

**А. М. Гомилко**

**О. А. Савицкий**

**А. Н. Трофимчук**

**Методы суперпозиции,  
собственных функций и  
ортогональных многочленов  
в граничных задачах  
теории упругости и акустики**



Национальная академия наук Украины  
Институт телекоммуникаций  
и глобального информационного пространства  
Институт гидромеханики

Университет Миколая Коперника, Республика Польша

**А. М. ГОМИЛКО, О. А. САВИЦКИЙ, А. Н. ТРОФИМЧУК**

**МЕТОДЫ СУПЕРПОЗИЦИИ,  
СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ  
И ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ  
В ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ  
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И АКУСТИКИ**

НАУКОВА ДУМКА  
КИЕВ – 2016

### УДК 539.3

Методы суперпозиции, собственных функций и ортогональных многочленов в граничных задачах теории упругости и акустики / А. М. Гомилко, О. А. Савицкий, А. Н. Трофимчук. – К. : Наук. думка, 2016. – 436 с. : ил. – Библиогр. : с. 397–427.

**ISBN 978-966-00-1586-9**

Superposition, Eigenfunctions and Orthogonal Polynomials Methods in Elasticity and Acoustic Boundary Value Problems / A. Gomilko, O. Savytskyi, O. Trofymchuk.

В монографии представлены методы построения и исследования математических моделей ряда физических явлений и объектов. Рассмотрены вопросы математического обоснования применимости в конкретных граничных задачах линейной теории упругости и акустики методов суперпозиции и собственных функций. Представлены примеры применения метода ортогональных многочленов для решения линейных интегральных уравнений динамических контактных задач.

Для научных работников, специалистов в области акустики, теории упругости, геотехники.

У монографії представлено методи побудови та дослідження математичних моделей ряду фізичних явищ та об'єктів. Розглянуто питання математичного обґрунтування придатності у конкретних задачах лінійної теорії пружності та акустики методів суперпозиції і власних функцій. Представлено приклади застосування методу ортогональних багаточленів для розв'язку лінійних інтегральних рівнянь динамічних контактних задач.

Для наукових працівників, спеціалістів у галузі акустики, теорії пружності, геотехніки.

Methods of constructing mathematical models for the investigation of physical phenomena and objects are considered in the book. Mathematical justification of superposition and eigenfunctions methods for boundary value problems of the linear theory of elasticity and acoustics are investigated. Examples of the method of orthogonal polynomials for solving linear integral equations of dynamic contact problems are presented.

The book is intended for scientists, experts in the field of acoustics, theory of elasticity and geotechnics.

*Рекомендовано к печати Учеными советами*

*Института телекоммуникаций и глобального информационного пространства НАН Украины (протокол № 5 от 25.04.2016 г.) и*

*Института гидромеханики НАН Украины (протокол № 3 от 26.04.2016 г.)*

Рецензенты

академик НАН Украины В. Т. Гринченко,

доктор технических наук Н. С. Ремез

Редакция физико-математической и технической литературы

Редактор В. В. Вероцкая

**ISBN 978-966-00-1586-9**

© А. М. Гомилко, О. А. Савицкий,  
А. Н. Трофимчук, 2016

## ВВЕДЕНИЕ

Опыт накопления и систематизации знаний в области исследования математических моделей различных физических явлений демонстрирует важное значение использования классических аналитических методов построения и анализа решений граничных задач математической физики.

В главе 1 кратко представлены уравнения динамической теории упругости, акустики и феноменологической теории М. Био пористо-упругой насыщенной жидкостью (ПУНЖ) среды, описаны методы суперпозиции и собственных функций для решения граничных задач математической физики, описан метод ортогональных многочленов для построения и исследования решений интегральных уравнений динамических контактных задач, приведены основные сведения об интегральных преобразованиях Фурье, Лапласа, Меллина и Ханкеля, которые используются в книге.

В монографии рассмотрены некоторые вопросы, связанные с использованием, в основном применительно к граничным задачам линейной теории упругости и акустики метода суперпозиции (метод частичных областей) – главы 2–4 и метода собственных функций (метод Фурье, метод однородных решений) – глава 5. Содержательный обзор исследования граничных задач теории упругости на основе этих подходов содержится в монографиях [87, 160] и статьях [40, 99, 376]. Несмотря на более чем вековую историю использования методов суперпозиции и собственных функций, актуальными, как с прикладной так и с теоретической точек зрения, остаются вопросы строгого математического обоснования применимости этих методов в конкретных граничных задачах математической физики. Не утрачен интерес к вопросам разрешимости и асимптотического поведения решений алгебраических и интегроалгебраических систем уравнений, возникающих при построении решений граничных задач в рамках метода суперпозиции, вопросам о характере сходимости и возможности регуляризации рядов и интегралов с неизвестными коэффициентами и плотностями, представляющих решение граничной задачи.

Следует отметить, что в практическом плане, что касается возможной физической трактовки получаемых численных результатов, каждый из рассмотренных методов обладает определенными недостатками. Так, использование метода суперпозиции более приспособлено для анализа ближнего поля, в то время как разложения по собственным функциям важны, особенно в динамических задачах, при анализе дальнего поля. Поэтому важным моментом является установ-

ление аналитической связи между представлениями решения граничной задачи по методу суперпозиции и по методу собственных функций.

Метод ортогональных многочленов (полиномов), представленный в главах 6, 7, является эффективным инструментом для построения и исследования широкого класса линейных интегральных уравнений динамических контактных задач. Применение метода позволяет получить эффективные решения для статических и динамических задач о взаимодействии фундаментов с грунтовым основанием.

В главе 6 рассмотрены установившиеся и нестационарные горизонтальные и вращательные (под действием момента в вертикальной плоскости) колебания круглого в плане штампа на упругом полупространстве, а также связанные горизонтально-вращательные колебания. Решение интегральных уравнений основано на представлении неизвестных контактных напряжений в виде рядов по ортогональным в области круга многочленам с коэффициентами, зависящими от времени (метод ортогональных полиномов). На этой основе рассмотрены горизонтальные колебания цилиндрических конструкций, взаимодействующих с упругим основанием и слоем воды, моделирующих колебания гравитационных морских платформ при силовых и сейсмических воздействиях.

В главе 7 моделируется взаимодействие жестких штампов при гармонических вертикальных колебаниях с ПУНЖ основанием по модели Био (полупространство, полоса). Исследуется граничный случай отсутствия дренажа под подошвой фундамента при условии скользящего контакта, рассматривается влияние параметров модели и геометрических параметров на изменение импеданса и реакции с частотой, оценивается изменение составляющих реакций твердой и жидкой фаз.

## ГЛАВА 1

# ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД И ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИСПОЛЬЗУЕМЫХ МЕТОДОВ

### 1.1 Уравнения акустики

Ниже в ряде задач рассматриваются уравнения акустики на основе модели идеальной сжимаемой жидкости для среды, в которой распространяется звук [39, 89, 90, 114, 120, 156, 289]. Изменение состояния такой среды при её возмущениях характеризуется такими величинами: скоростью частиц  $v(\vec{r}, t)$ , давлением  $p(\vec{r}, t)$  и акустическим сжатием  $s(\vec{r}, t)$  – изменением плотности среды при прохождении волн

$$s(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t) - \rho_0}{\rho_0},$$

где  $\vec{r}$  – вектор положения точки,  $t$  – время,  $\rho$  и  $\rho_0$  – плотность соответственно возмущенной и невозмущенной среды.

При изменении давления и плотности частиц среды справедлива зависимость

$$p = K_0 s, \tag{1.1}$$

где  $K_0$  – модуль объемного сжатия (адиабатический):

$$K_0 = V \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}, \tag{1.2}$$

$V$  – объем.

Параметры  $s$  и  $K_0$  являются фундаментальными физическими характеристиками среды. В невозмущенном состоянии среда считается однородной, т. е.  $\rho_0$  и  $K_0$  – постоянные величины.

Сжимаемость среды характеризуется коэффициентом сжатия

$$\beta = 1/K_0.$$

Предположение о физической и геометрической линейности процесса деформирования среды при распространении звуковых волн позволяет существенно упростить систему уравнений гидродинамики [39, 120, 161, 280] и свести задачу описания движения в среде к определению одной из скалярных функций положения точки  $\vec{r}$  и времени  $t$  – потенциала скорости  $\Phi(\vec{r}, t)$  (при безвихревом движении жидкости) или давления  $p(\vec{r}, t)$ . Эти функции связаны между собой соотношением

$$p(\vec{r}, t) = \rho_0 \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (1.3)$$

Обе функции удовлетворяют волновому уравнению, связывающему сжатие и инерцию:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad (1.4)$$

где  $\Delta$  – дифференциальный оператор Лапласа;  $c_0$  – скорость звука

$$c_0^2 = K_0 \rho_0. \quad (1.5)$$

Предполагаем, что все характеристики звукового поля зависят от времени по гармоническому закону (установившиеся колебания) в виде комплексной временной функции  $\exp(i\omega t)$ , где  $\omega$  – круговая частота. С учетом принятой временной зависимости давление определяется как

$$p = i\omega\rho_0\Phi. \quad (1.6)$$

Основное уравнение для потенциала скоростей частиц акустической среды (1.4) переходит в уравнение Гельмгольца:

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0, \quad (1.7)$$

где  $k$  – волновое число

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}. \quad (1.8)$$

При установившемся движении достигается существенное упрощение математической формулировки задачи – отпадает необходимость рассматривать начальные условия и наиболее просто формулируются условия на бесконечности. Далее в акустических задачах рассматривается также аналогичная временная зависимость  $\exp(-i\omega t)$ .

В цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$ , где  $r$  – радиальная,  $\varphi$  – угловая,  $z$  – осевая координаты, оператор  $\Delta$  в дифференциальных уравнениях (1.4), (1.7) для потенциала скорости  $\Phi(r, \varphi, z, t)$  имеет вид

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.9)$$

Типичными задачами акустики, согласно [289] являются задача излучения и задача дифракции звука. Граничную поверхность обозначим здесь  $S$ , а  $n$  – нормаль к поверхности.

Для описания акустических свойств различных сред или тел, ограничивающих область существования звуковой волны, удобной характеристикой границы оказывается величина акустического импеданса  $Z$ , равная отношению звукового давления к нормальной составляющей колебательной скорости:

$$Z = -p/v_n. \quad (1.10)$$

Выбор знака здесь соответствует случаю, когда нормаль к поверхности  $S$  направлена наружу.

Граничные условия для акустических задач имеют следующие основные особенности.

Задача дифракции заключается в определении звукового поля при падении волны  $\Phi_0$  на тело, ограниченное поверхностью  $S$ . В результате рассеяния возникает новое поле  $\Phi = \Phi_0 + \Phi_S$ , причем разница  $\Phi_S$  между новым полем и первоначальным называется рассеянной волной. Полное поле  $\Phi$  на поверхности  $S$  должно удовлетворять одному из следующих граничных условий.

1)  $\Phi|_S = 0$  – задача Дирихле, соответствующая дифракции звука на абсолютно мягкой поверхности, на которой и имеем нулевое значение давления  $p|_S = 0$ ;

2)  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$  – задача Неймана, соответствующая дифракции на абсолютно жесткой поверхности со значением нормальной к поверхности  $S$  составляющей скорости  $-\text{grad } \Phi \cdot \vec{n}|_S = v(S, t)$ ;

3)  $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \sigma \Phi\right)|_S = 0$  – смешанная (или третья) краевая задача, соответствующая дифракции на импедансной поверхности, где  $\sigma$  – коэффициент;

4)  $\left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \sigma(S) \Phi\right]|_S = 0$  – четвертая краевая задача, из которой в частных случаях  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $\sigma = \text{const}$  следуют соответственно первая, вторая или третья задачи.

