of Fluid Mechanics. – 1989. – Vol.209. – P. 335-357.

279. Flor J.B., van Heijst G.J.F. An experimental study of dipolar vortex structures in a stratified fluid // Journal of Fluid Mechanics. – 1994. – Vol.279. – P. 101-133.

280. Kambe T., Nakamura F., Huttori Y. Kinematical instability and line–stretching in relation to the geodesis of fluid motion.//Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasma. – Unoversity of Califirnia at Santa Barbara,USA, 1991, Kluwer Academic Publishers, 1992. – P. 493-504.

281. Kordas O. A study on mathematical short–term modelling of environmental pollutant transport by sea currents: The Lagrangian approach / O. Kordas, A. Gourjii, E. Nikiforovich, D. Cherniy // Journal of Environmental Accounting and Management. – 2017. – Vol. 5, Issue 2. – P. 87-104.

282. Leonard A. Vortex methods for flow simulation // Journal of Computational Physics. 1980. N 37. P. 289-335.

283. Klyushin D.A., Lyashko S.I., Nomirovsky D.A., Petunin Yu.,I., Semenov V.V. Generelized solutions of operator equations and extreme elements. New York; Dordrecht; Heidelberg; London: Springer, 2012. 200 p.

284. Lyashko S.I., Nomirovskii D.A. Generalized solutions and optimal controls in systems describing the dynamics of a viscous stratified fluid. Differential Equations. 2003. Vol. 39, N 1. P. 90–98.

285. Lyashko S.I., Nomirovski D.A., Generalized solvability and optimization of parabolic systems in domains with thin weakly permeable inclusions. Cybernetics and Systems Analysis. 2002. Vol. 39, N 5. P. 737–745.

286. Maderich V., Brovchenko I., Terletska E., Hutter K Numerical simulations of the nonhydrostatic transformation of basin-scale internal gravity waves and wave enhanced meromixis in lakes Nonlinear internal waves in lakes. – Springer. Series: Advances in Geophysical and Environmental Mechanics. – 2012. – P. 193-276.

287. Meleshko V. V. The circulation model of vortex flow of a viscid wall layer / Vyacheslav V. Meleshko, Dmytro I. Cherniy, Stanislav A. Dovgiy // 3rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Abstract Book (23-rd ICTAM 2012, Beijing, China, August 19-24, 2012). – Beijing, 2012. – P. 101.

288. MeleshkoV.V., Aref H. A bibliography of vortexs dynamics 1858-1956 // Advances in Applied Mechanics, 2007,41, P. 197-291.

289. Moffat H.K. Relaxation under topological constraints //Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasma. – Unoversity of Califirnia at Santa Barbara,USA, 1991, Kluwer Academic Publishers, 1992. – P. 3-28.

290. Moffat H.K., Zaslavsky G.M., Comte P.,Tabor M. Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasma. – Unoversity of Califirnia at Santa Barbara,USA, 1991, Kluwer Academic Publishers, 1992. – 606 p.

291. Moffatt H.K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner // Journal of Fluid Mechanics. – 1964. – Vol.18. N1. – P. 1-18.

292. Okhremenko A. E. Mobile systems for forecasting and decision support information / Okhremenko A. E., Stepanov O. V., Cherniy D. I. // XX International Conference «Problems of Decision Making Under Uncertainties». Abstracts (PDMU-2012, September 17-21, 2012, Brno, Czech Republic). – Kyiv, 2012. – P. 94-96.

293. Prikhod'ko A.A., Alekseenko S.V. Numerical Simulation of the Processes of Icing on Airfoils with Formation of a “Barrier” Ice // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – May 2014, Volume 87, Issue 3, P. 598-607.

294. Ricca R.L., Moffat H.K. The helicity of a knotted vortex filament //Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasma. – Unoversity of Califirnia at Santa Barbara,USA, 1991, Kluwer Academic Publishers, 1992. – P. 225-236.

295. Saffman P.G. Vortex dynamics. – Cambrige University Press, 1992. – 376 p.

296. Shekhovtsov A. V. A Method for Evaluation of an Unsteady Pressure Field in a Mixed Potential–Vortical Domain Adjacent to the Rotating Wing International / A. V. Shekhovtsov // International Journal of Fluid Mechanics Research. – 2002. – Vol. 29, № 1. – P. 111-123.

297. Talipova T., Terletska K., Maderich V., Brovchenko I., Jung K.T., Pelinovsky E., Grimshaw R. Internal solitary wave transformation over a bottom step: loss of energy // Physics of Fluids. – 2013. – 25. 032110. – P. 1-14.

298. Voskoboinick V. A. The Modeling of Different Scale Hydrologic Processes in Aquatories / V.A. Voskoboinick, O. A. Voskoboinyk, D. I. Cherniy // J. Enviromental safety and natural resources. – 2019. – Vol. 29. – P. 87-97.

299. Voskoboinick V.A., Voskoboinick A.V., Areshkovych O.O., Voskoboinyk O.A.: Pressure fluctuations on the scour surface before prismatic pier. In: Proceedings 8th International Conference on Scour and Erosion (ICSE 2016), 12-15 September 2016, Oxford, UK, P. 905-910.

300. Zannetti L., Gourjii A. Two-vortex equilibrium in the flow past a flat plate at incidence // Journal of Fluid Mechanics. – 2014. – Vol.755. – P. 50-61.

АПРОБАЦІЯ ПОЛОЖЕННЬ ТА РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

Результати доповідалися й обговорювалися на 2-х міжнародних конгресах, та 39 конференціях та симпозіумах, які мають міжнародний статус, зокрема:

	Назва конференції	Місце проведення	Дата	Участь
1	21-st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (21-st ICTAM)	Warsaw, Poland	August 15-21, 2004р.	очно
2	23-rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (23-rd ICTAM, 2012)	Beijing, China	August 19-24, 2012р.	очно
3	IUTAM-Symposium «Hamiltonian dynamics. Vortex structure. Turbulence»	Moscow, Russia	August 25-30, 2006	очно
4	IUTAM Symposium «150 Year of Vortex Dynamics»	Lyngby & Copenhagen, Denmark,	Oktober, 12-16, 2008	очно
5	IUTAM Symposium on «Vortex Dynamics: Formations, Structure and Function»	Fukuoka, Japan,	March 10-14, 2013	очно
6	XII-International Symposium «Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics/Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (XII- DSMMPh/МДОЗМФ-2005)	Kherson, Ukraine.	Jun, 21-24, 2005	очно
7	XIII-International Symposium «Discrete Singularities Methods in Mathematical	Kherson, Ukraine.	Jun, 11-15,	очно

	Physics/Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (XIII-DSMMPh/МДОЗМФ-2007)		2007	
8	XIV-International Symposium «Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics/Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (XIV- DSMMPh/МДОЗМФ-2009)	Kherson, Ukraine.	Jun, 24-28, 2009	очно
9	XV-International Symposium «Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics/Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (XV- DSMMPh/МДОЗМФ-2011)	Kherson, Ukraine.	Jun, 25-29, 2011	очно
10	XVI International Symposium «Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics/Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (XVI- DSMMPh/МДОЗМФ-2013)	Kherson, Ukraine.	Jun, 24-28, 2013	очно
11	XVIII- International Symposium «Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics/Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (XVIII-DSMMPh/МДОЗМФ-2017)	Kharkiv, Ukraine.	Jun, 26-28, 2017	очно
12	XIX-International Symposium «Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics/Методы дискретных особенностей в задачах математической физики»	Kharkiv-Odesa, Ukraine	Jun, 24-28, 2019	очно

	(XIX - DSMMPh/МДОЗМФ-2019)			
13	Fluid Mechanics Conference 6 (EFMC6 KTH–EUROMECH, Stockholm, 2006);	Stockholm, Sweden	June, 26-30, 2006	очно
14	62-nd Annual Meeting of the APS division of Fluid Dynamics	Minneapolis, Minnesota, USA	November, 22-24, 2009	очно
15	7th Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations (BBVIV-7)	Carry-le-Rouet, Marseille, France	July, 3-6, 2018	очно
16	International Workshop «PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES» (PDMU-2008)	Crimea (Novy Svit), Ukraine	Sept. 22-27, 2008,	очно
17	International Workshop «PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES» (PDMU-2009)	Skhidnytsia, Ukraine	April 27-30, 2009p.	заочно
18	XV International Conference «PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES» (PDMU-2010)	Lviv,Ukraine	May, 17-21, 2010	заочно
19	XVI International Conference «PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES» (PDMU-2010)	Yalta,Ukraine	Octob. 4-8, 2010	заочно
20	International Workshop «PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES» (PDMU-2011)	Skhidnytsia, Ukraine	May 23-27, 2011	заочно
21	XII International Conference «PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES» (PDMU-2012)	Brno, Czech Republic	September, 17-21, 2012	очно

22	XXIV International Conference «PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES» (PDMU-2014)	Cesky Rudoles, Czech Republic;	September, 1-5, 2014	очно
23	XXVII International Conference «PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES» (PDMU-2016)	Tbilisi-Batumi, Georgia;	May,23-27, 2016	очно
24	XXVIII International Conference «PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES» (PDMU-2016)	Brno, Czech Republic;	August25-30, 2016,	заочно
53	XXIX International Conference «PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES» (PDMU-2017)	Mukachevo, Ukraine	May, 10-13, 2017	очно
26	XXX International Conference «PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES» (PDMU-2017)	Vilius, Lithuania	August, 14-19, 2017,	очно
27	XXXI International Conference «PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES» (PDMU-2018)	Baku-Lenkoran, Azerbajan	July, 3-6, 2018	очно
28	XXXV International Conference «PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES» (PDMU-2020)	Baku-Sheki, Azerbajan;	May, 11-15, 2020	заочно
29	III Міжнародна конференція імені академіка І. І. Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика»	Київ, Україна	Вересень, 11-12, 2009р.	очно

30	XVII International Conference «DYNAMICAL SYSTEM MODELLING and STABILITY INVESTIGATION» (XVII DSMSI-2015)	Kyiv, Ukraine	May, 27-29, 2015	очно
31	International Conference «Ukrainian Conference on Applied mathematics» dedicated to the 100th birth anniversary of professor Olexander Kostovskiy (UCAM-2017)	Lviv, Ukraine	September, 28-30, 2017	очно
32	2019 IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory ATIT (IEEE ATIT 2019).	Kiyv, Ukraine	December, 18-20, 2019	очно
33	V Міжнародна науково-практична конференція «Комп'ютерна гідромеханіка»	Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна	Вересень, 29-30, 2016р.	очно
34	I Міжнародна науково-практична конференція «Комп'ютерна гідромеханіка»	Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна	30.09--01.10, 2008р.	очно
35	V International Scientific Conference «Modern Problems of Mechanics»	Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine	Серпень, 28-30, 2019	заочно
36	VIII Міжнарнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта»	Луцьк-Світязь, Україна	Черв., 2-4, 2019	заочно
37	XVI Міжнародна науково-практична конференція: «Сучасні інформаційні технології управління екологічною	Київ, Україна	Жовт. 3-6, 2016р.	очно

	безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях»			
38	X Міжнародна науково-практична конференція: «Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях»	Київ, Україна	Верес., 5-9, 2011р.	очно
39	XI Міжнародна науково-практична конференція: «Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях»	Київ, Україна	Верес.,16-21, 2012р.	очно
40	V Міжнародна науково–технічна конференція «Нові технології в будівництві. Надійність та безпека висотних будинків і споруд»	Київ, Україна	Трав., 28-29, 2009р	очно
41	VI Міжнародна науково–технічна конференція «Нові технології в будівництві. Надійність та безпека висотних будинків і споруд»	Київ, Україна	Верес., 6-10, 2010р	очно

ДОДАТКИ

Додаток А

Результати лабораторного і комп'ютерного моделювання

Містить частини

Додаток А1

Результати лабораторного моделювання (акваторії Керченської протоки).

Моделювання гідрологічних процесів на лабораторном стенде, в плоскому каналі, на моделі акваторії Керченської протоки (обмеженої неоднозв’язної області зі стінками складної форми)

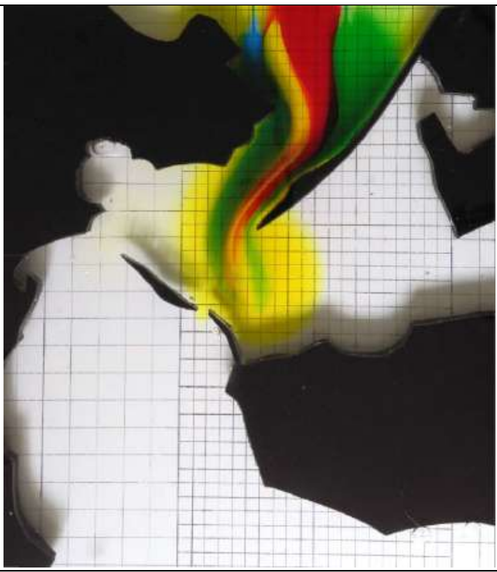
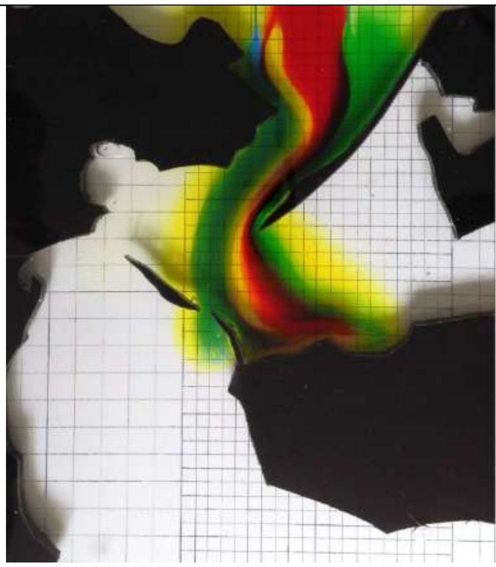
	

Рис. **А1**.1	Рис. **А1**.2

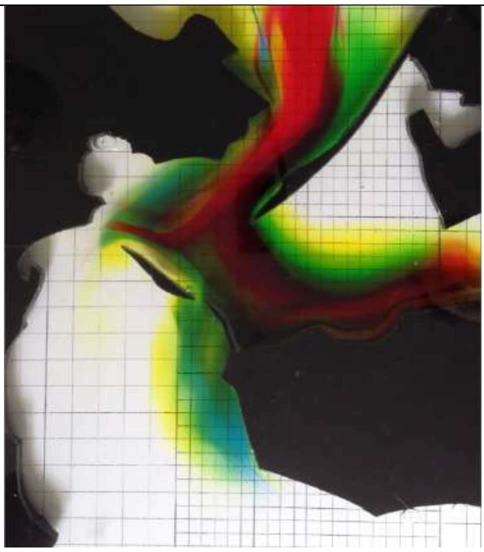
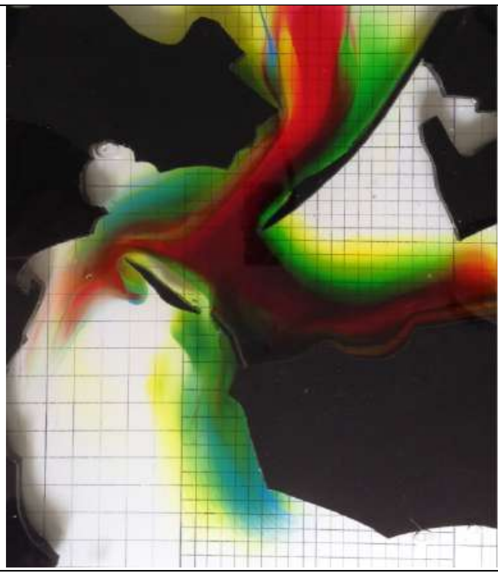

	

Рис. **А1**.3	Рис. **А1**.4

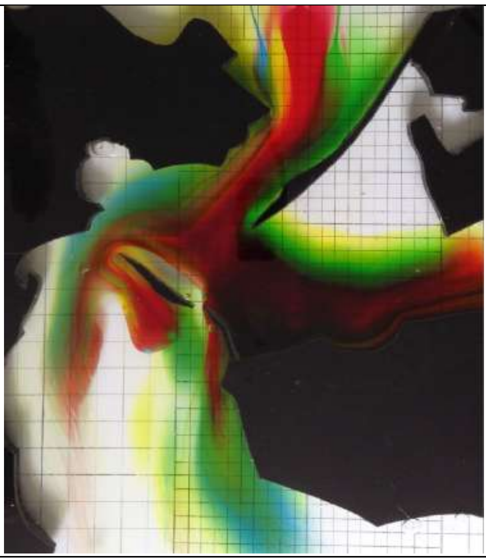
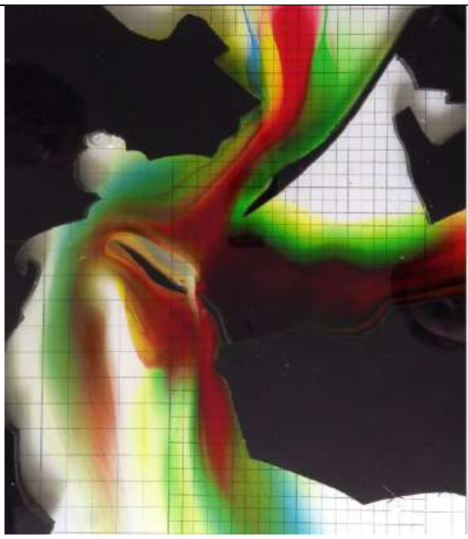
	

Рис. **А1**.5	Рис. **А1**.6

.

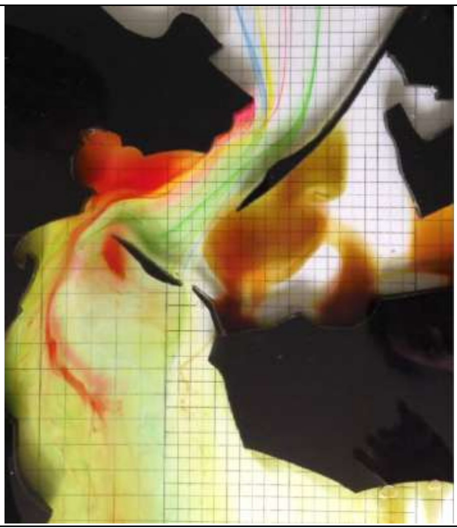
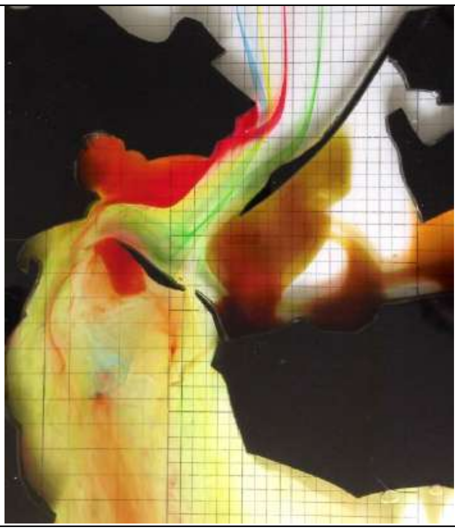
	

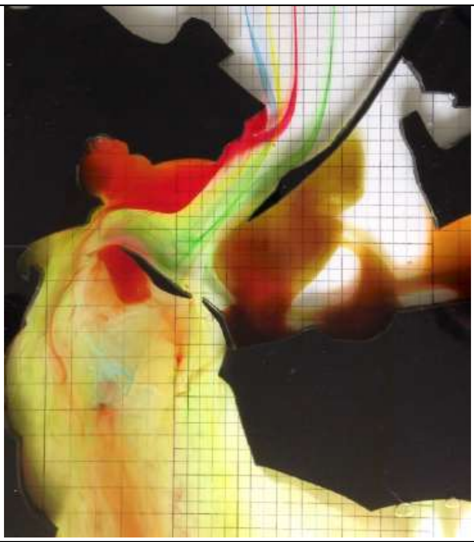
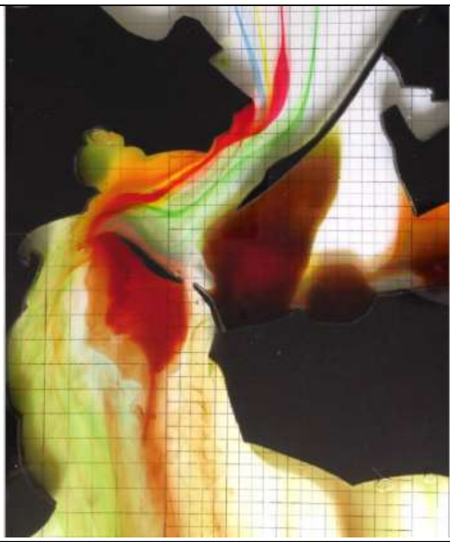
Рис. **А1**.7	Рис. **А1**.8
	

Рис. **А1**.9	Рис. **А1**.10

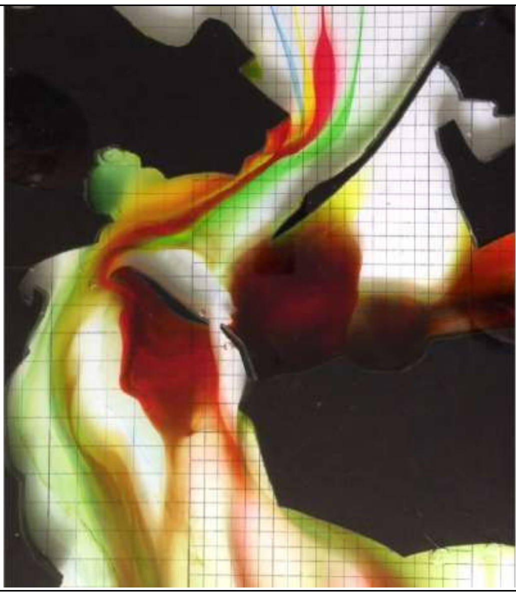
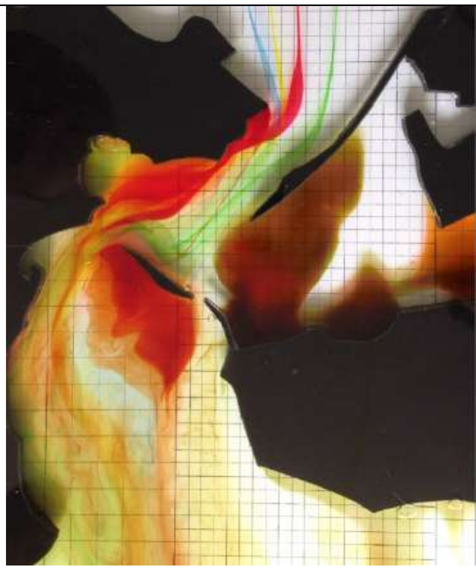

	

Рис. **А1**.11	Рис. **А1**.12

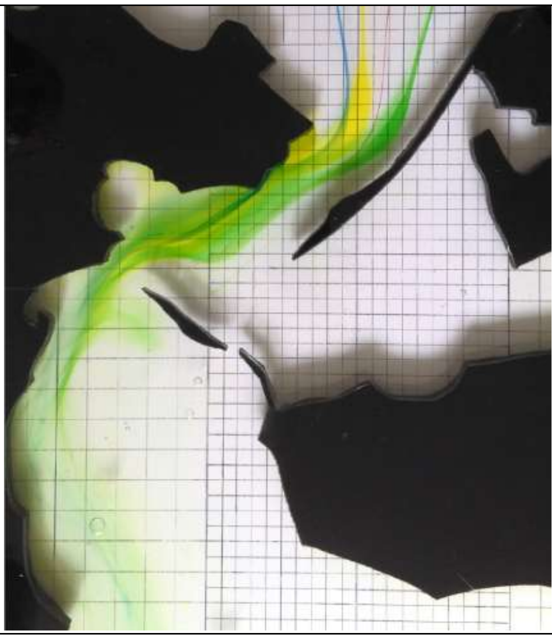
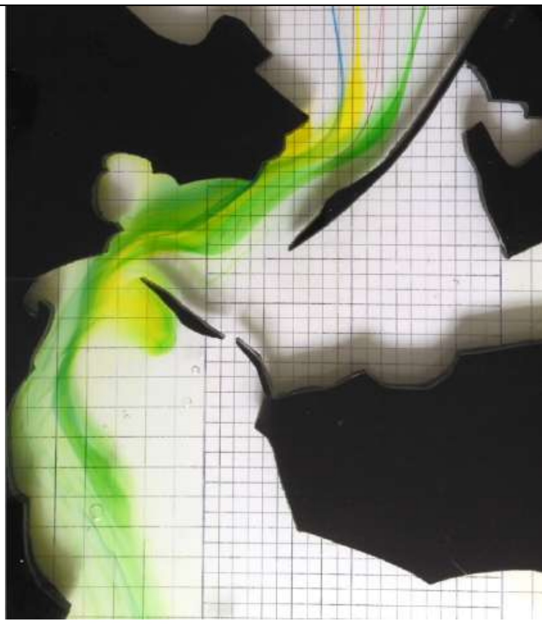
	

Рис. **А1**.13	Рис. **А1**.14

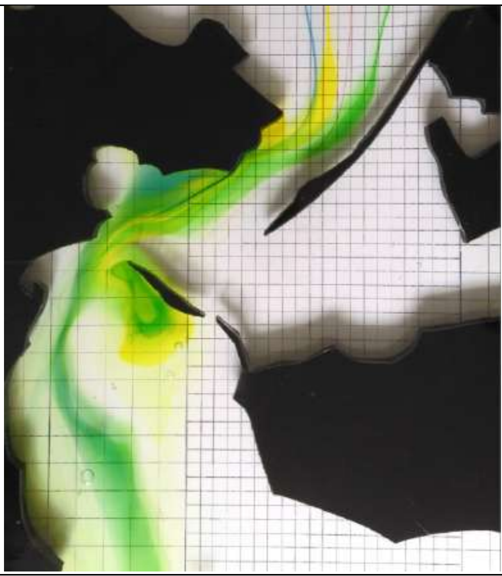
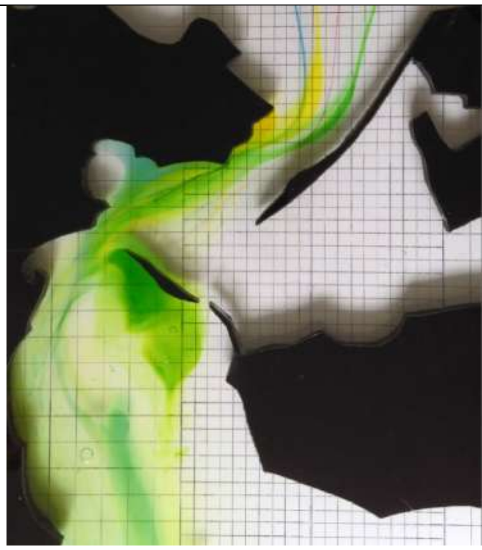
	

Рис. **А1**.15 Циркуляційна течія	Рис. **А1**.16

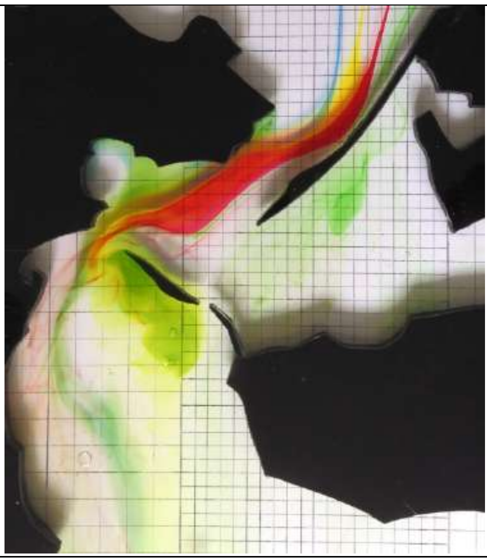
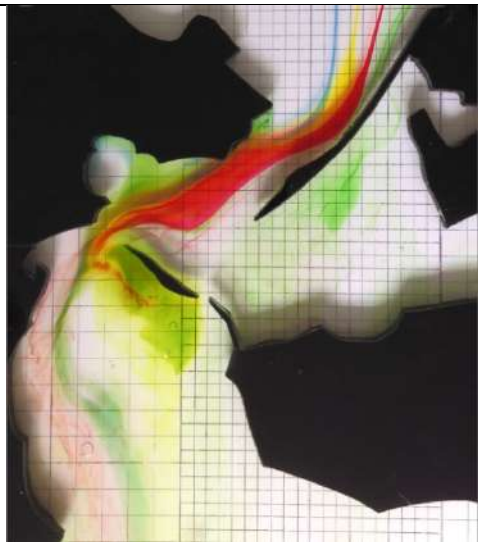

	

Рис. **А1**.17	Рис. **А1**.18

.