Кроме указанных задач существует обширный класс проблем, для которых граничные условия зависят не только от первой производной потенциала, но и от производных более высоких порядков. В общем случае  $L\Phi = 0$ , где  $L$  – дифференциальный оператор, определяющий свойства поверхности.

В задаче излучения на некоторой поверхности  $S$  задается нормальная составляющая колебательной скорости

$$v|_S = -\frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_S = f(S),$$



а требуется определить звуковое поле в пространстве. Может быть задана не колебательная скорость, а звуковое давление, или потенциал  $\Phi|_S = f(S)$ , или комбинация  $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n} + \sigma\Phi\right)\Big|_S = f(S)$ .

Задача определения звукового поля по заданному давлению или потенциалу  $\Phi|_S = f(S)$  называется задачей Дирихле (первой краевой задачей).

Определение поля по заданной производной (колебательной скорости)  $\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_S = f(S)$  называется задачей Неймана (второй краевой задачей).

Если же задана комбинация  $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n} + \sigma\Phi\right)\Big|_S = f(S)$ , причем  $\sigma$  на всей поверхности  $S$  является постоянной величиной, то такая задача называется смешанной (третьей) краевой задачей.

Если  $\sigma = \sigma(S)$  зависит от расположения точки на поверхности  $S$ , то такая задача называется четвертой краевой задачей, простейшим примером которой является определение звукового поля, излучаемого поршнем, движущимся с заданной колебательной скоростью и расположенным в акустически мягком экране с граничным условием  $\Phi|_S = f(S)$ .

В задачах дифракции, в отличие от задач излучения, условиям излучения должна удовлетворять рассеянная часть полного поля  $\Phi_S$ .

Приведенные граничные условия лишь приближенно характеризуют свойства реальной поверхности при малых колебаниях.

Кроме условий на границе для определения поля необходимо также использовать условие излучения, заключающееся в том, что из всех возможных решений следует выбирать такие, которые обеспечивают убывание поля по определенному закону при удалении точки наблюдения от источника излучения.

В рассматриваемых ниже задачах учитывается спектр монохроматических компонент с разными волновыми числами, описываемый уравнениями при сложных граничных условиях с применением интегральных преобразований.

Акустические свойства пористоупругой насыщенной жидкостью (ПУНЖ) среды при определенных условиях могут быть рассмотрены на основе феноменологической модели среды, предложенной М. А. Био и Я. И. Френкелем [141, 142, 278, 316, 317, 319], которая описывает существование трех типов волн в такой среде. Описание модели приведено в § 1.3.

## 1.2 Уравнения динамической теории упругости

Уравнения линейной динамической теории упругости (см., например, [91, 95, 118, 136, 190, 203, 229, 255, 306]) справедливы для материалов, обладающих упругостью, в процессах, при которых можно считать малыми перемещения, деформации, скорости, ускорения и изменения плотности частиц

сплошной среды. Рассматриваемые процессы являются адиабатическими или изотермическими.

Зависимость между напряжениями и деформациями идеально упругого однородного анизотропного тела выражает закон Гука

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1.11)$$

где  $c_{ijkl}$  – упругие константы;  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений;  $\varepsilon_{kl}$  – тензор деформаций. Связь перемещений с упругими деформациями определяется геометрическими соотношениями Коши

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}), \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (1.12)$$

где компоненты вектора перемещений  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ .

Общее уравнение движения имеет вид

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  – вектор объемных сил;  $\rho$  – плотность среды в невозмущенном состоянии.

Для изотропной среды

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}); \quad (1.13)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1.14)$$

где

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = e = \operatorname{div} \vec{u}$$

– объемное расширение [136];  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j; \end{cases} \quad (1.15)$$

$\mu, \lambda$  – параметры Ламе:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu \equiv G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (1.16)$$

Здесь  $G$  – модуль сдвига;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Рассмотрим уравнения движения изотропной упругой среды (уравнения Ламе) в векторной форме:

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \vec{F} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (1.17)$$

где  $\nabla^2 = \Delta$  – оператор Лапласа. Для декартовых координат имеем

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial \bar{x}_i} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.18)$$

где  $\bar{x}_i$  – декартовы координаты точки.

Векторное поле перемещений можно представить в виде [203]

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{\Psi}, \quad \text{div } \vec{\Psi} = 0. \quad (1.19)$$

Подставляя (1.19) в (1.17) и применяя операции дивергенции и ротации, в случае отсутствия объемных сил ( $\vec{F} = 0$ ) получаем уравнение

$$\text{grad} \left[ (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi - \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right] + \text{rot} \left( \mu \nabla^2 \vec{\Psi} - \rho \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (1.20)$$

Отсюда для потенциалов следуют однородные волновые уравнения

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0; \quad \nabla^2 \vec{\Psi} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.21)$$

где  $c_1 = \sqrt{\lambda + 2\mu/\rho}$  – продольные упругие волны (не связанные с вращением, безвихревые), распространяющиеся в упругой среде,  $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$  – поперечные упругие волны (не связанные с объемным расширением, эквиволлюминальные).

При рассмотрении шаровых и девиаторных составляющих тензоров деформаций и напряжений для шаровой составляющей (при гидростатическом и гидродинамическом давлении  $p$ ) рассматривается объемный модуль упругости (модуль объемного сжатия):

$$K = -V \frac{\partial p}{\partial V} = \lambda + \frac{2}{3} \mu = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}. \quad (1.22)$$

Таким образом, движение упругой изотропной среды характеризуется двумя упругими постоянными, например  $\lambda$ ,  $\mu$  или  $E$ ,  $\nu$ , и плотностью  $\rho$ . Связь параметров из выражений (1.16), (1.22) и скоростей объемных волн представлена в [91, табл. 1], [329, с. 62] и др.

Второе уравнение в (1.21) является векторным, оно эквивалентно системе трех скалярных уравнений. В случае гармонических колебаний получаются уравнения Гельмгольца (1.7).

Вдоль границ раздела могут распространяться поверхностные волны с характерными для них скоростями [35]: например, волны Рэлея на свободной поверхности упругого полупространства, волны Стоунли (при определенных условиях) на границе раздела упругих сред. В слоистой упругой среде возникают волны Лява.

Если в (1.17) положить  $\mu = 0$ , то имеем линейризованные уравнения идеальной сжимаемой жидкости, при этом  $K = K_0$  из (1.2).

Далее рассматриваются уравнения динамической теории упругости и акустики в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ , где  $r$  – радиальная,  $\varphi$  – угловая,  $z$  – осевая координаты. Уравнения теории упругости для неосесимметричного случая, рассматриваемые в главе 6, представлены, например, в [5, 160, 332, 400, 413, 420]. В этом случае уравнения движения упругой среды в цилиндрических координатах имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \beta^2) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \beta^2 \nabla^2 w = \beta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ (1 - \beta^2) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \beta^2 \nabla^2 u - \beta^2 \left( \frac{u}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ (1 - \beta^2) \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} + \beta^2 \nabla^2 v - \beta^2 \left( \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) = \beta^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{array} \right. \quad (1.23)$$

с оператором (1.9), где  $w = w(r, \phi, z, t)$ ,  $u = u(r, \phi, z, t)$ ,  $v = v(r, \phi, z, t)$  – соответственно вертикальная, радиальная и тангенциальная составляющие перемещений упругой среды;  $\theta$  – объемная сжимаемость:

$$\theta = \theta(r, \phi, z, t) = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi}.$$

Напряжения и деформации являются периодическими функциями угла  $\phi$ . Перемещение представляется в форме рядов Фурье по переменной  $\phi$  с общим членом ряда для каждой из компонент:

$$u = u^*(r, z) \cos(n\phi), \quad v = v^*(r, z) \sin(n\phi), \quad w = w^*(r, z) \cos(n\phi). \quad (1.24)$$

Перемещения связаны с потенциалами следующим образом:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

где  $u(r, z, \phi, t)$ ,  $v(r, z, \phi, t)$  – соответственно радиальные и вертикальные перемещения точек упругой среды;  $\varphi$ ,  $\psi$  – скалярные потенциалы.

Компоненты напряжений определяются такими зависимостями: на радиально ориентированных площадках

$$\sigma_r = \lambda \frac{\partial v}{\partial z} + (\lambda + 2\mu) \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) u;$$

на площадках, перпендикулярных оси  $O\bar{z}$ ,

$$\sigma_z = \lambda \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) u + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial z};$$

касательные напряжения

$$\tau_{rz} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

Для полной постановки начально-краевой задачи уравнения динамической теории упругости необходимо дополнить начальными и граничными условиями.

Начальные условия (при  $t = 0$ ) обычно относятся к перемещениям и скоростям перемещений.

Граничные условия задаются в перемещениях и в напряжениях. Основными считаются следующие типы граничных задач: первая – заданы смещения, вторая – заданы напряжения. Различают также смешанные граничные условия (задана линейная комбинация смещений и напряжений или на одной части границы заданы смещения и на другой – напряжения) и контактные условия (например, заданы нормальная составляющая смещения и касательные составляющие напряжения или касательные составляющие смещения и нормальная составляющая напряжения).

Если на поверхности  $S$ , ограничивающей упругое тело, задана внешняя нагрузка  $q$ , то имеем граничные условия в напряжениях:

$$\sigma_{ij} n_j = q_i. \quad (1.25)$$

Если на  $S$  заданы смещения, имеем граничные условия в перемещениях:

$$u_i|_S = f_i, \quad (1.26)$$

где  $f_i$  – заданные функции. Могут быть заданы и смешанные условия:

$$\sigma_{ij} n_j|_{S_1} = q_i; \quad u_i|_{S_2} = f_i, \quad (1.27)$$

где  $S$  включает поверхности  $S_1$  и  $S_2$ .

Для решения задач задаются также начальные условия и условия на бесконечности.

В случае бесконечных областей постановка задач о распространении волн дополняется условиями излучения [12], требующими отсутствия на бесконечности источников энергии. Для среды с диссипацией формулировка условий излучения достаточно проста: все характеристики волнового поля стремятся к нулю с увеличением расстояния от источников колебаний. Для непоглощающих сред задача усложняется. Условия излучения для акустических сред получены А. Зоммерфельдом (см., например, [91, гл. 1, § 5]) и выражают тот

факт, что фазовая скорость и скорость переноса энергии в гармонической волне имеют одинаковую направленность.

Потенциальная энергия упругих деформаций в единице объема (упругий потенциал) определяется выражением

$$W = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$

и является положительно-определенной квадратичной функцией компонент тензора деформаций.

Важным является понятие потока мощности в упругой среде. Среднее за период  $T$  значение плотности потока мощности определяется для двумерного случая зависимостями

$$\begin{aligned} W_s^x &= (-i\omega/4) (\sigma_x u^* + \tau_{xy} v^* - \sigma_x^* u - \tau_{xy}^* v); \\ W_s^y &= (-i\omega/4) (\tau_{yx} u^* + \sigma_y v^* - \tau_{yx}^* u - \sigma_y^* v), \end{aligned} \quad (1.28)$$

где

$$\vec{W}_s = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{W}_s^0 dt$$

и  $\vec{W}_s^0$  – мгновенное значение вектора плотности потока мощности.

Решением смешанной динамической задачи теории упругости является функция перемещений  $\vec{u}$ , удовлетворяющих уравнениям Ламе (или в случае однородной анизотропной среды – более общей системе линейных уравнений гиперболического типа), заданным начальным и граничным условиям, условиями контакта, ограничениям в окрестности сингулярных точек и линий.

Формальное решение некоторых задач о гармонических колебаниях для бесконечных и полубесконечных областей приводит к выражениям для характеристик волновых полей, содержащих распространяющиеся и стоячие волны [386]. Такой результат (см. § 6.1) не удовлетворяет физическим условиям, поскольку упругие волны от источника возмущения, приложенного к границе, не встречают на своем пути преград или материалов с другими свойствами, отразившись от которых они могли бы образовать стоячие волны [230, 386]. Г. Лэмб [386] указал способ получения правильного с физической точки зрения результата из формального решения. Чтобы решение удовлетворяло принципу излучения, т. е. содержало только распространяющиеся от источника возмущения на бесконечность волны, необходимо выполнить интегрирование в комплексной плоскости по замкнутому контуру, выделить (например, методом Дж. Лайтхилла [238, гл. 2, § 4]) и исключить слагаемые, соответствующие стоячим волнам. Такая процедура применена ниже при получении выражений для компонент трансформант перемещений границы упругого полупространства (6.43), (6.87).

В случае ограниченной области задаются краевые условия на границе или на ее отдельных участках: вектор напряжения, вектор перемещения, нормальная составляющая вектора перемещения и касательная составляющая вектора напряжения или наоборот. Точки, в которых заданы такие условия, называются регулярными.

На участках границы, где имеет место смена упругих свойств, обычно задаются условия жесткого контакта или скользящего контакта.

В связи с наличием на границе сингулярных линий и точек (ребер и вершин, линий смены граничных условий, на которых не определены граничные условия из-за отсутствия нормали к границе), а также линий смены свойств упругой среды, необходимо задать здесь дополнительные условия, чтобы обеспечить единственность решения (см., например монографию В. А. Бабешко, Е. В. Глушкова и Ж. Ф. Зинченко [12]). Эти условия связываются с определенными физическими требованиями. Ограничение на поведение решений динамических задач в окрестности неподвижных сингулярных точек и линий следующее: если компоненты вектора перемещения имеют порядок  $\varepsilon^\beta + \text{const}$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то главные члены компонент напряжения пропорциональны  $\varepsilon^{\beta-1}$ . Достаточным требованием здесь является ограничение перемещения в окрестности сингулярной линии ( $\beta > 0$ ), а в окрестности сингулярной точки  $\beta > -1/2$ .

Для подвижных границ или сингулярных линий и точек ставятся специальные кинематические и динамические условия совместности, выражающие закон сохранения количества движения при переходе через поверхность.

### 1.3 Уравнения движения пористоупругой насыщенной жидкостью среды

#### 1.3.1 Многофазные модели грунтовой среды

В различных приложениях разрабатываются и применяются теории пористоупругой насыщенной жидкостью среды. Обзор моделей пористых сред, методов определения параметров моделей и решение задач представлен в работах В. Г. Баженова и Л. А. Игумнова [14], М. А. Био [315–317], О. В. Бочарова с соавт. [321], Г. Л. Бровко [30, 274, 330], Н. С. Городецкой [79–84], А. А. Губайдулина и О. Ю. Болдыревой [94], Ал. А. Ковтуна [132, 133], Р. М. Исрафилова и Е. В. Савельевой [121, 122], В. Н. Николаевского [189], В. Н. Николаевского с соавт. [172], Ю. Н. Немиша и Р. М. Исрафилова [184], Б. Мардонова [167], Я. Я. Рущицкого [217], Я. Я. Рущицкого и Р. М. Исрафилова [218, 219], Я. И. Френкеля [278], Л. П. Хорошуна [282, 283], R. de Boer [322–324], Т. Bourbie с соавт. [329], М. Р. Cleary [338], Н. Deresiewicz, R. Skalak [347], Н. Kingsbury [384], Y. Kim, Н. Kingsbury [382], С. С. Mei, М. А. Foda [392], М. Schanz, D. Pryl [409], К. Wilmanski [441], а также в [266] и др. Разнообразные модели и задачи физики многофазных сред рассматривались в работах Р. И. Нигматулина [185–187], О. Coussy [343].

Основные динамические свойства насыщенных жидкостью грунтовых сред и оснований сооружений и акустические явления в них рассматривались в работах [62, 266, 293, 295, 309, 313, 335, 337, 396, 397, 410, 429, 432] и др.

Практическое значение имеет отличие характера взаимодействия фаз при разных условиях: тип грунта, степень насыщения его жидкостью, сжимаемость и упругость фаз, условия дренирования, частотный состав динамического воздействия и др. Крайними случаями, рассмотренными в работах [162, 238, 266], являются модели сред “с совершенной связью” и “без связи”. Это означает, что различаются следующие состояния среды: дренированное (drained), при нулевом поровом давлении и отсутствии фильтрации, и недренированное (undrained), при сохранении объема жидкости в заданном объеме среды. Для этих состояний могут быть введены различные упругие модули [338].

Моделирование и анализ изменения статических осадок фундаментных конструкций при водонасыщении грунта и решение некоторых задач при динамических нагрузках может быть выполнено с использованием программного комплекса PLAXIS на основе упругих, упругопластических моделей грунта и модели A. W. Skempton [424] для определения изменения порового давления  $\Delta p_0$  при изменении главных напряжений  $\Delta\sigma_1$  и  $\Delta\sigma_3$  из выражения

$$\Delta p_0 = B[(\Delta\sigma_1 + 2\Delta\sigma_3) + (3A - 1)(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)]/3$$

с коэффициентами  $-0,5 \leq A \leq 1,5$ , ( $A \neq 0$  для связных грунтов) и  $0 \leq B \leq 1$  ( $B = 1$  при полном водонасыщении), определяемыми из опытов на недренированных образцах грунта.

Широкое применение получила феноменологическая модель ПУНЖ среды, разработанная Я. И. Френкелем [278] и М. Био [315–320] (см. п. 1.3.2).

В статье V. Gerasik и M. Stastna [354] рассматривается двумерная краевая задача для пористого полупространства с открытой границей, описываемого уравнениями модели Био. С использованием методов функций комплексной переменной общее решение представлено как суперпозиция вкладов четырех типов движения, соответствующих первой и второй продольным, поперечной и рзлеевской волнам. Исследованы асимптотическое решение в дальнем поле для объемных мод и численное решение для ближнего поля.

Обзорная статья K. Wilmanski [441] посвящена применимости четырех основополагающих параметров модели Био для пористоупругих материалов: связи напряжений фаз, присутствия относительных ускорений в уравнениях движения, зависимость проницаемости от частоты и изменения пористости. Рассмотрены эффекты изменения этих параметров при анализе акустических волн, распространении фронтов монохроматических и поверхностных волн, включая волны на границе раздела ПУНЖ среды и жидкости.

R. Stoll и другие исследователи [106, 428, 437, 442] предложили учитывать в модели Био потери от движения частиц скелета в точках контакта (модель Био-Столла) [427]. При этом вводятся комплексные модули сдвига



$\bar{\mu} = \mu(1 + i\delta_s)$  и всестороннего сжатия  $\bar{K}_s = K_s(1 + i\delta_l)$ . Мнимые части этих модулей определяются через логарифмические декременты для продольной  $\delta_l$  и поперечной  $\delta_s$  волн. В последующих работах [247, 429, 430] Р. Столл обобщил результаты экспериментов по измерению затухания в грунтах и выбору упругих постоянных среды.

Проблемам акустики и геофизики для модели Био с учетом анизотропии и вязкоупругости посвящена книга Т. Vourbie с соавт. [329].

Моделированию слоистых сред с использованием модели Био посвящены работы [81, 132, 177] и др.

В работах Л. А. Молоткова [178, 179] построены и исследованы эффективные модели многослойных периодических сред, в которых чередуются: два слоя Био, слой Био с упругим слоем, слой Био с жидким слоем.

Аналитические решения для слоя (модель Био) в двумерной постановке рассматривались в работах Н. С. Городецкой [81], Ал. А. Ковтуна [132]. В последней рассмотрено распространение волн в слое с жесткими или упругими (упругие полупространства) граничными условиями.

Решение для перемещений, эффективных напряжений и порового давления в ПУНЖ слое с заземленной нижней гранью представлено в [266, § 5.1] для осесимметричной гармонической нагрузки типа непроницаемого штампа.

Результаты исследования напряжений и перемещений (одномерный случай, метод конечных элементов) при действии гармонической и нестационарной нагрузки на слой из ПУНЖ материала представлены в статьях [262, 263], позже подобные результаты были опубликованы в статье М. Schanz и D. Pryl [409] и других работах. Применение метода конечных элементов и численного интегрирования привело здесь к искажению численных результатов (эффект Гиббса). Аналитическое обращение трансформант преобразования Лапласа и Фурье применяется при решении нестационарных задач для упругого слоя в работах В. Д. Кубенко [149, 150] и в статьях Р. М. Исрафилова и Е. В. Савельевой [121, 122] для полупространства и цилиндра в рамках модели Био.

Для исследования влияния скорости движения осциллирующей нагрузки на грунтовую среду Т. В. Суворова в [248] с помощью двумерного преобразования Фурье построила решение пространственной задачи, описывающее волновое поле в вязкоупругом и гетерогенном водонасыщенном слоистом полупространстве, генерируемое движением по его поверхности осциллирующей нагрузки. Основание моделировалось также слоем, полупространством, двухслойным полупространством. Варьировались характер динамического воздействия, толщина верхнего слоя, механические характеристики (плотность, скорость распространения волн, пористость, водонасыщенность, характеристика внутреннего трения).

Следует отметить некоторые другие модели ПУНЖ среды. В работе R. Burridge и J. B. Keller [331] были получены уравнения, описывающие линейное макроскопическое механическое поведение пористого упругого тела, насыщен-

ного вязкой сжимаемой жидкостью. Вывод основан на уравнениях линейной теории упругости в твердом теле, линеаризованных уравнениях Навье-Стокса для жидкости и соответствующих условий на границах раздела твердого тела и жидкости. Размер пор считается малым относительно макроскопического масштаба, вследствие чего для вывода макроскопических уравнений может быть применен двухпространственный метод гомогенизации. Положив малой безразмерную вязкость жидкости, авторы пришли к уравнениям Био. Если безразмерная вязкость порядка единицы, то получены другие уравнения, соответствующие вязкоупругому твердому телу.

В статье В. И. Кондаурова [137] в рамках гипотезы взаимопроникающих континуумов была рассмотрена новая феноменологическая модель насыщенной жидкостью пористой среды. Дано термодинамическое обоснование тензора эффективных напряжений. Показано, что уравнения Био – одна из форм термодинамически согласованных определяющих соотношений.

### 1.3.2 Уравнения модели Био

Модель Био в ее развитии была представлена автором в статьях [315–320]. Для насыщенных жидкостью пористых грунтовых сред в этой модели принимаются следующие допущения.

1. Грунт состоит из двух условно сплошных взаимопроникающих фаз – скелета грунта (твердые минеральные частицы) и газированной поровой жидкости. Механические свойства скелета грунта сохраняются и в случае насыщения жидкостью и определяются действием напряжений, возникающих в скелете. Изменение давления в поровой жидкости вызывает ее сжатие и движение по порам, но не влияет на деформацию скелета грунта. Поэтому напряжения в скелете грунта называют эффективными, а давление в поровой жидкости – нейтральным.

2. Размеры пор малы по сравнению с расстоянием, на котором существенно изменяются кинематические и динамические характеристики движения.

3. Фазовые переходы в среде отсутствуют.

4. Деформации и перемещения твердой и жидкой фаз небольшие т. е. возмущения принимаются слабыми.

5. Газовая составляющая смеси полностью растворена в жидкости, характеризуется объемным содержанием и влияет на плотность и модуль объемной сжимаемости жидкости.

6. Кинетическая энергия пульсационного движения в твердой и жидкой фазах и тензор вязких напряжений в жидкости пренебрежимо малы, т. е. вязкость жидкости учитывается только в силе межфазного взаимодействия.

7. Температурные эффекты в среде не принимаются во внимание.