.

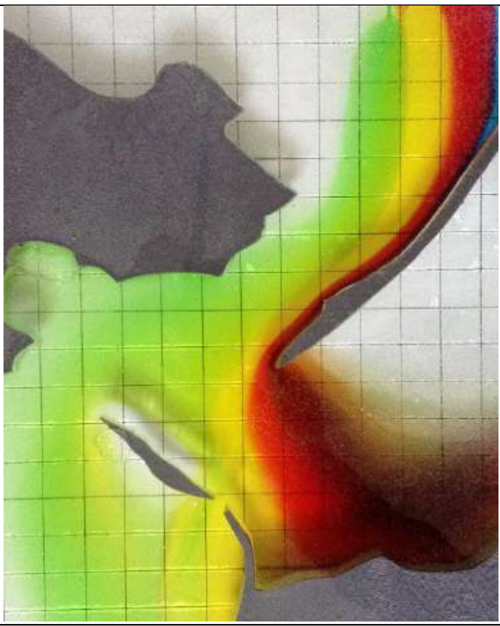


Рис. **А1**.19	Рис. **А1**.20 Циркуляційна течія

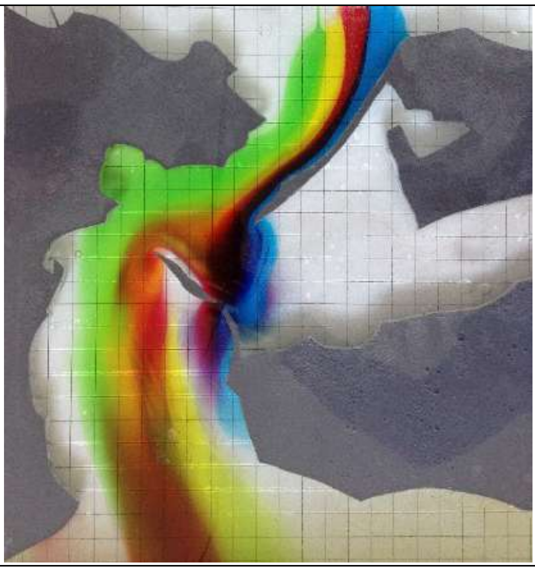
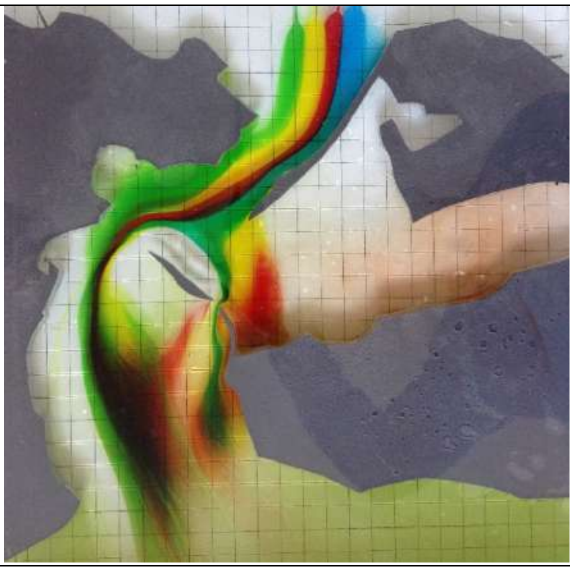

	

Рис. **А1**.21	Рис. **А1**.22

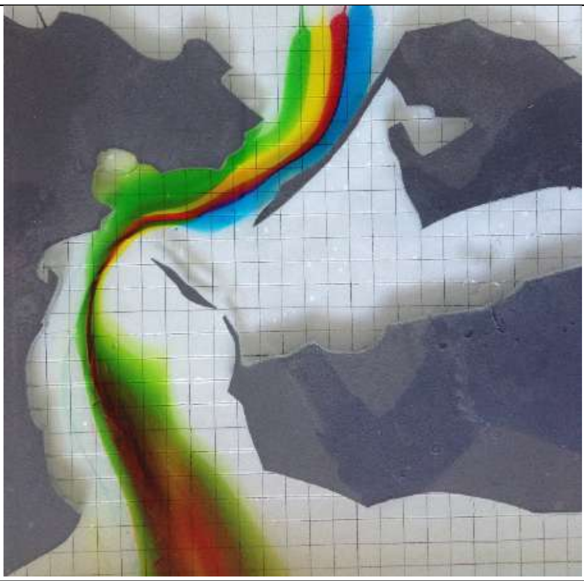
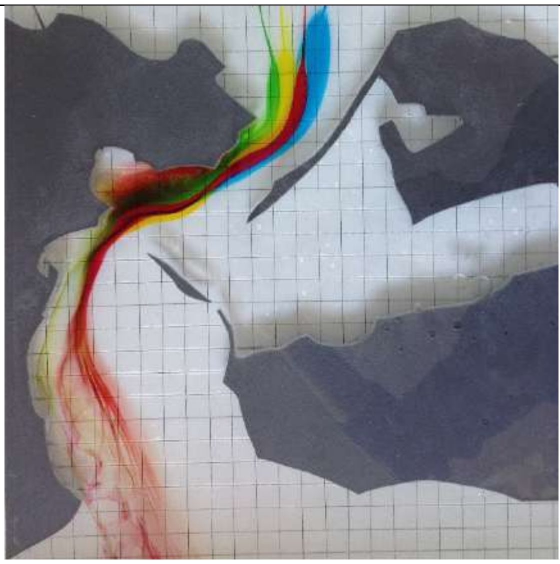
	

Рис. **А1**.23	Рис. **А1**.24

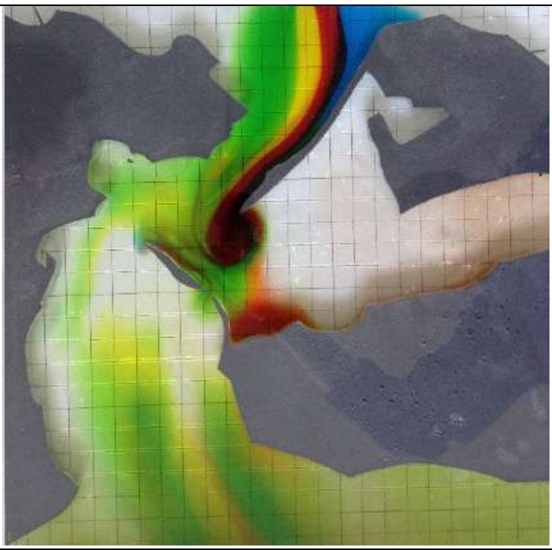
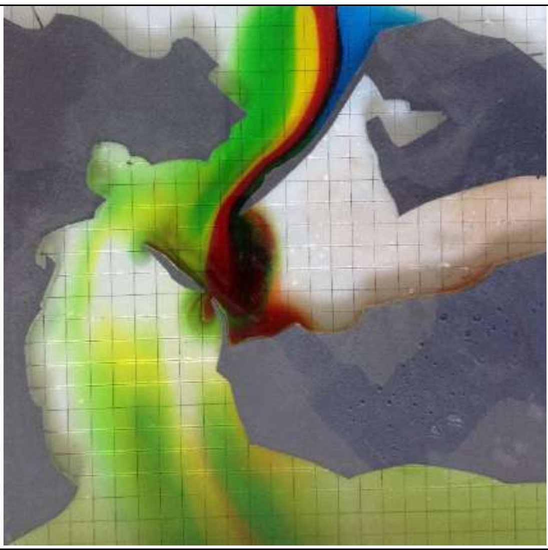
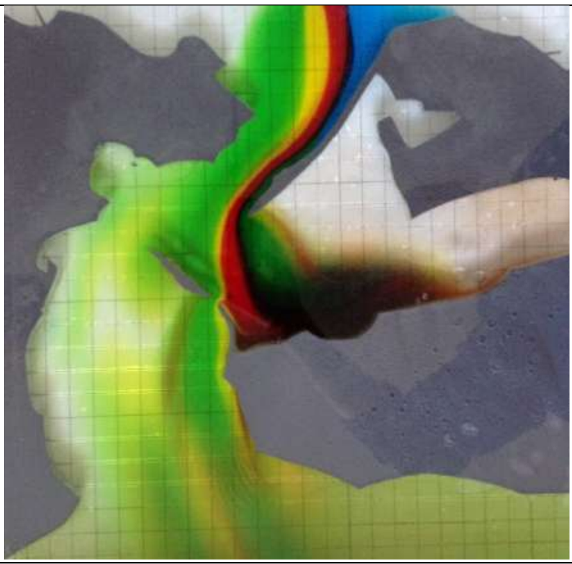
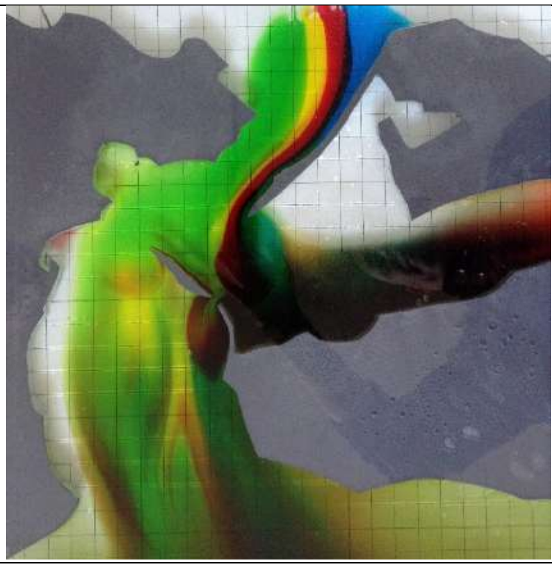
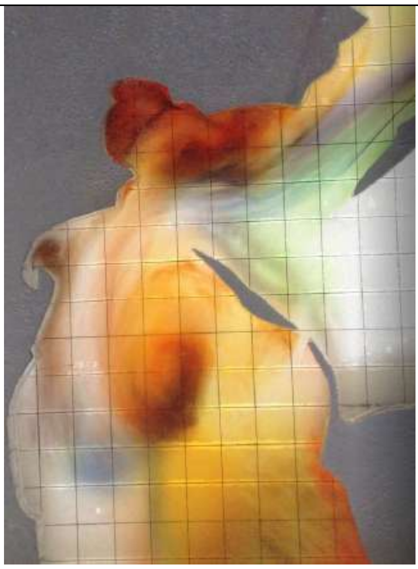
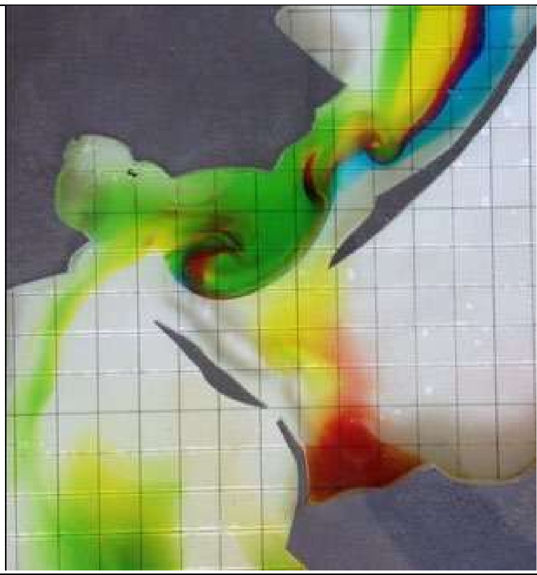
	

Рис. **А1**.25 Циркуляційна течія	Рис. **А1**.26 Циркуляційна течія

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Рис. А1.27</td><td>Рис. А1.28</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Рис. А1.29</td><td>Рис. А1.30 Циркуляційна течія</td></tr>
</table>

.

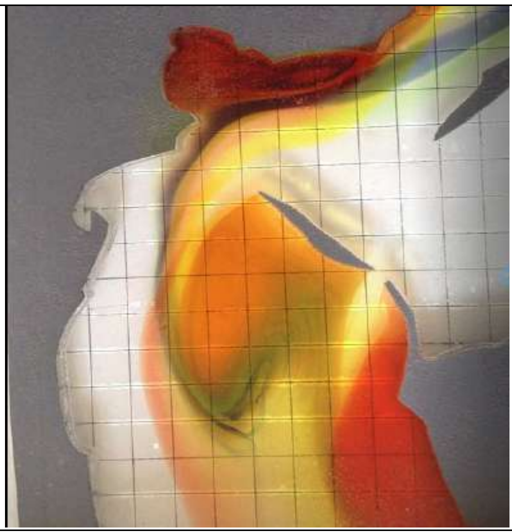
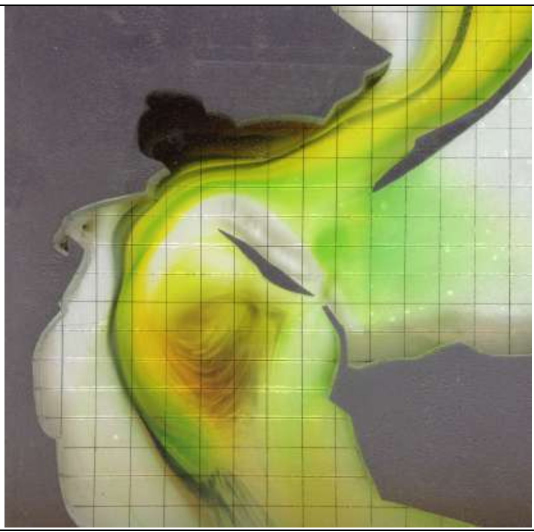
	

Рис. **А1**.31 Циркуляційна течія	Рис. **А1**.32 Циркуляційна течія

Додаток А2

Результати комп’ютерного моделювання (акваторії Керченської протоки)

Компютерне моделювання гідрологічних процесів в обмеженої неоднозвязної області (моделі акваторії Керченської протоки, навколо о.Тузла)