В предположении линейности и изотропности пористой твердой фазы закон Гука для ПУНЖ среды представляется в форме

$$\sigma_{ij}^s = A e \delta_{ij} + 2N e_{ij} + Q \epsilon \delta_{ij}, \quad \sigma^f = -\vartheta p_0 = Q e + \mathcal{R} \epsilon, \quad (1.29)$$

где  $e_{ij}$  – геометрические соотношения Коши для тензора деформаций твердой фазы:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \bar{x}_i} \right); \quad (1.30)$$

$e$  – объемное расширение твердой фазы (минерального скелета) и  $\epsilon$  – объемное расширение жидкой фазы:

$$\begin{aligned} e &= \operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}; \\ \epsilon &= \operatorname{div} \vec{U} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}; \end{aligned} \quad (1.31)$$

$u_i, U_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – компоненты векторов перемещений твердой  $\vec{u}$  и жидкой  $\vec{U}$  фаз. Здесь используются упругие характеристики двухфазной среды:

$$\begin{aligned} N &= \mu_p; \quad A = \lambda_p + K_0 a_0^2 S_0 / \vartheta = \lambda_p - Q^2 / R; \\ \mathcal{R} &= \vartheta K_0 S_0; \quad Q = a_0 K_0 S_0, \end{aligned} \quad (1.32)$$

где  $\lambda_p, \mu_p$  – упругие константы Ламе пористого упругого скелета (дренированной среды);  $\vartheta$  – открытая осредненная пористость;  $K_0$  – модуль объемной сжимаемости жидкости;  $a_0 = 1 - \vartheta - K_s / K_r$ ;  $K_s = \lambda_p + 2\mu_p / 3$  – модуль всестороннего сжатия пористого скелета с пустыми порами;  $K_r$  – истинный модуль сжимаемости твердой фазы;  $S_0 = \vartheta K_r / (\vartheta K_r + a_0 K_0)$ .

Напряженное состояние зернистой твердой фазы с насыщенными жидкостью порами характеризуется эффективным напряжением (часть истинного напряжения в твердой фазе, которая передается по контакту между зернами скелета), введенного К. Терцаги [254], [433, p. 12]

$$\sigma_{ij}^{ef} = \sigma_{ij} - p_0. \quad (1.33)$$

Согласно теории Био  $A$  и  $N$  соответствуют постоянным Ламе в теории упругости;  $\mathcal{R}$  представляет давление в жидкости, необходимое для сохранения постоянства общего объема двухфазной среды; коэффициент  $Q$  связывает изменения объемов фаз, при этом  $\mathcal{R}$  и  $Q$  принимают положительные значения. Определению значений параметров и коэффициентов модели Био посвящены статьи [320, 382, 384, 385] и др.

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} + \mathbf{b} \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial U_i}{\partial t} \right) &= \frac{\partial \sigma_{ij}^s}{\partial \bar{x}_j}, \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} + \mathbf{b} \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} - \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) &= \frac{\partial \sigma^f}{\partial \bar{x}_i}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

где параметр

$$\mathbf{b} = \vartheta^2 \theta_0 / K_{pr} \quad (1.35)$$

учитывает внутреннее трение при взаимном смещении твердой матрицы и поровой жидкости;  $K_{pr} = k_f \theta_0 / (\rho_f g)$  – коэффициент проницаемости;  $k_f$  – коэффициент фильтрации;  $\rho_{11} = (1 - \vartheta) \rho_s - \rho_{12}$  и  $\rho_{22} = \vartheta \rho_f - \rho_{12}$  – эффективные плотности твердой и жидкой фаз соответственно.

Коэффициент динамической связи фаз (добавочная плотность)  $\rho_{12}$  имеет, как показал М. А. Био [316], отрицательные значения и часто принимается равным 0. Для оценки его значения известны формулы

$$\rho_{12} = -\rho_\alpha = -\vartheta \rho_f C_\alpha,$$

где  $C_\alpha$  зависит от формы пор и может приниматься равным 0,25, или

$$\rho_{12} = -\frac{2}{3} \vartheta (1 - \vartheta) \rho_f.$$

Уравнения (1.29), (1.31), (1.34) составляют замкнутую систему для решения линейных задач динамики ПУНЖ среды и представляют собой модель Био (см. [316, 317]). Модель описывает распространение в двухфазной среде трех типов объемных волн, которые определяются экспериментально в водонасыщенных грунтах донных осадков и других средах с жестким упругим скелетом.

Уравнения модели Био, полученные с использованием другой системы коэффициентов, представлены в [132, 266, 320, 337, 384] и др.

Рассмотрим методику определения скоростей волн для численного моделирования ПУНЖ среды. Если в уравнения движения (1.34) подставить компоненты напряжений  $\sigma_{ij}^s$  и  $\sigma^f$ , выраженные через деформации  $e_{ij}$  и  $\epsilon$  по формулам (1.31), а последние представить через перемещения  $u_i$  и  $U_i$ , то получим систему двух векторных уравнений относительно перемещений твердой матрицы и жидкой фазы:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \nabla^2 \vec{u} + \text{grad} [(A + \mathcal{N}) \text{div} \vec{u} + Q \text{div} \vec{U}] &= \\ = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} \vec{u} + \rho_{12} \vec{U}) + \mathbf{b} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{u} - \vec{U}), \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} & \text{grad}(Q \operatorname{div} \vec{u} + \mathcal{R} \operatorname{div} \vec{U}) = \\ & = \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2} (\rho_{12} \vec{u} + \rho_{22} \vec{U}) + \mathbf{b} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\vec{U} - \vec{u}). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Векторы перемещения разделяются на безвихревые и соленоидальные составляющие [141, 316]:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \operatorname{grad} \varphi_1 + \operatorname{rot} \vec{\psi}_1, \quad \operatorname{rot} \varphi_1 = 0, \quad \operatorname{div} \vec{\psi}_1 = 0, \\ \vec{U} &= \operatorname{grad} \varphi_2 + \operatorname{rot} \vec{\psi}_2, \quad \operatorname{rot} \varphi_2 = 0, \quad \operatorname{div} \vec{\psi}_2 = 0, \end{aligned} \quad (1.38)$$

что приводит уравнения (1.36), (1.37) к следующей системе:

$$\begin{aligned} (A + 2\mathcal{N}) \nabla^2 \varphi_1 + Q \nabla^2 \varphi_2 &= \rho_{11} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \bar{t}^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \bar{t}^2} + \mathbf{b} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\varphi_1 - \varphi_2), \\ Q \nabla^2 \varphi_1 + \mathcal{R} \nabla^2 \varphi_2 &= \rho_{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \bar{t}^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \bar{t}^2} + \mathbf{b} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\varphi_2 - \varphi_1), \\ \mathcal{N} \nabla^2 \vec{\psi}_1 &= \rho_{11} \frac{\partial^2 \vec{\psi}_1}{\partial \bar{t}^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \vec{\psi}_2}{\partial \bar{t}^2} + \mathbf{b} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\vec{\psi}_1 - \vec{\psi}_2), \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 \vec{\psi}_1}{\partial \bar{t}^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \vec{\psi}_2}{\partial \bar{t}^2} + \mathbf{b} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} (\vec{\psi}_2 - \vec{\psi}_1) &= 0. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Пусть  $\bar{\varphi}_j, \bar{\psi}_j, j = 1, 2$ , – преобразования Лапласа соответствующих потенциалов. Тогда, применяя к первым двум уравнениям (1.39) преобразование Лапласа по переменной  $\bar{t}$  (с параметром преобразования  $p$ ) и, исключая  $\Delta^2 \bar{\varphi}_2$ , получаем

$$\bar{\varphi}_2 = \frac{\nabla^2 \bar{\varphi}_1 [(A + 2\mathcal{N})\mathcal{R} - Q^2] - \bar{\varphi}_1 [p^2(\rho_{11}\mathcal{R} - \rho_{12}Q) + \mathbf{b}p(\mathcal{R} + Q)]}{p^2(\rho_{12}\mathcal{R} - \rho_{22}Q) - \mathbf{b}p(\mathcal{R} + Q)}. \quad (1.40)$$

Подставляя (1.40) в первое уравнение системы (1.39), имеем

$$\begin{aligned} & [(A + 2\mathcal{N})\mathcal{R} - Q^2] \nabla^4 \bar{\varphi}_1 - \\ & - p^2 [(A + 2\mathcal{N})\rho_{22} + \mathcal{R}\rho_{11} - 2Q\rho_{12} + (A + 2\mathcal{N} + \mathcal{R} + 2Q)\mathbf{b}/p] \nabla^2 \bar{\varphi}_1 + \\ & + p^4 [\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 + \varrho \mathbf{b}/p] \bar{\varphi}_1 = 0, \end{aligned} \quad (1.41)$$

где  $\varrho = \rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12}$  – суммарная плотность двухфазной среды, введенная в [316].

Решение уравнения (1.41) можно представить в виде

$$\bar{\varphi}_1 = \bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2, \quad (1.42)$$

причем введенные функции находятся из решения уравнений

$$(\nabla^2 - p^2 \beta_1^2) \bar{\Phi}_1 = 0, \quad (\nabla^2 - p^2 \beta_2^2) \bar{\Phi}_2 = 0, \quad (1.43)$$

где

$$\beta_1 = c_2/c_1(p); \quad \beta_2 = c_2/c_{12}(p); \quad (1.44)$$

$c_1(p) = c/\sqrt{z_1}$  и  $c_{12}(p) = c/\sqrt{z_2}$  – соответственно скорость продольных волн первого и второго рода с учетом диссипации;  $c_2 = \sqrt{\mathcal{N}/\rho_e}$  – скорость поперечной волны без учета диссипации [317, (5.23)];  $\rho_e = \rho_{11} - \rho_{12}^2/\rho_{22}$  – плотность двухфазной среды (для поперечных волн);  $z_1$  и  $z_2$  – корни квадратного уравнения

$$(s_{11} s_{22} - s_{12}^2) z^2 - [s_{11} \Gamma_{22} + s_{22} \Gamma_{11} - 2s_{12} \Gamma_{12} + \mathbf{b}/(\varrho p)] z + [\Gamma_{11} \Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2 + \mathbf{b}/(\varrho p)] = 0. \quad (1.45)$$

Здесь введены обозначения для безразмерных параметров:  
– инерционных (динамических)

$$\Gamma_{11} = \rho_{11}/\varrho; \quad \Gamma_{12} = \rho_{12}/\varrho; \quad \Gamma_{22} = \rho_{22}/\varrho;$$

– упругих

$$s_{11} = (A + 2\mathcal{N})/H; \quad s_{12} = Q/H; \quad s_{22} = \mathcal{R}/H, \quad (1.46)$$

где

$$c^2 = H/\varrho; \quad H = A + 2\mathcal{N} + \mathcal{R} + 2Q. \quad (1.47)$$

Первым, согласно [316], принимается корень  $z_1$ , значение которого стремится к 1 при стремлении частоты к 0.

С учетом (1.43) и (1.45) выражение (1.40) записывается в виде

$$\bar{\varphi}_2 = M_1 \bar{\Phi}_1 + M_2 \bar{\Phi}_2, \quad (1.48)$$

где коэффициенты

$$M_{1,2} = \frac{\Gamma_{11} s_{22} - \Gamma_{12} s_{12} - (s_{11} s_{22} - s_{12}^2) z_{1,2} + \frac{\mathbf{b}}{\varrho p} (s_{22} + s_{12})}{\Gamma_{22} s_{12} - \Gamma_{12} s_{22} + \frac{\mathbf{b}}{\varrho p} (s_{22} + s_{12})}. \quad (1.49)$$

При установившихся волновых процессах уравнения (1.43), в которых проводится замена  $p = i\omega$ ,  $\mathbf{b}/(\varrho p) = -i\gamma_b$ ,  $\gamma_b = \mathbf{b}/(\varrho\omega)$ , принимают вид

$$\left( \nabla^2 + \frac{\omega^2 z_{1,2}}{c^2} \right) \bar{\Phi}_{1,2} = 0. \quad (1.50)$$

Уравнения (1.50) описывают продольные волны первого и второго рода. Продольная волна первого рода соответствует синфазному движению скелета грунта и жидкости, распространяется быстро и с малым затуханием. В продольной волне второго рода движение скелета грунта и жидкости противофазно и затухание этой волны значительное. Она связана с перетоком жидкости относительно упругого скелета и распространяется подобно температурной волне [316].

Применяя к двум последним уравнениям системы (1.39) преобразование Лапласа по  $\bar{t}$  и исключая функцию  $\bar{\varphi}_2$ , получаем

$$\bar{\psi}_2 = M_3 \bar{\psi}_1; \quad M_3 = (-\rho_{12} + \mathbf{b}/p)/(\rho_{22} + \mathbf{b}/p); \quad (1.51)$$

$$(\nabla^2 - p^2 \beta_3^2) \bar{\psi}_1 = 0, \quad (1.52)$$

где

$$\beta_3 = c_2/c_2(p); \quad c_2(p) = \sqrt{\frac{\mathcal{N}}{\rho_{11} + \rho_{12}M_3 + (1 - M_3)\mathbf{b}/p}}. \quad (1.53)$$

Для гармонических волн имеем уравнение

$$\left[ \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\Gamma_{11} + \Gamma_{12} M_3 - i\gamma_b (1 - M_3)}{\mathcal{N}} H \right] \bar{\psi}_1 = 0, \quad (1.54)$$

которое описывает распространение в двухфазной среде поперечной волны, скорость которой зависит от частоты.

В задачах динамики насыщенных пористых сред могут быть применены методы, разработанные для исследования задач линейной теории упругости. Решение системы уравнений Био в краевых задачах сводится к решению трех волновых уравнений для двух продольных и одного поперечного потенциалов.

Рассмотрим условия, обеспечивающие единственность решения краевых задач динамической теории пористоупругости на границах раздела различных двухфазных сред, двухфазной среды и жесткого или упругого тела, двухфазной среды и жидкости [347].

Кинетическую и потенциальную энергию в единице объема можно представить как [317]

$$T_0 = \frac{1}{2} \rho_{11} \dot{u}_i^2 + \rho_{12} \dot{u}_i \dot{U}_i + \frac{1}{2} \rho_{22} \dot{U}_i^2, \quad (1.55)$$

$$W_0 = \frac{1}{2} (\sigma_{ij}^s e_{ij} + \sigma^f \varepsilon). \quad (1.56)$$

Записывая выражение для изменения во времени суммы кинетической и потенциальной энергий двухфазной системы в виде

$$\dot{T} + \dot{W} = \frac{d}{dt} \int_V (T_0 + W_0) dV = \int_V [(\rho_{11} \ddot{u}_i + \rho_{12} \ddot{U}_i) \dot{u}_i +$$

$$+(\rho_{12} \ddot{u}_i + \rho_{22} \ddot{U}_i) \dot{U}_i + (\sigma_{ij}^s \dot{u}_{i,j} + \sigma^f \dot{U}_{i,j})] dV \quad (1.57)$$

и преобразуя его с помощью теоремы Остроградского-Гаусса, получаем

$$\begin{aligned} \dot{T} + \dot{W} = & \int_S (\sigma_{ij}^s \dot{u}_i + \sigma^f \delta_{ij} \dot{U}_i) n_j dS - \\ & - \int_V \left[ (\sigma_{ij,j}^s - \rho_{11} \ddot{u}_i - \rho_{12} \ddot{U}_i) \dot{u}_i + (\sigma_i^f - \rho_{12} \ddot{u}_i - \rho_{22} \ddot{U}_i) \dot{U}_i \right] dV. \end{aligned} \quad (1.58)$$

В интеграле по объему в (1.58) множитель при  $\dot{u}_i$  – это сумма поверхностных и инерционных сил, действующих на элементарный объем скелета среды, а множитель при  $\dot{U}_i$  – сумма сил, действующих на элементарный объем жидкости. Каждая из этих сумм равна по величине и обратна по направлению силе, возникающей при относительном движении жидкости и упругого скелета. При учете трения эта сила пропорциональна относительной скорости  $\mathbf{b}(\dot{u}_i - \dot{U}_i)$ . Таким образом, уже из энергетических соображений получаем уравнения движения двухфазной среды

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho_{11} \ddot{u}_i + \rho_{12} \ddot{U}_i + \mathbf{b}(\dot{u}_i - \dot{U}_i), \\ \sigma_{,i}^f &= \rho_{12} \ddot{u}_i + \rho_{22} \ddot{U}_i - \mathbf{b}(\dot{u}_i - \dot{U}_i), \end{aligned}$$

идентичные ранее приведенным уравнениям (1.34). Следовательно, интеграл по объему в (1.58) запишем в виде

$$2D = 2 \int_V D_0 dV = \int_V \mathbf{b}(\dot{u}_i - \dot{U}_i)^2 dV, \quad (1.59)$$

где  $D_0$  – функция диссипации в единице объема. Тогда из (1.58) получаем равенство

$$\dot{T} + \dot{W} + 2D = \int_S (\sigma_{ij}^s \dot{u}_i + \sigma^f \delta_{ij} \dot{U}_i) n_j dS, \quad (1.60)$$

где поверхностный интеграл в правой части – работа всех сил, действующих на двухфазную систему.

Граничные условия для модели Био рассматривались в работах [82, 83, 168, 266, 329, 347, 428] и др.

Рассмотрим два различных пористых тела с объемами  $V_1$  и  $V_2$  соответственно, имеющими общую границу  $S_c$  и свободные границы  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 1.1, а). Для обеспечения единственности решения сумма всех сил, действующих на поверхностях тел, должна равняться нулю, т. е. в соответствии с (1.60) имеем

$$\int_{S_1} \left[ \sigma_{ij}^{s(1)} \dot{u}_i^{(1)} + \sigma^{f(1)} \delta_{ij} \dot{U}_i^{(1)} \right] n_j^{(1)} dS +$$



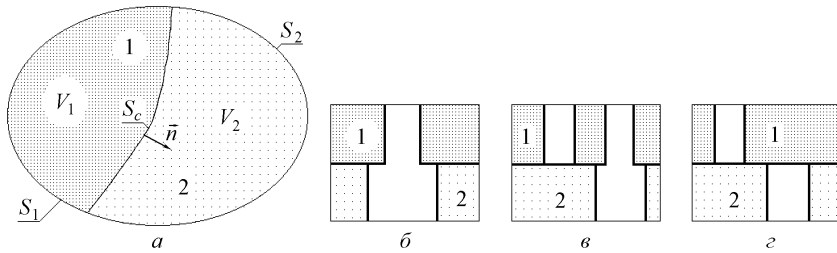


Рис. 1.1. Схема для определения граничных условий (из [347]): а – два пористоупругих насыщенных жидкостью тела  $V_1$  и  $V_2$  с поверхностями  $S_1$  и  $S_2$  и общей границей  $S_c$ ; б – открытая граница; в – частично открытая граница; z – закрытая граница

$$\begin{aligned}
 & + \int_{S_2} \left[ \sigma_{ij}^{s(2)} \dot{u}_i^{(2)} + \sigma^f{}^{(2)} \delta_{ij} \dot{U}_i^{(2)} \right] n_j^{(2)} dS + \\
 & + \int_{S_c} \left\{ \left[ \sigma_{ij}^{s(1)} \dot{u}_i^{(1)} + \sigma^f{}^{(1)} \delta_{ij} \dot{U}_i^{(1)} \right] - \right. \\
 & \left. - \left[ \sigma_{ij}^{s(2)} \dot{u}_i^{(2)} + \sigma^f{}^{(2)} \delta_{ij} \dot{U}_i^{(2)} \right] \right\} n_j^{(1)} dS = 0. \quad (1.61)
 \end{aligned}$$

Здесь учтено, что на общей границе нормали  $n_j^{(2)} = -n_j^{(1)}$ .

Рассмотрим достаточные условия для обеспечения единственности решения уравнений Био, приравняв каждый интеграл в выражении (1.61) нулю.

1. В каждой точке границы на поверхностях  $S_1$  и  $S_2$  следует задать величины  $\sigma_{ij}^s \dot{u}_i n_j$  и  $\sigma^f \dot{U}_i n_i$ . Так, на свободной поверхности двухфазной среды полагаем, что компоненты тензора напряжений в скелете и давление в жидкости равны нулю.

2. В каждой точке на границе раздела двух различных двухфазных сред  $S_c$  должна соблюдаться по (1.61) непрерывность выражения

$$(\sigma_{ij}^s \dot{u}_i + \sigma^f \delta_{ij} \dot{U}_i) n_j. \quad (1.62)$$

Это условие может быть выполнено при удовлетворении непрерывности на границе напряжений и скоростей  $\sigma_{nn}^s$ ,  $\dot{u}_n$ ,  $\sigma_{n\alpha}^s$ ,  $\dot{u}_\alpha$ ,  $\sigma^f$ ,  $\dot{U}_n$ , где  $\sigma_{nn}^s$  и  $\sigma_{n\alpha}^s$  – нормальные и касательные компоненты напряжений в скелете;  $\dot{u}_n$ ,  $\dot{u}_\alpha$  – компоненты скорости точек скелета.

Из физических соображений очевидно, что на границе должна соблюдаться непрерывность относительной скорости фаз:

$$\dot{w}_i = \vartheta (\dot{U}_i - \dot{u}_i). \quad (1.63)$$

Однако непрерывность  $\dot{w}_i$  несовместима с предыдущими условиями, за исключением случая контакта двух сред с одинаковой пористостью ( $\vartheta^{(1)} = \vartheta^{(2)}$ ) или отсутствия относительного перемещения между жидкостью и упругим скелетом на границе, т. е.  $\dot{w}_i = 0$ . Учитывая (1.63) и  $\sigma^f = -\vartheta p_0$ , выражение (1.62) переписываем следующим образом:

$$(\sigma_{ij}^s + \sigma^f \delta_{ij}) \dot{n}_j \dot{u}_j - p_0 \dot{w}_n, \quad (1.64)$$

т. е. условия непрерывности на границе раздела устанавливаем для величин  $\sigma_{nn}^s + \sigma^f$ ,  $\dot{u}_n$ ,  $\sigma_{n\alpha}^s$ ,  $\dot{u}_\alpha$ ,  $p_0$ ,  $\dot{w}_n$ . В рассматриваемом случае поры двух сред свободно связаны между собой и жидкость перетекает из одной среды в другую (открытая граница, рис. 1.1,б).

Течение через границу раздела, показанную на рис. 1.1,б (частично открытая граница), можно описать граничным условием:

$$p_0^{(1)} - p_0^{(2)} = k \dot{w}_n, \quad (1.65)$$

где  $k$  – коэффициент сопротивления;  $\dot{w}_n$  – нормальная компонента относительной скорости (1.63), которую принимают положительной при переходе от области 1 к области 2 (рис. 1.1,а). Для случая открытой границы (рис. 1.1,б) очевидно, что  $k = 0$ .

Соотношения параметров для границы контакта сред, содержащих жидкости с разной вязкостью рассмотрены в работе [329, (6.9)].