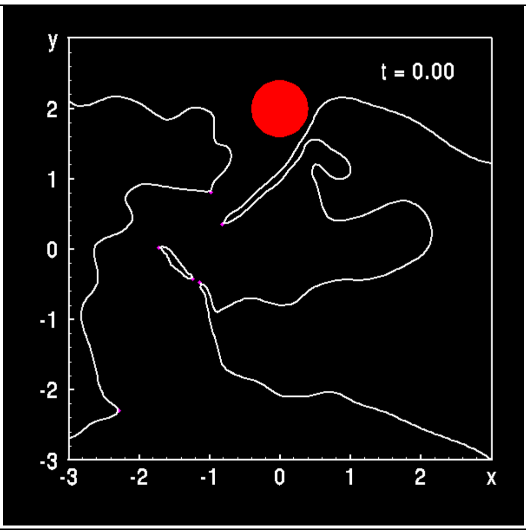


Рис. **А2** .1

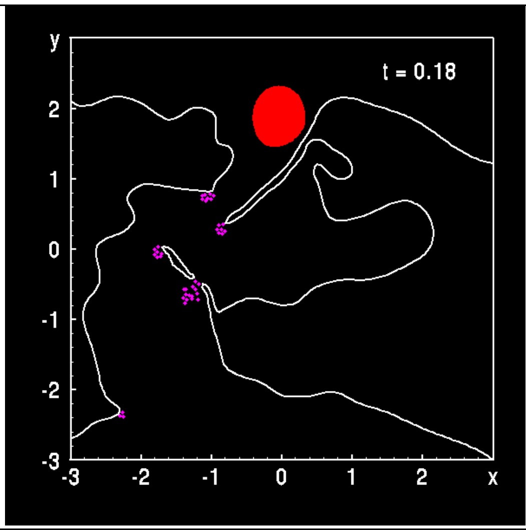


Рис. **А2.**2

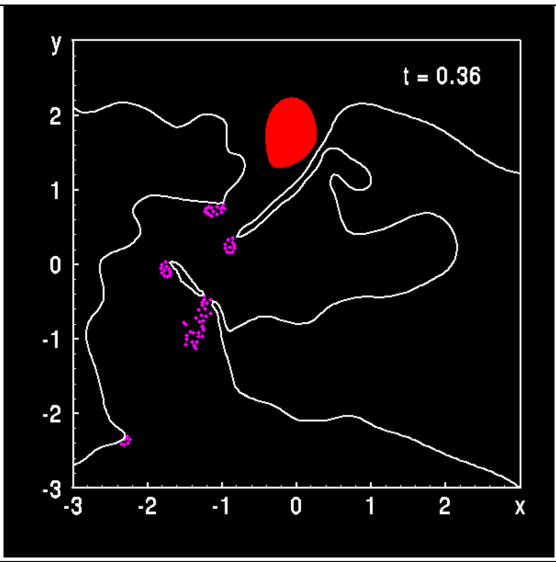


Рис. **А2**.3

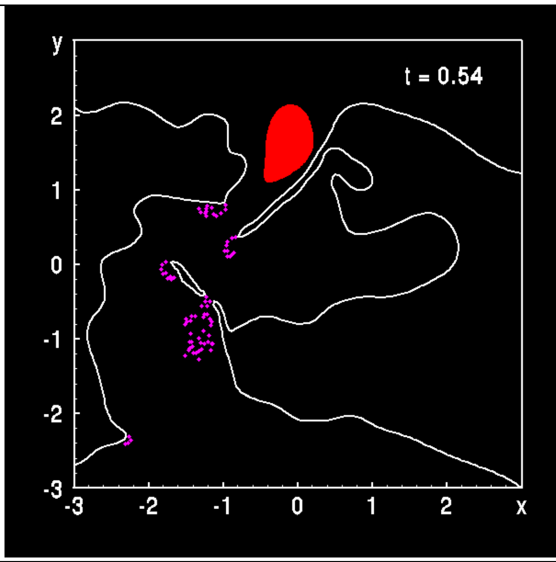


Рис. **А2**.4

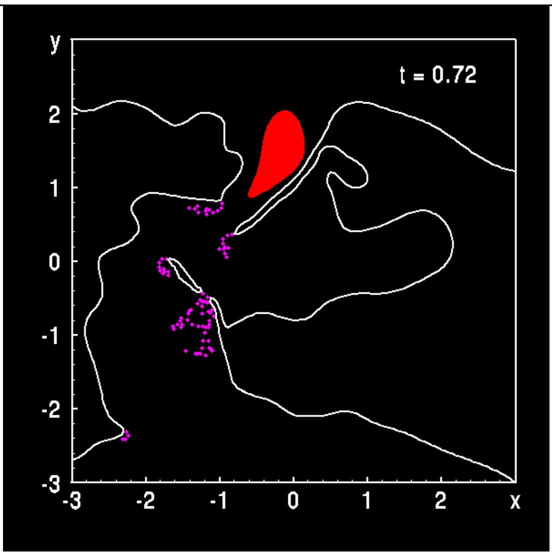


Рис. **А2**.5

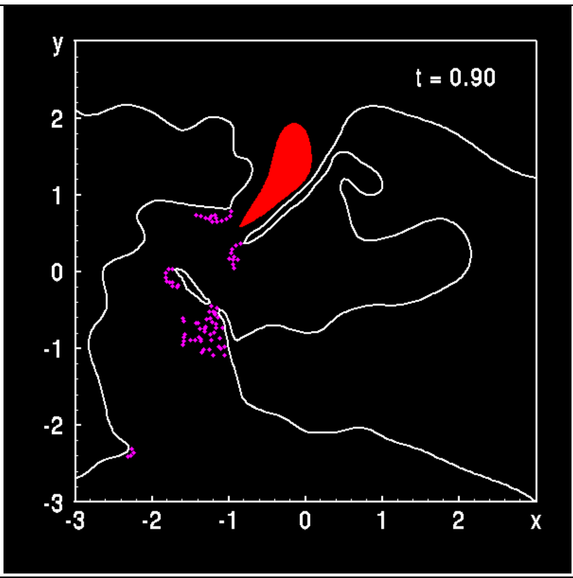


Рис. **А2**.6

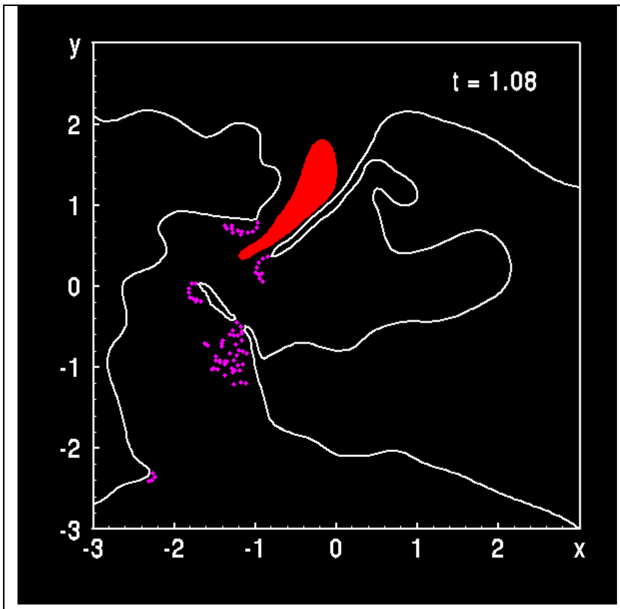


Рис. **А2**.7

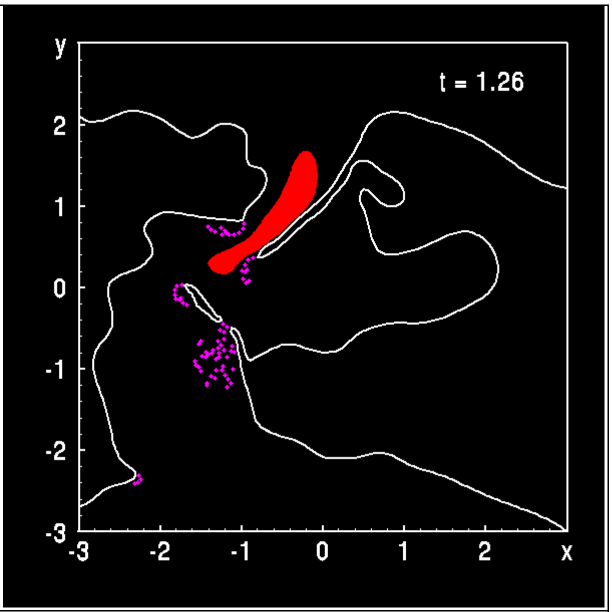


Рис. **А2**.8

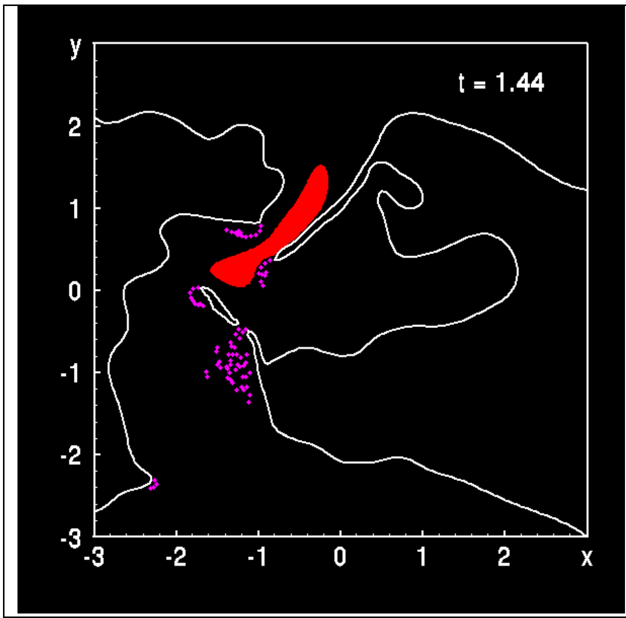


Рис. **А2**.9

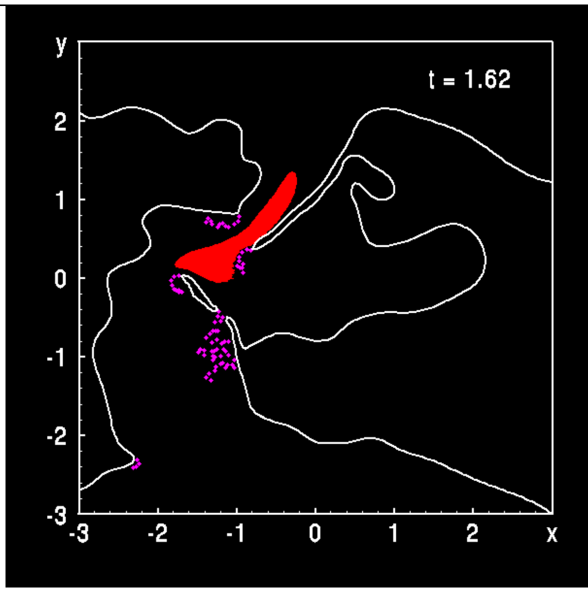


Рис. **А32**10

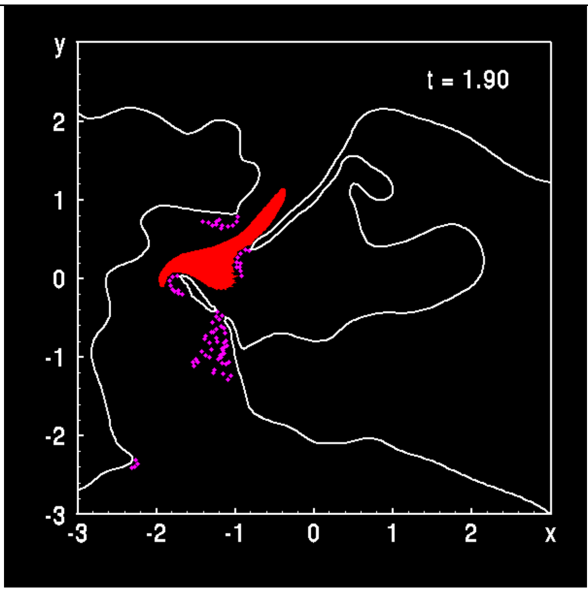


Рис. **А2**.11

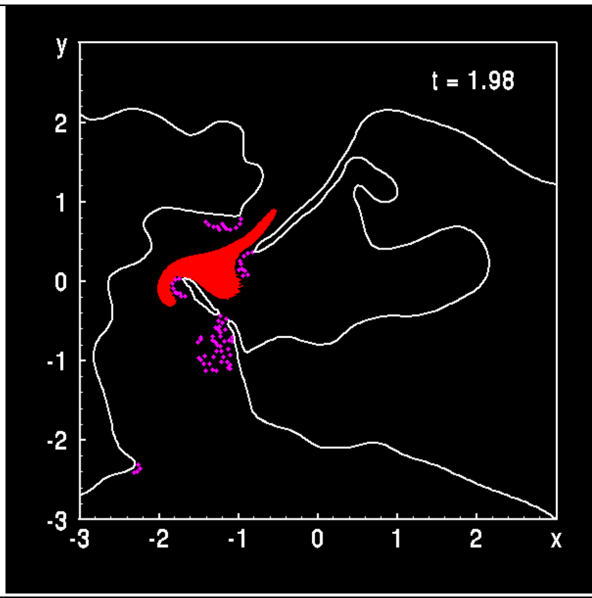


Рис. **А2**.12

.