На рис. 1.1,в рассмотрен случай, когда перетоки жидкости на границе раздела отсутствуют и нет связи между пустотами в двух средах (закрытая граница). Это возможно при наличии на границе раздела непроницаемой мембраны, тогда  $k = \infty$ ,  $\dot{w}_n = 0$  в (1.65). Значит, корректные граничные условия при контакте двух пористых сред – непрерывность величин  $\sigma_{nn}^s + \sigma^f$ ,  $\dot{u}_n$ ,  $\sigma_{n\alpha}^s$ ,  $\dot{u}_\alpha$ ,  $p_0$ ,  $\dot{w}_n$  с учетом (1.65) для давления в порах, причем коэффициент  $k$  должен быть точно определен. Для  $k = 0$  непосредственно используем непрерывность указанных величин, а для  $k = \infty$  требуем  $\dot{w}_n = 0$  без определения давления  $p_0$ . Следовательно, в общем случае давление жидкости не является непрерывной величиной на границе раздела.

3. В каждой точке на поверхности раздела пористой среды и упругой непроницаемой среды условия непрерывности напряжений и скоростей имеют вид

$$\sigma_{nn}^s + \sigma^f = \sigma_{nn}^{ef}, \quad \sigma^{ef}_{n\alpha} = \sigma, \quad \dot{u}_n = \dot{u}'_n, \quad (1.66)$$

$$\dot{u}_\alpha = \dot{u}'_\alpha, \quad \dot{U}_n - \dot{u}_n = 0.$$

4. В каждой точке на поверхности раздела двухфазной среды и жидкости при свободном течении жидкости по поверхности ( $k = 0$ )

$$\begin{aligned} \sigma_{nn}^s + \sigma^f &= p_0', \quad p_0 = p_0', \\ \sigma_{n\alpha}^s &= 0, \quad (1 - \vartheta) \dot{u}_n + \vartheta \dot{U}_n = \dot{U}_n'. \end{aligned} \quad (1.67)$$

В выражениях (1.66) и (1.67) штрихом обозначены соответственно непроницаемая упругая среда и жидкость.

Первые три условия в (1.67) означают, что скелет грунта и жидкость в порах находятся под одинаковым внешним давлением  $p_0'$  и касательные напряжения на границе отсутствуют, т. е. их можно записать в виде [142]

$$\sigma_{nn}^s = -(1 - \vartheta) p_0', \quad \sigma^f = -\vartheta p_0', \quad \sigma_{n\alpha}^s = 0. \quad (1.68)$$

Четвертое условие выражает непрерывность потока жидкости через границу. Случай  $k \neq 0$  подробно описан в работах [168, 406].

5. Если на части границы двухфазной среды действует какая-либо нагрузка, то возможны следующие типы граничных условий [172]: задано давление в жидкости на границе пористой среды (жидкий поршень)

$$p_0 = p_0', \quad \sigma_{nn}^s = -(1 - \vartheta) p_0';$$

задано общее напряжение и равенство перемещений твердого скелета и жидкости (непроницаемый поршень)

$$u_n = U_n, \quad \sigma^f + \sigma_{nn}^s = -p_0';$$

задана нормальная нагрузка  $p_0'$ , при которой скелет грунта и жидкость находятся под одинаковым давлением (первые два условия в (1.68)), а для касательной нагрузки  $p_\alpha'$  имеем

$$\sigma_{nn}^s = \sigma^f = 0, \quad \sigma_{n\alpha}^s = -p_\alpha'. \quad (1.69)$$

6. Рассмотрим контакт двухфазной среды и абсолютно жесткого тела (штампа). В случае непроницаемого штампа выполняются условия

$$\sigma_{nn}^s + \sigma^f = -p_0' \quad \text{или} \quad \sigma_{n\alpha}^s = -p_\alpha', \quad (1.70)$$

а также условия равенства перемещений твердой и жидкой фаз грунта перемещениям штампа

$$u_n = U_n = u_0' \quad \text{или} \quad u_\alpha = U_\alpha = u_0'. \quad (1.71)$$

В случае проницаемого, пропускающего влагу штампа выполняются условия [167, 368]: для вертикального движения

$$\sigma_{nn}^s = -p', \quad \sigma_{n\alpha}^s = 0, \quad \sigma^f = 0, \quad u_n = u'_0; \quad (1.72)$$

для горизонтального движения

$$\sigma_{nn}^s = 0, \quad \sigma_{n\alpha}^s = -p'_\alpha, \quad \sigma^f = 0, \quad u_\alpha = u'_0. \quad (1.73)$$

Здесь напряжения на границе изменяются только в твердой фазе и перемещения скелета равны на границе перемещениям штампа.

#### 1.4 Методы суперпозиции и собственных функций

Прикладные аспекты граничных задач математической физики стимулировали создание многих аналитических и численных методов их решения. При этом прогресс обеспечивался параллельным развитием аналитических и численных подходов.

Среди большого числа различных методов решения граничных задач математической физики, пожалуй, лишь метод конечных разностей можно трактовать как чисто численный метод. Здесь дифференциальная формулировка проблемы используется лишь на этапе записи основных уравнений. В дальнейшем частные производные заменяются конечными разностями, а исходный континуум – системой с конечным числом степеней свободы. Другие методы в той или иной форме используют определенные аналитические решения для построения общей процедуры метода. При этом общая идея является довольно простой – использование некоторых аналитических решений позволяет получить формулировку проблемы в виде соотношений, имеющих меньшую по сравнению с исходной размерность. В большинстве случаев исходная граничная задача приводится к некоторой системе соотношений, формулируемых на границе области. Типичным примером является метод граничных интегральных уравнений в различных его формах. Как аналитическое решение при построении соотношений метода используется представление для функции Грина в бесконечном пространстве.

Интересная идея положена в основу метода  $T$ -матриц. Здесь в качестве аналитической базы для построения решений граничных задач рассеяния на конечных телах различной формы используется бесконечный набор частных решений волнового уравнения в виде сферических гармоник [440]. Хотя использование метода расширяет круг задач, имеющих аналитическое решение, практическое его применение довольно ограничено.

Идейные основы для метода суперпозиции формировались в математической физике довольно давно. Целесообразно указать на его тесную связь с методами сочленений [174], с методом задачи Римана–Гильберта [292], с методом Неймана–Шварца [126]. Использование наборов частных решений вол-

новых и других типов уравнений в неканонических областях наиболее последовательно проводится в рамках метода частичных областей [88].

Использование частных решений основных уравнений в разделяющихся системах координат позволяет построить эффективным образом общие решения многих граничных задач для областей с неканонической границей. При этом круг задач, допускающих построение аналитических решений задач математической физики, может быть существенно расширен за счет использования частных решений в разных системах координат.

Отметим существующую возможность использования различных способов продолжения граничных условий с целью упрощения основных функциональных уравнений, вытекающих из первоначальных граничных условий.

Одно из важнейших для метода суперпозиции понятий – это понятие общего решения граничной задачи. Данная совокупность частных решений системы дифференциальных уравнений в частных производных называется общим решением граничной задачи для рассматриваемой области, если представление решения позволяет удовлетворить произвольным граничным условиям на границе области.

В рамках такого подхода нетрудно построить общие решения, например для областей, ограниченных отрезками прямых (части координатных поверхностей декартовых систем координат).

Для характеристики метода важно также отметить некоторые его вычислительные аспекты. Прежде всего ясно, что в рассматриваемом и других подобных случаях коэффициенты бесконечных систем не могут быть вычислены явно и требуется численное нахождение интегралов.

В ряде случаев при использовании даже заведомо полных систем решений граничной задачи могут возникать некоторые трудности при преобразовании функциональных уравнений, вытекающих из граничных условий или условий сопряжения, в алгебраические уравнения, или в более общие интегроалгебраические, уравнения. При этом возникает специфическая задача продолжения граничных условий с физически заданной границы на некоторый несуществующий участок.

Классический метод собственных функций, опирающийся в своих построениях на спектральную теорию дифференциальных операторов Штурма–Лиувилля, занимает одно из важных мест в различных разделах граничных задач математической физики. На основе этого метода получены законченные решения широких классов скалярных граничных задач теории потенциала, акустики, электродинамики и механики.

Значительно расширено исследование метода собственных функций в монографиях [272, 273], где построены векторные гармоники для областей, ограниченных различными координатными поверхностями второго порядка, доказана ортогональность и полнота найденных собственных вектор-функций. Как следствие установлены формулы векторных преобразований Фурье–Ханкеля, Мелера–Фока, Вебера и др.

Применительно к задачам теории упругости подход, обобщающий идею построения собственных функций в теории потенциала, известен как метод однородных решений [40, 41, 160, 206]. Основными вопросами, возникающими при использовании метода собственных функций в задачах теории упругости, являются вопросы полноты или базисности системы собственных функций соответствующих несамосопряженных краевых задач и характер сходимости разложений по ним в зависимости от свойств разлагаемых функций.

Проиллюстрируем основные идеи методов суперпозиции и собственных функций на задаче Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе

$$S := \{(x, y) : x > 0, |y| < 1\}.$$

Рассматривается бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u(x, y) = 0, \quad x > 0, \quad |y| < 1 \quad (1.74)$$

с нулевыми (однородными) граничными данными Дирихле на боковых сторонах полуполосы

$$u(x, \pm 1) = 0, \quad \frac{\partial u(x, \pm 1)}{\partial y} = 0, \quad x > 0 \quad (1.75)$$

и условиями на торце

$$u(0, y) = f(y), \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = g(y), \quad |y| < 1, \quad (1.76)$$

где  $f, g$  – заданные, достаточно гладкие функции. Для простоты выкладок далее полагаем, что они являются четными функциями, причем

$$\int_{-1}^1 g(y) dy = 0.$$

Представляя геометрически полуполосу  $S$  как пересечение полосы  $|y| < 1$  и полуплоскости  $x > 0$  запишем искомое решение  $u$  как сумму двух слагаемых

$$u = u_1 + u_2, \quad (1.77)$$

где  $u_1$  представляет собой решение бигармонического уравнения в полосе  $|y| < 1$ , а  $u_2$  – решение этого уравнения в полуплоскости  $x > 0$ . Одним из возможных вариантов выражения для функции  $u_1$  является представление в виде интеграла Фурье по переменной  $x$ :

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [A(s) \cosh sy + B(s) y \sinh sy] \cos(xs) ds. \quad (1.78)$$

Решение  $u_2$  представляем в виде ряда Фурье по переменной  $y$ :

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n x) \exp(-\alpha_n x) \cos(\alpha_n y), \quad (1.79)$$

где последовательность  $\alpha_n = \pi n$ ,  $n \geq 1$ . При этом для удовлетворения четырьмя (с учетом симметричности задачи) граничным условиям из (1.75), (1.76), имеем две неизвестные функции  $A(s)$ ,  $B(s)$ ,  $n \geq 1$  и две неизвестные последовательности  $\{A_n\}_{n \geq 1}$ ,  $\{B_n\}_{n \geq 1}$ .