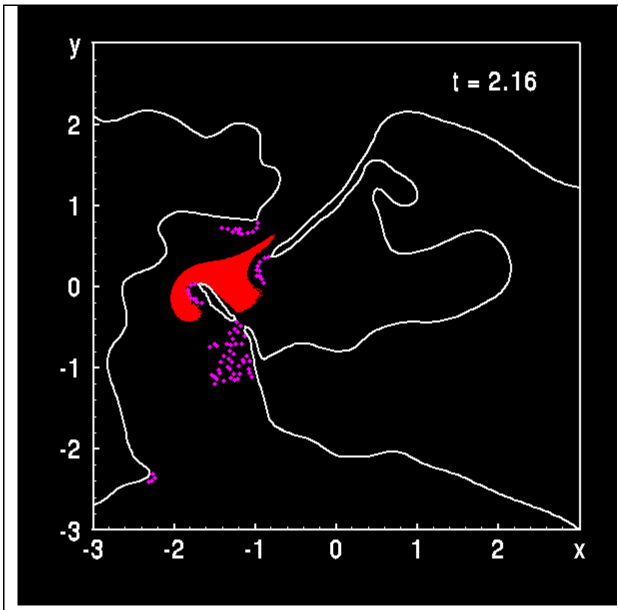


Рис. **А2**.13

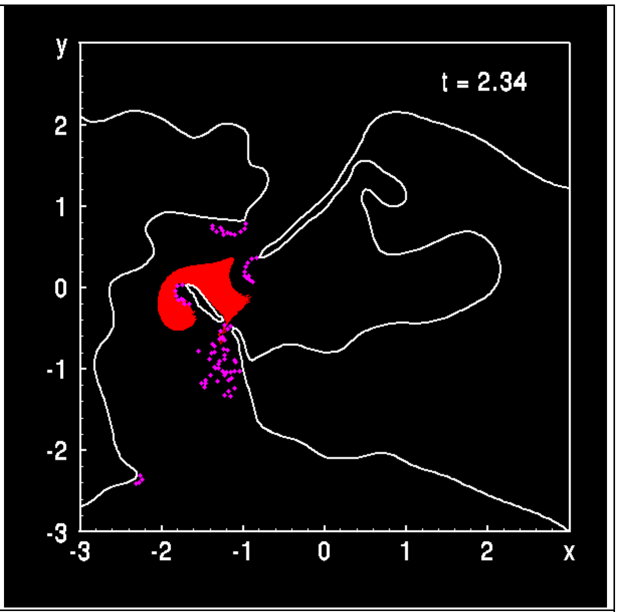


Рис. **А2**.14

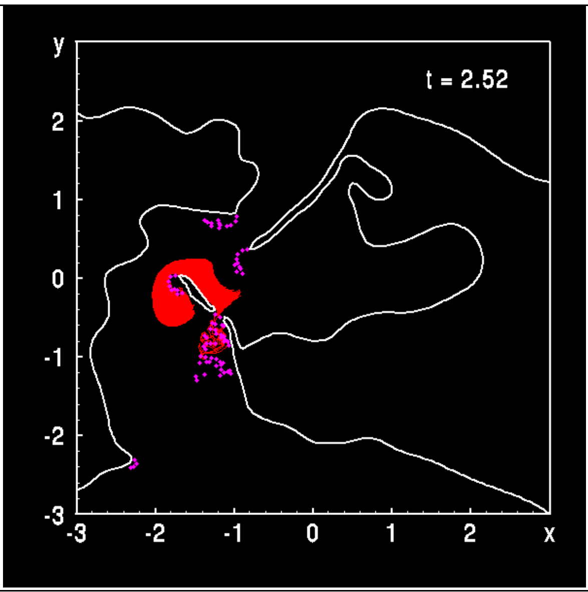


Рис. **А2**.15

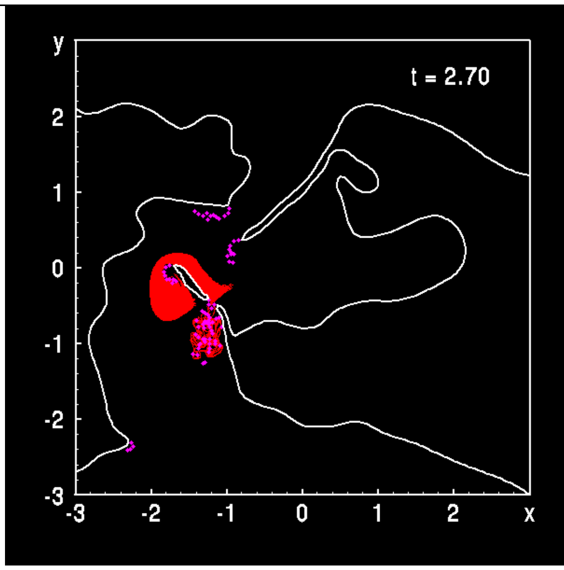


Рис. **А2**.16

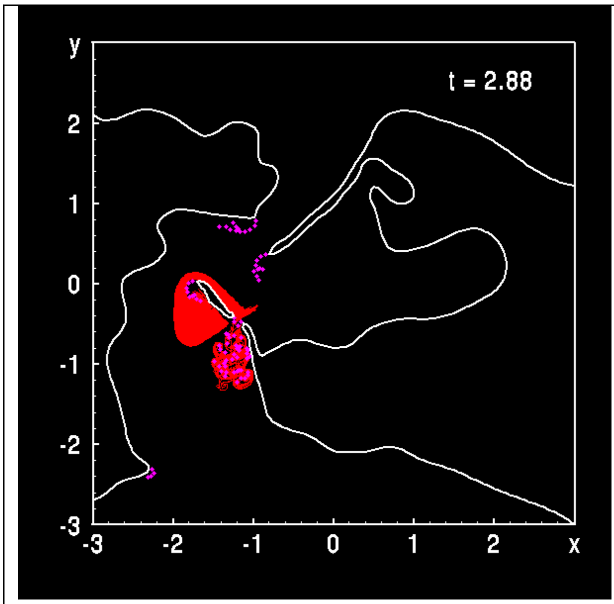


Рис. **А2**.17

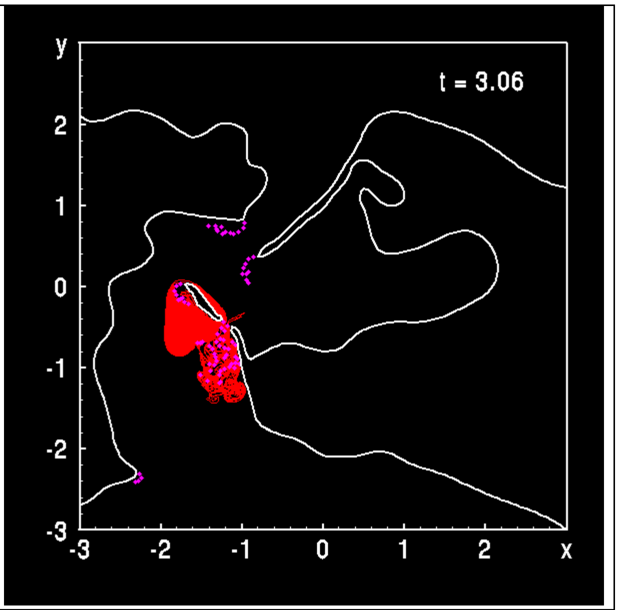


Рис. В **А2.**18

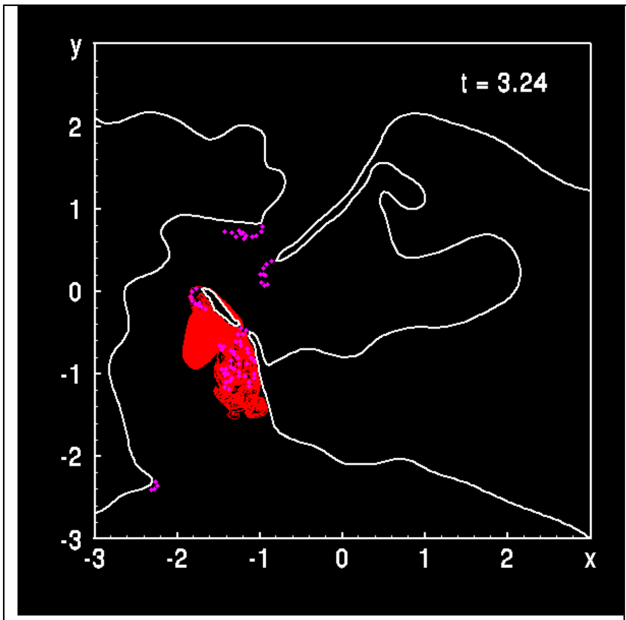


Рис. **А2**.19

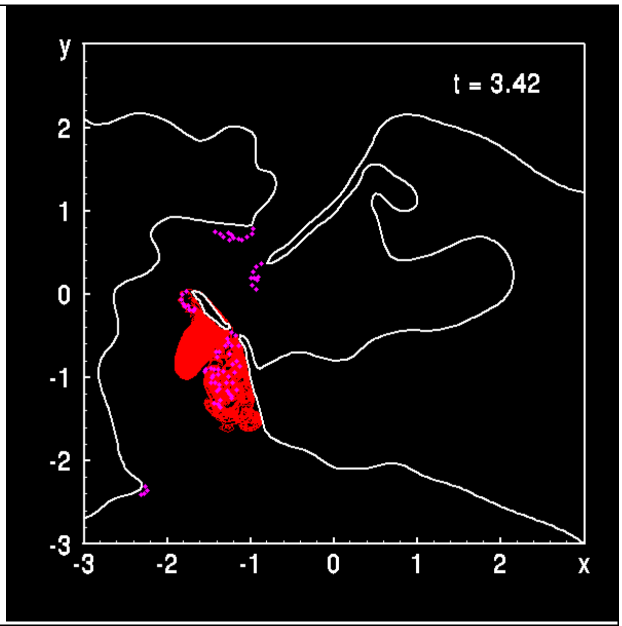


Рис. **А2**.20

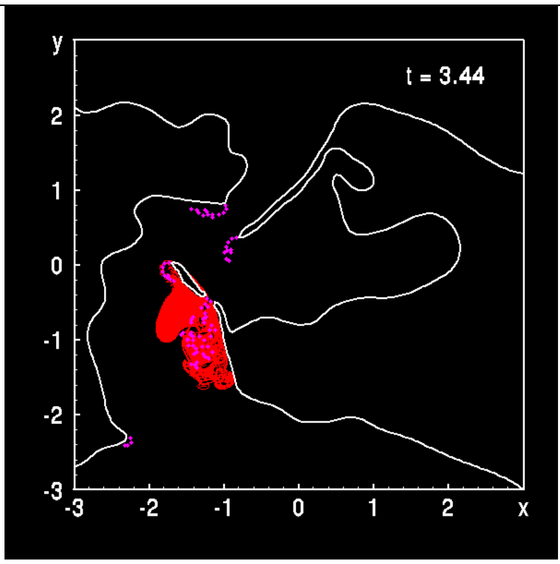


Рис. **А2**.21

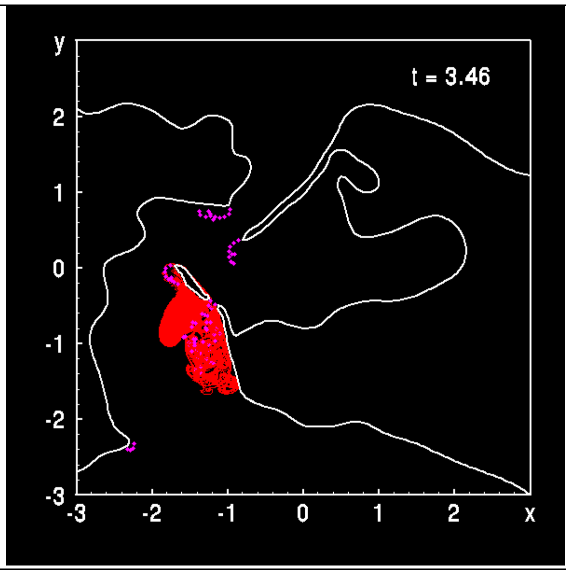


Рис. **А2**.22

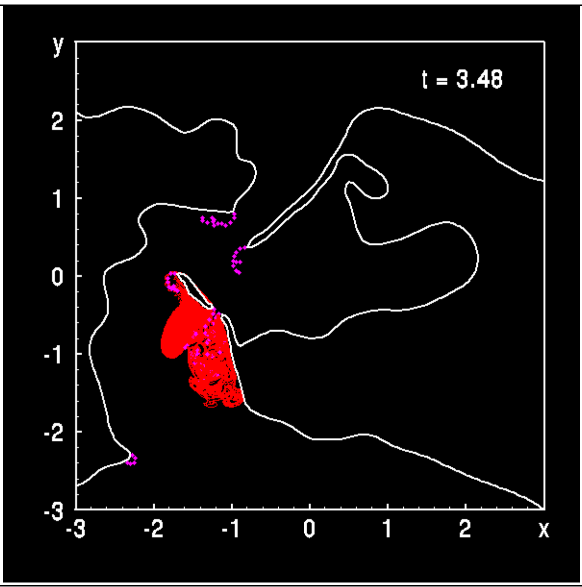


Рис. **А2**.23

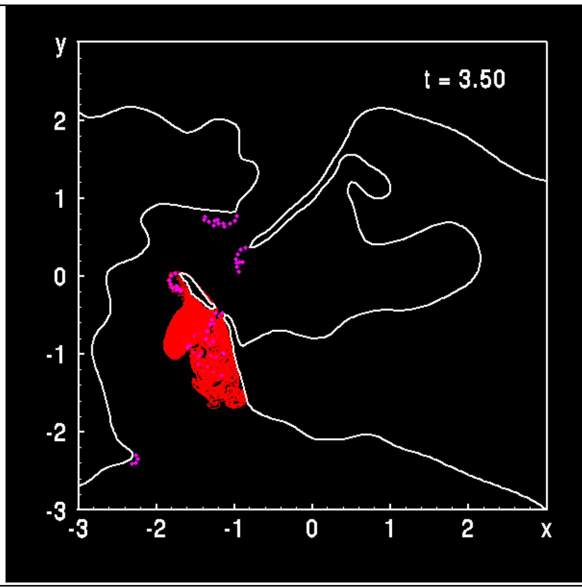


Рис. **А2**.24

Додаток А3

Результати комп'ютерного моделювання (акваторії о.Боронхольм)

Компютерне моделювання адвекційних процесів забруднення в акваторії навколо о.Боронхольм

Додаток 1Г

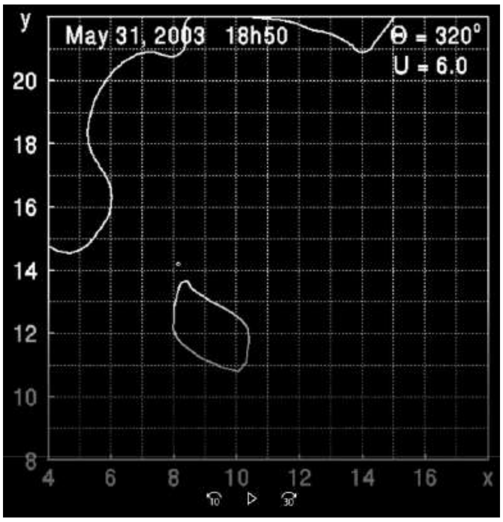


Рис. **А3.**1

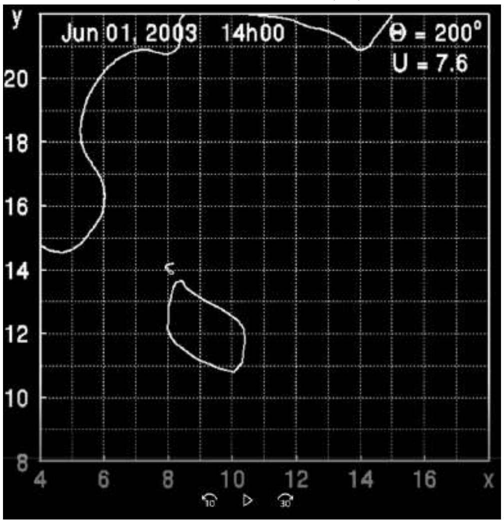


Рис. **А3.**2

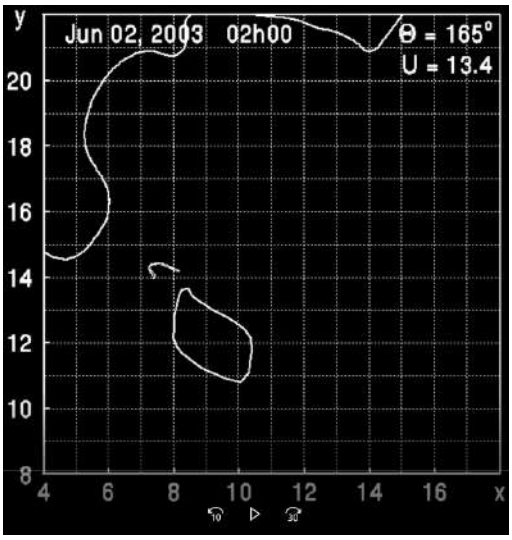


Рис. **А3.**3

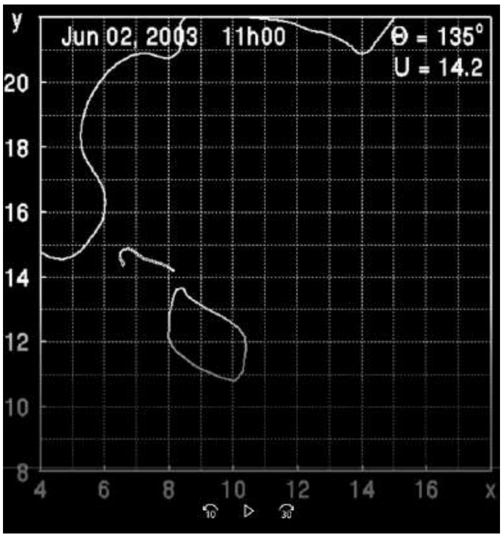


Рис. **А3.**4

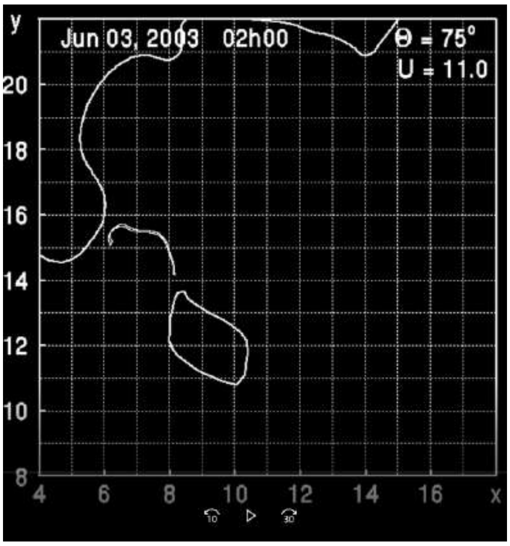


Рис. **А3.**5

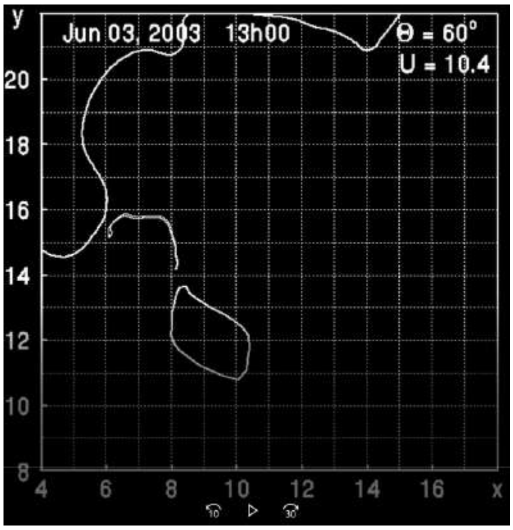


Рис. **А3.**6

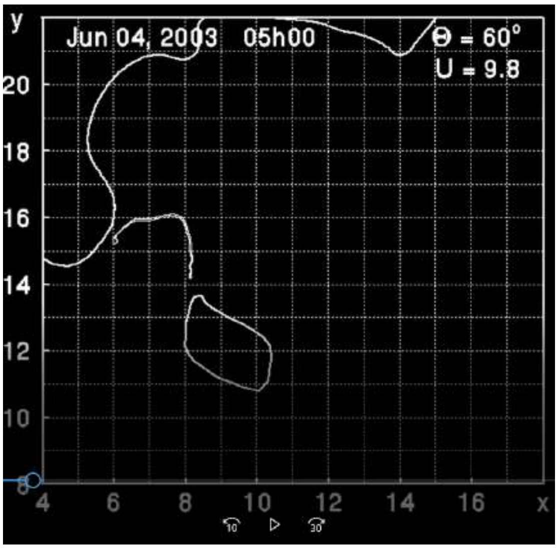


Рис. **А3.**7

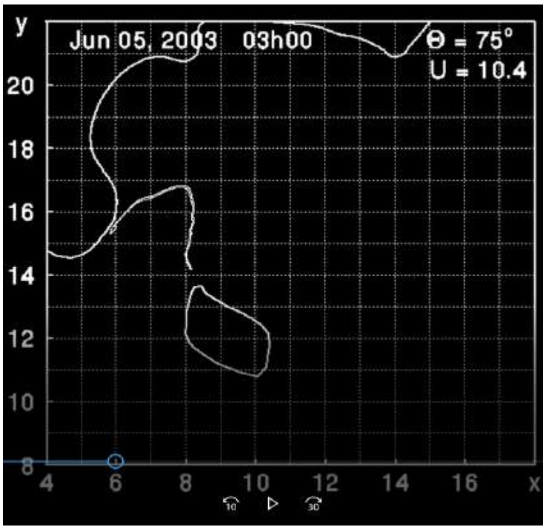


Рис. **А3.**8

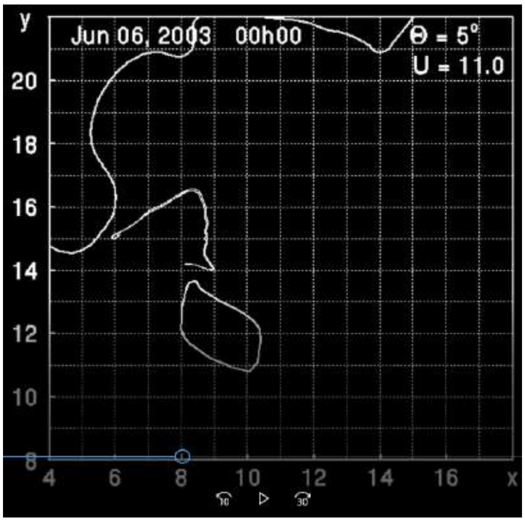


Рис. **А3.**9

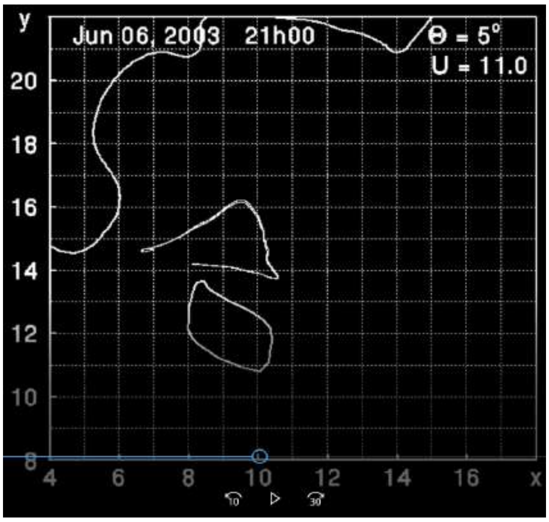


Рис. **А3.**10

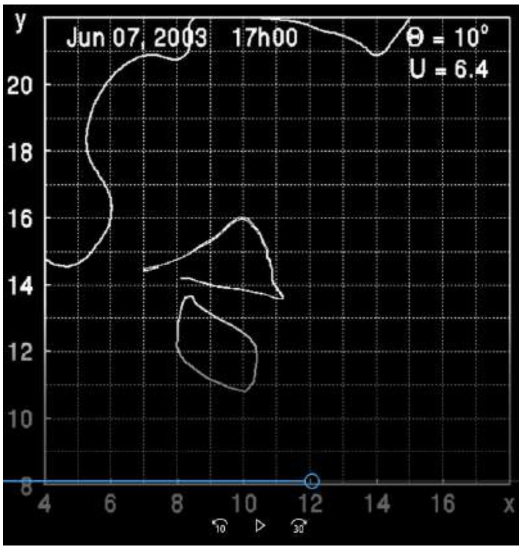


Рис. **А3.**11

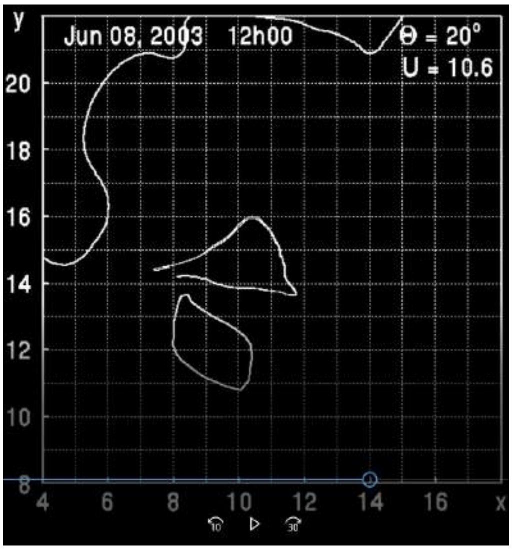


Рис. **А3.**12

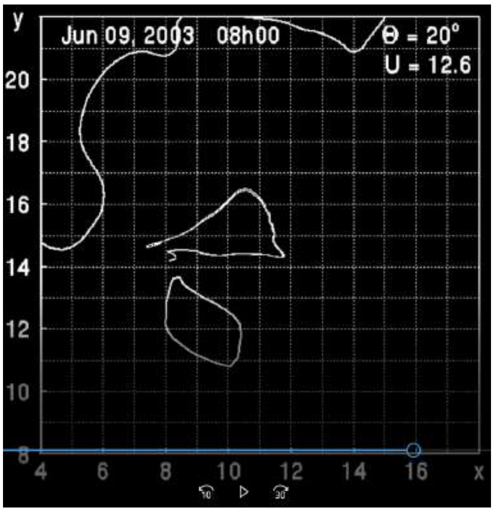


Рис. **А3.**13

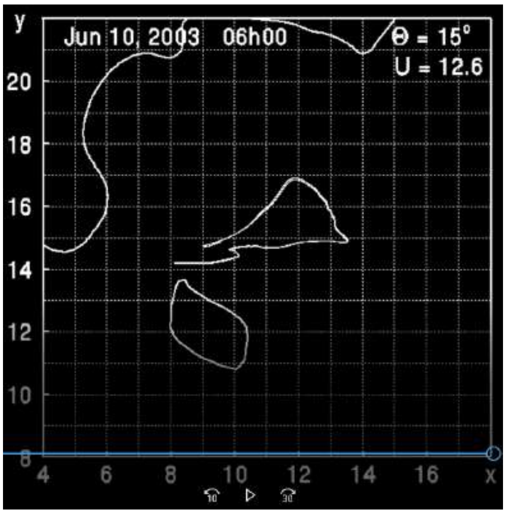


Рис. **А3.**14

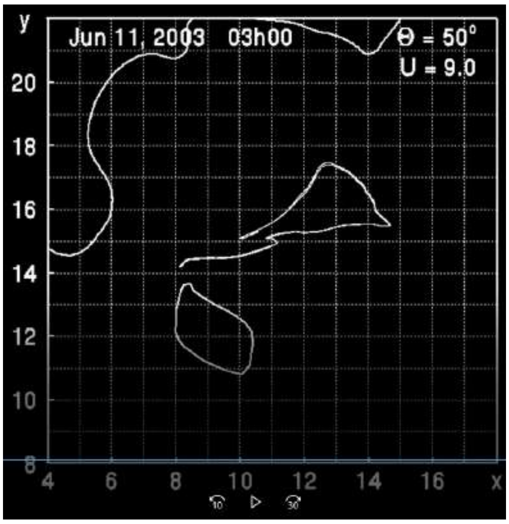


Рис. **А4.**15

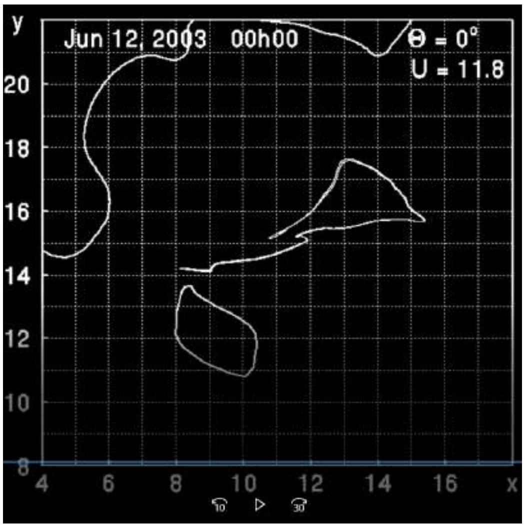


Рис. **А4.**16

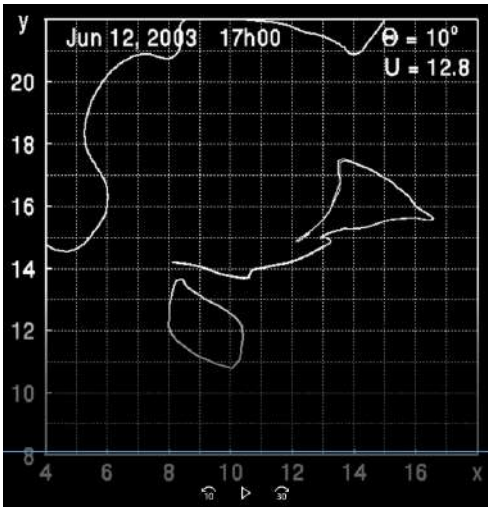


Рис. **А3.**17

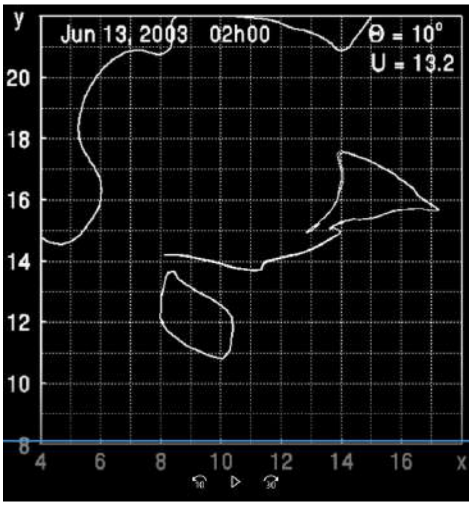


Рис. **А3.**18

Додаток А4

Результати комп'ютерного моделювання (акваторія Дніпровсько-Бузького ліману)