Простые вычисления, на данном этапе формальные, показывают, что выполнение граничных условий для нормальной производной решения  $u$ , заданного выражениями (1.77) и (1.78), (1.79), приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, \pm 1)}{\partial y} &\equiv \\ &\equiv \pm \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [A(s) s \sinh s + B(s) (\sinh s + s \cosh s)] \cos(xs) ds = 0, \quad x > 0, \\ \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha_n A_n + B_n) \cos(\alpha_n y) = g(y), \quad |y| < 1. \end{aligned}$$

При этом первое из этих уравнений дает связь между неизвестными функциями

$$A(s) s \sinh s + B(s) (\sinh s + s \cosh s) = 0, \quad s > 0,$$

а второе уравнение на основании ортогональности системы  $\{\cos \alpha_n y\}_{n \geq 1}$  на отрезке  $[-1, 1]$  приводит к соотношениям

$$-\alpha_n A_n + B_n = g_n, \quad g_n = \int_0^1 g(y) \cos(\alpha_n y) dy, \quad n \geq 1.$$

Используя подстановки

$$A(s) = -\frac{(\sinh s + s \cosh s)}{s \sinh s} B(s), \quad B_n = \alpha_n A_n + g_n,$$

получаем

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} B(s) \frac{U(s, y)}{s \sinh s} \cos(sx) ds + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} [(1 + \alpha_n x) A_n + g_n x] \exp(-\alpha_n x) \cos(\alpha_n y), \quad (1.80) \end{aligned}$$

где функция

$$U(s, y) = (s \cosh s + \sinh s) \cosh sy - sy \sinh s \sinh sy.$$

Тогда выполнение граничных условий для  $u$  на границах полуполосы приводит к соотношениям

$$u(0, y) \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty B(s) \frac{U(s, y)}{s \sinh s} ds + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n y) = f(y), \quad |y| < 1, \quad (1.81)$$

$$u(x, \pm 1) \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty B(s) \frac{\sinh s \cosh s + s}{s \sinh s} \cos(sx) ds + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [(1 + \alpha_n x) A_n + g_n x] e^{-\alpha_n x} = 0, \quad x > 0, \quad (1.82)$$

где использовано равенство  $U(s, 1) = \sinh s \cosh s + s$ . Приравнявая коэффициенты Фурье при  $\cos(\alpha_n y)$  в уравнении (1.81), получаем

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty B(s) \frac{\sinh s}{s^2} ds = f_0, \quad f_0 = \int_0^1 f(y) dy, \quad (1.83)$$

$$-\frac{2(-1)^n}{\pi} \int_0^\infty B(s) \frac{s^2 \sinh s}{(s^2 + \alpha_n^2)^2} ds + A_n = f_n, \quad (1.84)$$

$$f_n = 2 \int_0^1 f(y) \cos(\alpha_n y) dy, \quad n \geq 1.$$

Применяя при этом к (1.82) косинус преобразование Фурье и используя соотношения

$$\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(sx) ds}{s^2 + \alpha^2} = e^{-\alpha x}, \quad \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\alpha^2 - s^2) \cos(sx) ds}{(s^2 + \alpha^2)^2} = x e^{-\alpha x},$$

справедливые для  $\alpha > 0$ ,  $x > 0$ , при  $s > 0$  получаем уравнение

$$B(s) \frac{\sinh s \cosh s + s}{s \sinh s} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[ \frac{2\alpha_n^3}{(s^2 + \alpha_n^2)^2} A_n + \frac{\alpha_n^2 - s^2}{(s^2 + \alpha_n^2)^2} g_n \right]. \quad (1.85)$$

Замена

$$B(s) = -\frac{X(s)}{s^2 \sinh s}, \quad s > 0, \quad A_n = (-1)^{n+1} \frac{X_n}{2\alpha_n^3} + f_n, \quad n \geq 1,$$

приводит уравнения (1.83), (1.84), (1.85) к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty s^{-4} X(s) ds = f_0, \quad X_n = \frac{4\alpha_n^3}{\pi} \int_0^\infty \frac{X(s) ds}{(s^2 + \alpha_n^2)^2}, \quad n \geq 1,$$



$$X(s) \frac{\sinh s \cosh s + s}{s^3 \sinh^2 s} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{(s^2 + \alpha_n^2)^2} + \quad (1.86)$$

$$+ 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[ \frac{2\alpha_n^3}{(s^2 + \alpha_n^2)^2} f_n + \frac{\alpha_n^2 - s^2}{(s^2 + \alpha_n^2)^2} g_n \right], \quad s > 0.$$

Таким образом, вопрос о построении решения граничной задачи (1.74)–(1.76) по методу суперпозиции, т. е. в виде (1.77)–(1.79), сводится к исследованию свойств разрешимости интегроалгебраической системы уравнений (1.86). Такое исследование и соответствующее обоснование представимости решения рассматриваемой граничной задачи для бигармонического уравнения в виде (1.77)–(1.79), при определенных условиях гладкости на заданные граничные функции  $f, g$  проведено в § 3.1.

Рассмотрим теперь метод собственных функций применительно к краевой задаче (1.74)–(1.76). Будем искать частные решения  $U(x, y)$  бигармонического уравнения, удовлетворяющие однородным условиям (1.75) на боковых сторонах полуполосы. Разыскивая такие решения в виде

$$U(x, y) = z(y) e^{i\lambda x}, \quad z(\pm 1) = V'(\pm 1) = 0. \quad (1.87)$$

где  $\lambda$  – некоторая постоянная, приходим, исходя из (1.74), (1.87), к следующей краевой задаче для нахождения функции  $z(y) = z(y; \lambda)$ :

$$z^{(4)}(y) - 2\lambda^2 z^{(2)}(y) + \lambda^4 z(y) = 0, \quad |y| \leq 1, \quad (1.88)$$

$$z(\pm 1) = 0, \quad z'(\pm 1) = 0.$$

Спектральная краевая задача (1.4) имеет бесконечное множество собственных значений  $\lambda_k$ , являющихся корнями аналитической функции  $\Delta_0(\lambda) = \sinh^2 \lambda - \lambda^2$ , за исключением корня  $\lambda = 0$ . Таким образом, убывающее при  $x \rightarrow \infty$  решение бигармонического уравнения в полуполосе, удовлетворяющее однородным условиям Дирихле на боковых сторонах полуполосы, можно искать в виде

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k(y) e^{i\lambda_k x}, \quad \text{Im } \lambda_k > 0, \quad (1.89)$$

где  $z_k(y) = z(y, \lambda_k)$  – решение краевой задачи (1.4), отвечающее собственному значению  $\lambda = \lambda_k$ .

Формально функция  $u(x, y)$  из выражения (1.89) является бесконечно дифференцируемой при  $x > 0$ ,  $|y| \leq 1$ , экспоненциальным образом убывает при  $x \rightarrow \infty$  и удовлетворяет, на основании (3.113), бигармоническому уравнению в полуполосе  $S$  и однородным условиям Дирихле на боковых сторонах  $x > 0$ ,  $y = \pm 1$ . При этом удовлетворение граничным условиям (3.1) на торце полуполосы  $x = 0$ , в частности, вопрос об определении коэффициентов  $a_k$ , приводит к необходимости исследования вопроса о справедливости двукратного разло-

жения

$$\begin{pmatrix} f(y) \\ g(y) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \begin{pmatrix} z_k(y) \\ i \lambda_k z_k(y) \end{pmatrix}, \quad |y| < 1, \quad \text{Im } \lambda_k > 0. \quad (1.90)$$

Отметим, что вопрос о возможности и характере сходимости разложения (3.114) по части собственных функций пучка дифференциальных операторов  $\mathcal{L}(\lambda)$ , определяемого спектральной задачей (1.4), не является тривиальным и представляет самостоятельный интерес в рамках спектральной теории несамосопряженных операторов.

## 1.5 Метод ортогональных многочленов

Обзоры методов исследования контактных задач представлены, например, в работах [180, 211, 212, 230, 238, 390]. В общем виде такие задачи сводятся к определению напряжений по заданным перемещениям или нагрузкам в области контакта решением соответствующих интегральных уравнений.

В настоящей работе исследование контактных задач для штампов на упругом основании проводится с использованием соответствующих интегральных преобразований (Лапласа, Фурье, Ханкеля и др.) с последующим использованием метода ортогональных многочленов (полиномов), достаточно широко применяемого для построения и исследования решений интегральных уравнений [3, 4, 42, 115, 130, 131, 171, 199–202, 230, 399, 412]. Этот метод основан на общих идеях метода Бубнова–Галеркина, когда искомые решения, определяемые из системы интегральных уравнений, аппроксимируются наборами функций определенного вида [270].

В развитие общей схемы использование метода ортогональных многочленов базируется на трех взаимосвязанных положениях:

- 1) необходимо определить структуру поведения решения интегрального уравнения в окрестности границы области контакта;
- 2) выделить главную часть ядра интегрального уравнения, содержащую особенности исходного ядра;
- 3) определить систему ортогональных многочленов, элементы которой либо являются собственными функциями интегрального оператора, отвечающего выделенной главной части ядра, либо переводятся выделенным интегральным оператором в другую систему ортогональных многочленов (построение спектральных соотношений).

Эти положения позволяют при численном анализе использовать ортогональные многочлены более эффективно, чем другие методы (коллокаций, наименьших квадратов и др.).

Свойство классических ортогональных многочленов (Чебышева, Лежандра, Эрмита, Якоби) быть собственными функциями различных интегральных операторов достаточно подробно обсуждалось в научной литературе [42, 130, 201]. Так, для полиномов Чебышева первого рода  $T_k(x)$ ,  $|x| \leq 1$ , имеют

место спектральные соотношения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x - \xi|} \frac{T_k(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi = \mu_k T_k(x), \quad |x| \leq 1, \quad (1.91)$$

$$\mu_0 = \ln 2, \quad \mu_k = \frac{1}{k}, \quad k \geq 1.$$

Таким образом, многочлены  $T_k(x)$  представляют собой собственные функции (с собственными значениями  $\mu_k$ ) интегрального оператора с логарифмическим ядром. Этот факт вместе со свойствами полноты и ортогональности многочленов Чебышева дает возможность построить в явном виде решение интегрального уравнения с логарифмическим ядром [201]. Действительно, рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln(s|x - \xi|) \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad |x| \leq 1, \quad (1.92)$$

где  $s \neq 2$  – некоторое положительное число, и представим искомую функцию в виде ряда

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \frac{T_k(x)}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (1.93)$$

Подставим разложение (1.93) в интегральное уравнение (1.92). Тогда, используя значение интеграла

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \delta_{0n} \pi$$

(этот интеграл является следствием соотношений ортогональности для многочленов  $T_n(x)$ ) и спектральные соотношения (1.91), получаем функциональное равенство

$$\ln(s/2) \varphi_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \varphi_k T_k(x) = f(x), \quad |x| \leq 1. \quad (1.94)$$

Далее, умножая левую и правую части равенства (1.94) последовательно на  $T_n(x)/\sqrt{1 - x^2}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , и интегрируя по  $x \in [-1, 1]$ , на основании свойств ортогональности многочленов  $T_n(x)$  получаем следующие выражения для коэффициентов ряда (1.93):

$$\varphi_0 = f_0 / [\pi \ln(s/2)], \quad \varphi_k = -2k f_k / \pi \quad (k \neq 0),$$

$$f_k = \int_{-1}^1 f(x) \frac{T_k(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.95)$$

Искомое решение интегрального уравнения первого рода (1.92) определяется формулой

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left[ \frac{1}{\ln(s/2)} \int_{-1}^1 \frac{f(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k T_k(x) \int_{-1}^1 \frac{f(\xi) T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \right], \quad |x| < 1. \quad (1.96)$$

Полученное выражение явным образом отражает характер поведения решения интегрального уравнения с логарифмическим ядром вблизи граничных точек, заключающийся согласно [201] в наличии корневой особенности при  $x \rightarrow \pm 1$ . Для обоснования формулы (1.96) достаточно потребовать непрерывной дифференцируемости правой части уравнения (1.92).

В случае непрерывной дифференцируемости функции  $f(x)$  формула (1.96) может быть преобразована к интегральному виду. Чтобы это показать, воспользуемся приемом из работы [103, § 2.4]. Положим

$$Z(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k \int_{-1}^1 \frac{f(\xi) T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi T_k(x).$$

Интегрируя по частям, находим

$$\int_{-1}^1 \frac{f(\xi) T_k(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \frac{1}{k} \int_{-1}^1 f'(\xi) \sin(k \arccos \xi) d\xi,$$

и тогда

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x Z(\xi) d\xi &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k \arccos x)}{k} \int_{-1}^1 f'(\xi) \sin(k \arccos \xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 f'(\xi) \ln \frac{1-x\xi + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\xi^2}}{1-x\xi - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-\xi^2}} d\xi. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Из (1.97) дифференцированием получаем для  $Z(x)$  выражение в форме интеграла Коши

$$Z(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f'(\xi) \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-x} d\xi,$$

что позволяет записать решение (1.96) в интегральном виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left[ \frac{1}{\ln(s/2)} \int_{-1}^1 \frac{f(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi + \int_{-1}^1 f'(\xi) \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-x} d\xi \right]. \quad (1.98)$$

Аналогичным образом можно использовать соотношения (1.91) и при построении решений интегральных уравнений второго рода с логарифмическим ядром (см. [201]).