Компютерне моделювання гідрологічних процесів в обмеженої неоднозвязної області (в дельті річкових систем)

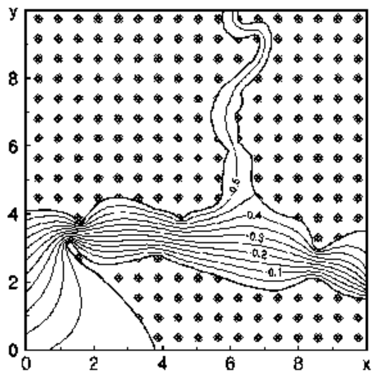


Рис. А4.1. Розподіл функції течії в Дніпровсько-Бузькому лимані при відсутності вітру

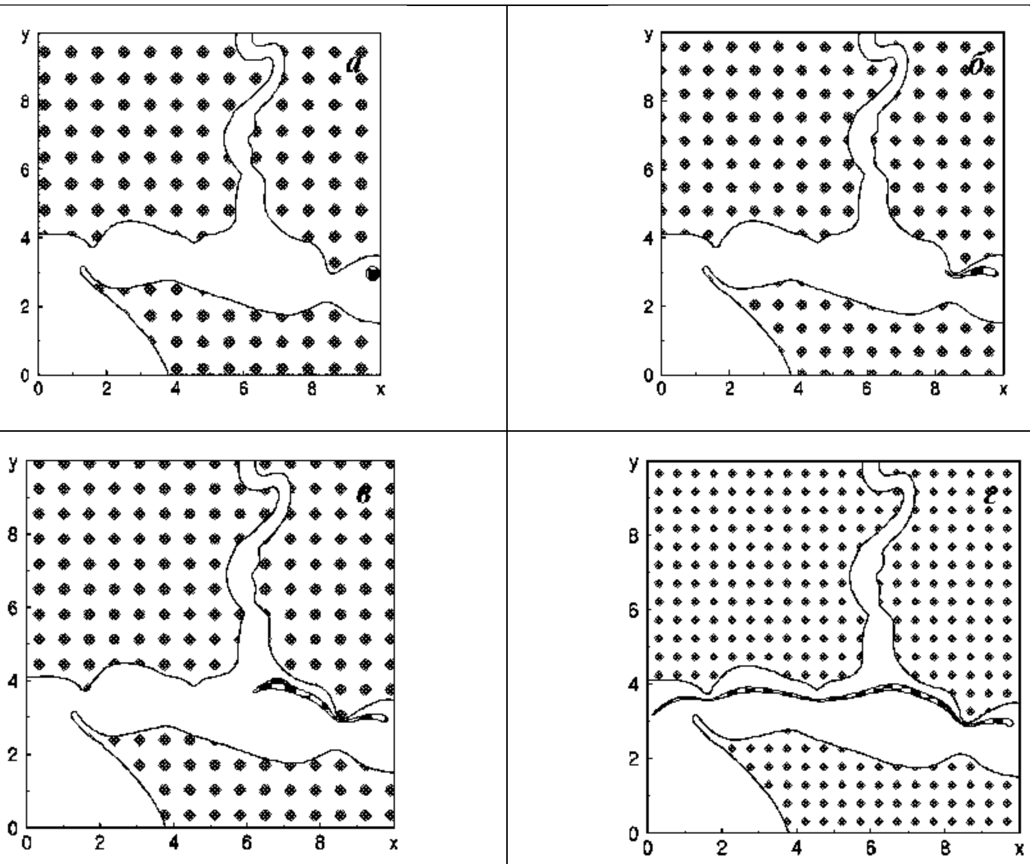
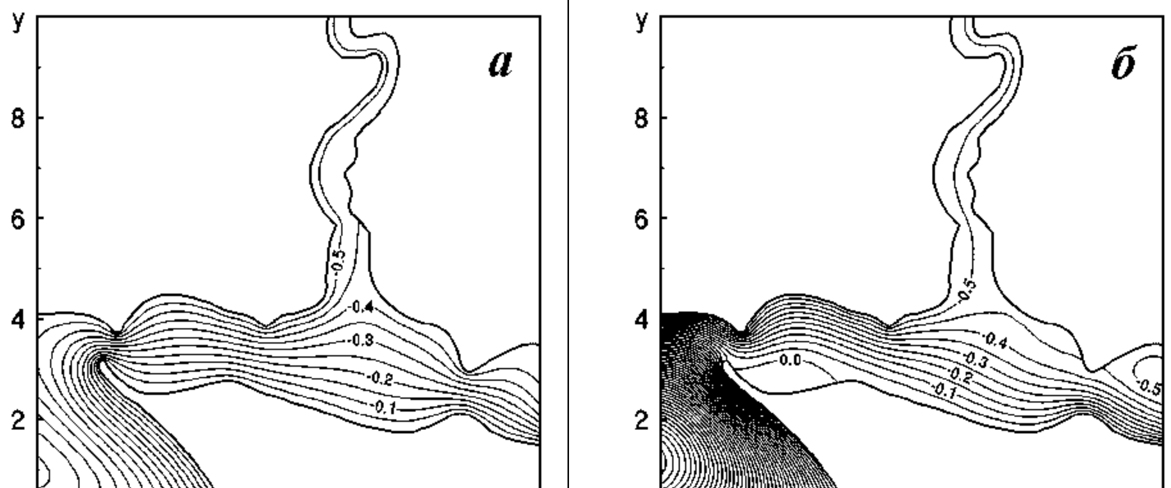


Рис. А4.2. Положення плями поверхневого забруднення в Дніпровсько-Бузькому лимані при відсутністі вітру в момент*: а - t=3.0, б - t=6.0, в - t=12.0, г - t = 20.0,*
д - t=34.0, е - t=50.0



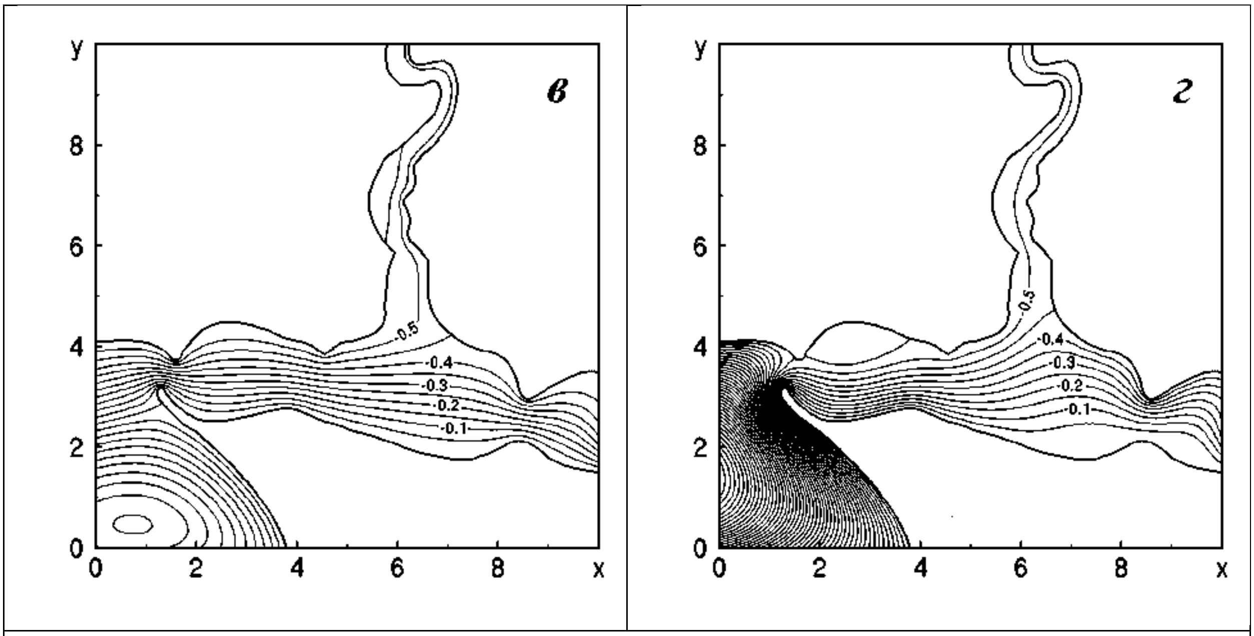
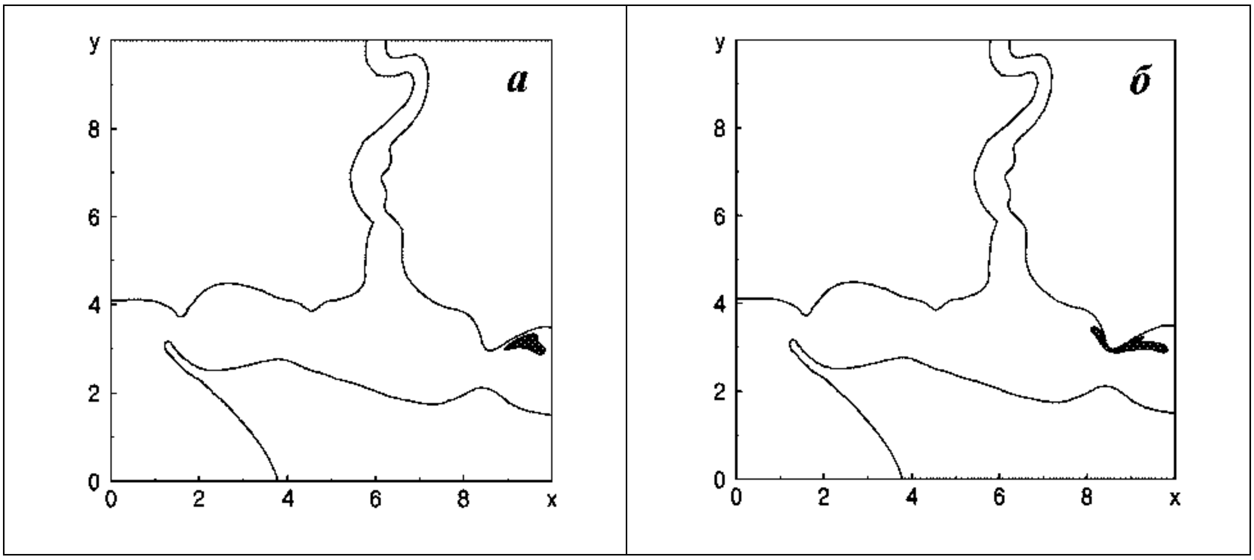


Рис. А4.3. Розподіл функції течії в Дніпровсько-Бузькому лимані для помірного вітру

(U_w = 15.0 м/с) при: а - α=0º (західний вітер), б - α=90º (північний вітер), в - α=180º (східний вітер), г - α= 270º (південний вітер)



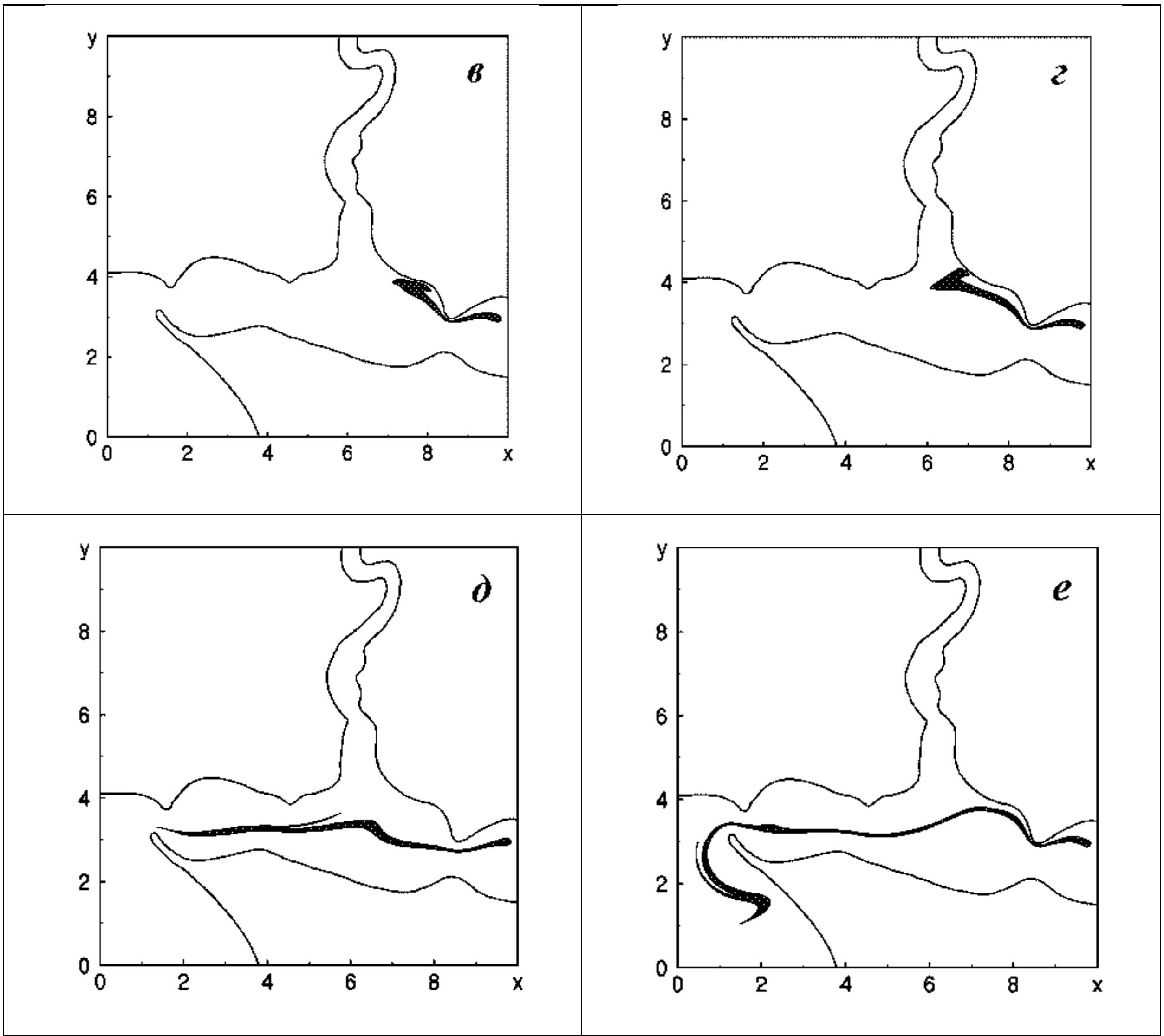


Рис. А4.4. Положення плями поверхневого забруднення в Дніпровсько-Бузькому лимані під впливом вітру в момент*: а - t=3.0, б - t=6.0, в - t=12.0, г - t = 20.0, д - t=34.0, е - t=50.0*

Додаток Б

Акти впровадження

Товариство з обмеженою відповідальністю
Український інститут сталевих конструкцій
імені В.М. Шимановського
Поштова адреса: Україна, 02660, м. Київ, МСП-660, вул. В. Шимановського, 2/1
Тел.: (044) 543-93-87; факс: (044) 543-97-69; ел. пошта: niipsk@webber.kiev.ua
Веб-сайт: http://urdisc.com.ua

Вих. № 3-А від 03.01.2012
На № від

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Заслужений діяч науки і техніки України,
академік Академії будівництва України, д.т.н.,
професор О.В. Шимановський

«5» 2012р.

АКТ ВПРОВАДЖЕНЯ

Цим актом засвідчено, що «Програмно-моделююча система для дослідження нестаціонарних нелінійних аеродинамічних процесів та впливів», яка розроблена А.Д. Головенко під науковим керівництвом к.ф.-м.н., доцента Д.І. Чернія в межах комплексу науково-дослідних робіт за темою «Розробки математичних моделей, методів та алгоритмів для програмно-моделюючих систем інженерно-технологічного призначення» (державний реєстраційний номер теми 0110U002719), що виконується Інститутом телекомунікацій і глобального інформаційного простору Національної академії наук України за участю факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка пройшла тестові випробовування з визначення аеродинамічних впливів при відривних режимах обтікання висотних циліндричних споруд та з 03 січня 2012 року прийнята у промислову експлуатацію в Українському інституті сталевих конструкцій імені В.М.Шимановського.

Головний інженер В.Л.Пасечнюк

Державний концерн
УКРОБОРОНПРОМ
Державне підприємство
«Київський науково-дослідний
Інститут
ГІДРОПРИЛАДІВ»

Україна, 03035, Київ, вул. Сурікова, 3
Тел. (380-44) 239-90-18,
факс(380-44) 239-90-17
e-mail: office@hydrodevices.kiev.ua
ryba@ukrpack.net
WWW.HYDRODEVICES.KIEV.UA

The State Concern
UKROBORONPROM
State Enterprise
«Kyiv Scientific Research
Institute
Of HYDRODEVICES»

3, Surikova str., Kyiv, 03035, Ukraine
Tel.: (380-44) 239-90-18,
fax:(380-44) 239-90-17
e-mail: office@hydrodevices.kiev.ua
ryba@ukrpack.net
WWW.HYDRODEVICES.KIEV.UA

09.11.2015 №____________
на №______________ від__________

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Директор Державного підприємства
«Київський науково - дослідний
інститут гідроприладів»
____________________ **Ю.Я.Меленко**
« 09 » листопада 2015р.

КИЇВСЬКИЙ «ГІДРОПРИЛАДІВ» Ідентифікаційний код 14310098

АКТ ВПРОВАДЖЕННЯ

Цим актом засвідчено, що «Програмно-моделююча система для дослідження нестаціонарних течій та виявлення аерогідродинамічних впливів», яку розроблено (під науковим керівництвом провідного наукового співробітника відділу фізичного та математичного моделювання, к.ф.-м.н., доцента Д.І.Чернія) в межах комплексу науково–дослідних робіт Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору Національної академії наук України (НДР «Розробка обчислювальних технологій моделювання нестаціонарних фізичних процесів», державний реєстраційний номер теми 0112U007538), пройшла тестові випробовування при проведенні проектно-конструкторських робіт з розробки динамічних елементів гідроакустичних систем у ДП «Київський науково - дослідний інститут гідроприладів».

Програмно-моделююча система забезпечує:

- прогнозування розвитку нестаціонарних аерогідродинамічних течій навколо системи конструкцій складної форми;
- виявлення еволюції вихрових структур та полів тиску у наближеному полі, при наявності системи конструкцій, та у віддаленому полі;
- виявлення еволюції вихрових структур у сліді за системою конструкцій;
- виявлення аерогідродинамічних впливів на конструкції складної форми;
- графічне та числове відображення кінематичних та динамічних характеристик, скалярних та векторних полів.

Призначення програмно-моделюючої системи – інформаційне забезпечення проведення дослідних та проектно-конструкторських робіт з розробки гідроакустичних систем.

За результатами випробуваній «Програмно-моделюючу систему для дослідження нестаціонарних течій та виявлення аерогідродинамічних впливів» з 01 листопада 2015 року прийнято у промислову експлуатацію ДП «Київський науково-дослідний інститут гідроприладів».

Заступник директора з наукової роботи,
кандидат фізико-математичних наук ____________ **Ковальчук К.В.**

Начальник науково-дослідного відділу 11,
кандидат технічних наук ____________ **Бабенко В.Й.**

«Ақтөбе
ғылыми зерттеу
геология барлау мұнай
институты»
жауапкершілігі шектеулі
серіктестігі

Товарищество с ограниченной
ответственностью
«Актюбинский
научно-исследовательский
геологоразведочный
нефтяной институт»

Ақтөбе қаласы, Мирзоян көшесі, 17
Тел.: 8 (7132) 40-63-40, 40-63-38, факс: 40-63-33
E-mail: geolog@anigri.kz

город Актобе, ул.Мирзояна, 17
Тел.: 8 (7132) 40-63-40, 40-63-38, факс: 40-63-33
E-mail: geolog@anigri.kz

2013ж.26 сентября № 547

«УТВЕРЖДАЮ»:
Генеральный директор
ТОО «АктюбНИГРИ»,
кандидат геол.-мин.наук
Б.К. Баймагамбетов

АКТ
внедрения программного обеспечения

Настоящий АКТ составлен о том, что «Программная система прогнозирования эколого-аэрационных процессов», основанная на вычислительных технологиях компьютерного моделирования и разработанная под научным руководством к.ф.-м.н., доцента Д.И. Черния в рамках НИР: «Разработка вычислительных технологий моделирования нестационарных физических процессов» (гос.регистрационный номер темы 0112U007538), прошла испытания в ТОО «АктюбНИГРИ» и принята в эксплуатацию для обеспечения мониторинга изменений состояний внешней среды на промышленных и прилегающих к ним территориях, а также информационного обеспечения разработки проектов комплексных природоохранных мероприятий при разведке и добыче углеводородного сырья.

Члены комиссии:

Зам. генерального директора по геологии ____________ К.Т.Улукпанов

Заведующая сектором природоохранного проектирования ____________ Ж.Т.Жубаназарова

Начальник Испытательной лаборатории ____________ Г.Х.Жубанышева

Ведущий научный сотрудник ИТГИП НАНУ, к.ф.-м.н., доцент ____________ Д.И.Черний

0062013523

Київський національний
Університет імені Тараса Шевченка

Факультет кібернетики

Тел.(044) 521 35 54
Факс (044) 522 2005
http://www.unicyb.kiev.ua/

Kiyv National Taras Shevchenko
University

Faculty of Cybernetics

Tel.+(38044) 521 35 54
Fax +(38044) 522 2005
E-mail: root@unicyb.kiev.ua

18.11.2015р. № 389-015
На №

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Декан факультету кібернетики Київського
національного університету
імені Тараса Шевченка,
чл.-кор.НАНУ, д.ф.-м.н., професор
А.В.Анісімов
« 12 » 11 2015р.

АКТ ВПРОВАДЖЕНЯ

Цим актом засвідчено, що результати науково–дослідних робіт Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору Національної академії наук України (НДР «Розробка обчислювальних технологій моделювання нестаціонарних фізичних процесів», державний реєстраційний номер теми 0112U007538), яки отримано (під науковим керівництвом провідного наукового співробітника відділу фізичного та математичного моделювання, к.ф.-м.н., доцента Д.І.Чернія) впроваджено при розробці навчальних програм на факультеті кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка при формуванні курсів «Інтегральні рівняння» (лекційний курс та практичні заняття для бакалаврів 4 року навчання), «Технології чисельного моделювання» (лекційний курс та лабораторні роботи для магістрів 1-го та 2-го року навчання).

Заступник декана факультету кібернетики к.ф.-м.н., доцент — О.Ф.Кашпур

Завідувач кафедри обчислювальної математики
чл.-кор.НАНУ, д.ф.-м.н. , професор — С.І.Ляшко

Професор кафедри обчислювальної математики д.ф.-м.н., професор — Д.А.Клюшин

«УТВЕРЖДАЮ»
Ректор Актюбинского регионального
государственного университета
им. К.Жубанова
Профессор, д.ф.-м.н.
К.К.Кенжебаев
01.10.2015

АКТ
внедрения программного обеспечения

Настоящий АКТ составлен о том, что методические материалы «Вычислительные технологии компьютерного моделирования», которые разработаны к.ф.-м.н., доцентом Д.И.Чернием, в рамках комплекса научно-исследовательских работ выполяемых Інститутом телекомуникаций и глобального информационного пространства (Национальная академия наук Украины) при участии факультета кибернетики Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, внедрены на Физико-математическом факультете Актюбинского регионального государственного университета им. К.Жубанова (Республика Казахстан) при формировании курса лекций «Информационные технологи».

Проректор по научной работе
и международным связям ________________ Б.Х.Кусанова

ЗАТВЕРДЖУЮ
Заступник директора з наукової роботи
Київського науково-дослідного
інституту судових експертиз
Міністерства юстиції України,
канд. юр. наук

ДЛЯ ДОКУМЕНТІВ №1

Н. В. Нестор
«07» лютого 2019

АКТ
про впровадження результатів наукового дослідження «Гідротехнічні споруди та гідрологічні процеси в акваторії Керченської протоки», яке було виконано в Інституті телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, у практичну діяльність Київського науково-дослідного інститут судових експертиз Міністерства юстиції України

Комісія у складі: ученого секретаря КНДІСЕ, кандидата юридичних наук, доцента Колонюка В.П., завідувача відділу інженерно-екологічних досліджень лабораторії інженерно-технічних видів досліджень КНДІСЕ Боровика В. П., заступника завідувача відділу інженерно-екологічних досліджень лабораторії інженерно-технічних видів досліджень КНДІСЕ Копаниці О. Б. склала цей акт про те, що матеріали наукового дослідження «Гідротехнічні споруди та гідрологічні процеси в акваторії Керченської протоки», яке було виконано в Інституті телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України (під науковим керівництвом провідного наукового співробітника, к.ф.-м.н., доцента Чернія Д.І., в рамках НДР «Розробка обчислювальних технологій та методів моделювання для дослідження нестаціонарних процесів») впроваджені у практичну діяльність КНДІСЕ Міністерства юстиції України.

Результати дослідження представлено в електронному вигляді. В якості джерел рекомендовано такі публікації:

1. Черний Д.И. Математическая модель течения в мелководной акватории.// Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна Серія «Мат. моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», Вип. 29, Харків, 2016., С.78-86.
2. Черний Д.И. Вычислительные технологии для метода дискретных особенностей в гидродинамике.//Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна Серія «Мат. моделювання. Інформаційні

технології. Автоматизовані системи управління», Вип. 32, Харків, 2016., С.75-83.
3. Kordas O. A study on mathematical short-term modelling of environmental pollutant transport by sea currents: The Lagrangian approach / O.Kordas, A.Gourjii, E.Nikiforovich, D.Cherniy // Journal of Environmental Accounting and Management. – 2017. – Vol.5, N 2. – p. 87-104 (DOI: 10.5890/JEAM.2017.06.002).
4. Довгий С.А., Лифанов И.К., Черний Д.И. Метод сингулярных интегральных уравнений и вычислительные технологи.-К.: Издательство «Юстон» 2016, 380с.

Результати наукових досліджень ІТГІП НАНУ у зазначених працях використовуються у КНДІСЕ Міністерства юстиції України під час проведення наукової, методичної та експертної діяльності.

Члени комісії:

Учений секретар,
кандидат юридичних наук, доцент В. П. Колонюк

Завідувач ВІЕ ЛІТ КНДІСЕ В. П. Боровик

Заступник завідувача ВІЕ ЛІТ КНДІСЕ О. Б. Копаниця

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
в.о. проректора НАУ
з наукової роботи
Дружинін В.А.
« » 09 .2020р.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ АВІАЦІЙНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
01132330
МІСТО КИЇВ

АКТ ВПРОВАДЖЕННЯ

Комісія у складі: Голови комісії в.о. декана аерокосмічного факультету, д.т.н., професора Кулика М.С., завідувача кафедри аеродинаміки та безпеки польотів ЛА д.т.н., професора Іщенка С.О. і старшого наукового співробітника кафедри к.т.н., с.н.с. Жданова О.І. встановила, що обчислювальні технології, які розроблено (під науковим керівництвом провідного наукового співробітника відділу фізичного та математичного моделювання, к.ф.-м.н., доцента Д.І.Чернія) в межах комплексу науково-дослідних робіт Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору Національної академії наук України (НДР «Розробка обчислювальних технологій та методів моделювання для дослідження нестаціонарних процесів», державний реєстраційний номер теми 0116U000793), впроваджено в моделюючу систему з дослідження нестаціонарних аеродинамічних процесів в будівельних комплексах щільної забудови для порівняльного аналізу результатів числового моделювання і експериментальних досліджень в аеротрубі НАУ.

Голова комісії Кулик М.С.

Члени комісії Іщенко С.О.

Жданов О.І.