Рассмотрим более общее интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad |x| \leq 1, \quad (1.99)$$

об ядре которого известно, что оно имеет логарифмическую особенность:

$$K(x, \xi) \approx c \ln|x - \xi|, \quad \text{при } |x - \xi| \rightarrow 0, \quad (1.100)$$

где  $c$  – некоторая постоянная. Перепишем уравнение (1.99) в виде

$$\frac{c}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|x - \xi| \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \widehat{K}(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad |x| \leq 1, \quad (1.101)$$

где  $\widehat{K}(x, \xi) = K(x, \xi) - c \ln|x - \xi|$  – регулярное ядро. Тогда, разыскивая решение уравнения (1.101) в форме разложения (1.93) и действуя, как и при определении решения уравнения (1.92), получим для нахождения коэффициентов  $\varphi_k$  бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \pi c \ln 2 \varphi_0 - \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{C}_{k,0} \varphi_k = f_0, \\ \frac{\pi c}{2n} \varphi_n - \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{C}_{k,n} \varphi_k = f_n, \quad n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (1.102)$$

с правыми частями  $f_n$ , вычисляемыми по заданной функции  $f(x)$  формулами (1.95), и коэффициентами

$$\widehat{C}_{k,n} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \widehat{K}(x, \xi) \frac{T_k(x) T_n(\xi)}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\xi^2}} d\xi dx, \quad k, n = 0, 1, \dots$$

Таким образом, при решении уравнения (1.99) с ядром, имеющим логарифмическую особенность (1.100) на диагонали  $x = \xi$ , использование многочленов Чебышева первого рода позволяет свести интегральное уравнение первого рода к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений второго рода (1.102). Явное решение бесконечных систем (1.102) удается получить лишь в исключительных случаях, поэтому их решают приближенно, используя метод редукции. Обоснование применимости метода редукции к основным бесконечным системам, полученным при использовании метода ортогональных многочленов, приведено в работе [201].

Следует отметить, что при сведении уравнения (1.99) к системе (1.102) существенным образом использовалось выделение из ядра его сингулярной части. При этом такое выделение главной части ядра является необходимым моментом для анализа характера искомого решения. Кроме того, использование ортогональных полиномов при алгебраизации уравнения (1.101) иногда может привести к усложнению вычислительного процесса, т. е. вычисление коэффициентов  $\widehat{C}_{k,n}$  может оказаться сложнее, чем нахождение аналогичных интегралов от первоначального ядра  $K(x, \xi)$ . В этом случае более целесообразно применять изложенную схему использования ортогональных многочленов непосредственно к исходному интегральному уравнению (1.99), что приводит к бесконечной системе первого рода

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{k,n} \varphi_k = f_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

с коэффициентами

$$C_{k,n} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K(x, \xi) \frac{T_k(x) T_n(\xi)}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\xi^2}} d\xi dx, \quad k, n = 0, 1, \dots$$

После определения характера поведения искомого решения интегрального уравнения и выбора соответствующей системы ортогональных многочленов для его решения выбор схемы вычислительного алгоритма (прямое интегрирование по ортогональным многочленам или с учетом выделения главной части ядра) определяется конкретным видом коэффициентов рассматриваемого интегрального уравнения. Это замечание относится и к другим, отличным от

(1.99), интегральным уравнениям, а соответствующие примеры можно найти в монографии [201, гл. 6].

Приведем пример использования многочленов Чебышева второго рода [103]. Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x} d\xi = f(x), \quad |x| < 1. \quad (1.103)$$

В соответствии с общей теорией сингулярных интегральных уравнений [181] уравнение (1.103) имеет несколько решений, отличающихся друг от друга поведением в окрестности точек  $x = \pm 1$ . Выбор требуемого класса решений, а значит, и соответствующих ортогональных многочленов для построения решения зависит от физической постановки задачи. Пусть требуется найти решение уравнения (1.103), не имеющее особенностей при  $x = \pm 1$ . Это требование приводит к необходимости выполнения дополнительного условия на правую часть  $f(x)$ , называемого условием ортогональности. Тогда искомое решение  $\varphi(x)$  должно обращаться в нуль в конечных точках и его можно разыскивать в виде разложения

$$\varphi(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k U_k(x), \quad (1.104)$$

где  $U_k(x)$  – многочлены Чебышева второго рода. При этом для многочленов  $U_n(x)$  справедливы следующие обобщенные спектральные соотношения:

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi-x} U_k(\xi) d\xi = -\pi T_{k+1}(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.105)$$

являющиеся аналогом (1.91) и показывающие, каким образом интегральный оператор Коши переводит одну систему ортогональных многочленов в другую. Подставляя (1.105) в уравнение (1.104), находим

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k T_{k+1}(x) = f(x), \quad |x| \leq 1.$$

Используя здесь свойство ортогональности многочленов Чебышева  $T_n(x)$ , получаем выражения для искомых коэффициентов

$$\varphi_k = -2f_{k+1}/\pi, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где  $f_k$  даются выражениями (1.95) и требуется выполнение условия ортогональности  $f_0 = 0$ .

Таким образом, при определении решений сингулярного интегрального уравнения (1.103) в классе функций, не имеющих особенностей при  $x \rightarrow \pm 1$ ,

существенную роль играют обобщенные спектральные соотношения (1.105). В случае общего сингулярного интегрального уравнения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \widehat{K}(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad |x| < 1,$$

для коэффициентов  $\varphi_k$  получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений. При этом условия ортогональности для многочленов  $U_n(x)$  играют важную роль при вычислении различных физических характеристик после определения решения уравнения в виде разложения (1.104).

На этой основе рассматриваются задачи о колебаниях штампов на упругом основании в гл. 6 и 7. В главе 7 используется численно-аналитический подход к системе интегральных уравнений, возникающей в задаче о колебаниях жесткого непроницаемого штампа на ПУНЖС [266]. При этом используется метод ортогональных многочленов и обобщаются соответствующие рассуждения из [103] (плоская задача о колебаниях штампа на упругом основании).

## 1.6 Интегральные преобразования

Аппарат интегральных преобразований является полезным при рассмотрении многих граничных задач для уравнений в частных производных. Использование интегральных преобразований позволяет понизить размерность рассматриваемых уравнений вплоть до их алгебраизации и нахождения точных решений. В основе всех применений интегральных преобразований лежат формулы обращения и формулы коммутации, позволяющие переводить дифференциальные выражения в алгебраические. В этом параграфе приведены основные сведения об интегральных преобразованиях, которые систематически используются в данной монографии (см. [276]).

### 1.6.1 Преобразование Фурье

При рассмотрении задач для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в декартовых координатах для устранения производных по пространственным переменным, изменяющимся в бесконечных пределах, используется преобразование Фурье.

Преобразованием Фурье измеримой по Лебегу функции  $f(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ , называется функция

$$(Ff)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(i\xi x) dx, \quad -\infty < \xi < \infty. \quad (1.106)$$



При выполнении условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

преобразование  $(Ff)(\xi)$  является непрерывной функцией, которая стремится к нулю при  $\xi \rightarrow \infty$ . Формула обращения (при определенных условиях на функцию  $f$ ) для преобразования Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (Ff)(\xi) \exp(-ix\xi) d\xi. \quad (1.107)$$

Одно из важнейших свойств преобразования Фурье заключено в формуле коммутации

$$(Ff')(\xi) = -i\xi(Ff)(\xi). \quad (1.108)$$

Формула (1.108) легко доказывается интегрированием по частям, если предположить, что  $f$  является финитной непрерывно дифференцируемой функцией.

Приведем некоторые основные формулы, относящиеся к применению преобразования Фурье. Преобразование Фурье переводит свертку двух функций

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy$$

в произведение

$$(F(f * g))(\xi) = (Ff)(\xi) \cdot (Fg)(\xi). \quad (1.109)$$

Для преобразования Фурье справедливо равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} (Ff)(\xi) \overline{(Fg)(\xi)} d\xi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (1.110)$$

Отметим еще формулы линейности и сдвига

$$(Ff_a)(\xi) = \exp(ia\xi)(Ff)(\xi), \quad f_a(x) = f(x-a),$$

$$(F(af + bg))(\xi) = a(Ff)(\xi) + b(Fg)(\xi). \quad (1.111)$$

Аналогично (1.106) определяется преобразование Фурье для функций от многих переменных. В частности, преобразование Фурье для функций двух переменных  $x_1, x_2$ , имеет вид

$$(Ff)(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) \exp[i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)] dx_1 dx_2, \quad (1.112)$$

где  $-\infty < \xi_1, \xi_2 < \infty$ . Для такого преобразования справедливы приведенные выше формулы с очевидными изменениями. В частности, формула обращения

имеет вид

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} (Ff)(\xi_1, \xi_2) \exp[-i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)] d\xi_1 d\xi_2. \quad (1.113)$$

Следует отметить, что в научной литературе используются различные (хотя по-сути эквивалентные) определения преобразования Фурье. Так, в (1.106) вместо ядра преобразования  $\exp(i\xi x)$  берется функция  $\exp(-i\xi x)$ , либо  $\exp(\pm i\xi x)/\sqrt{2\pi}$ .

### 1.6.2 Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа обычно применяется по переменной, имеющей смысл времени для нестационарных задач и определенной на полубесконечном интервале  $t > 0$  (одностороннее преобразование). Преобразованием Лапласа функции  $f(t)$ ,  $t > 0$  называется функция комплексного переменного (параметра)  $s = \xi + i\zeta$ , которая определяется формулой

$$(Lf)(s) = \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) f(t) dt. \quad (1.114)$$

Знаком  $\doteq$  будем обозначать соответствие между функцией и ее преобразованием Лапласа.

Формальное обращение преобразования Лапласа имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (Lf)(s) \exp(st) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f}(s) \exp(st) ds \quad (1.115)$$

для некоторого действительного значения  $\sigma$ . При этом  $(Lf)(s)$  (или  $\bar{f}(s)$ ) – функции, которые называются трансформантами преобразования Лапласа или  $L$ -изображениями функции  $f$ .

В общем случае интегрирование в (1.115) проходит справа от особенностей подынтегральной функции  $(Lf)(s)$  и понимается в смысле главного значения, т. е. как предел интеграла по интервалу  $(\sigma - ib, \sigma + ib)$  при  $b \rightarrow +\infty$ .

Кроме очевидного свойства линейности отметим следующие основные свойства преобразования Лапласа.

1. Дифференцирование оригинала и изображения. Если функция  $f(t)$   $r$  раз непрерывно дифференцируема при  $t \geq 0$  то

$$f^{(r)}(t) \doteq s^r \bar{f}(s) - s^{(r-1)} f(0) - \dots - f^{(r-1)}(0). \quad (1.116)$$

В частности, если  $f(0) = 0$ , то

$$f'(t) \doteq s \bar{f}(s). \quad (1.117)$$

2. Справедливо свойство запаздывания: для любого положительного  $\tau$  при условии, что  $f(t - \tau) = 0$  при  $t < \tau$ , имеет место

$$H(t - \tau) f(t - \tau) \doteq \exp(-s\tau) \bar{f}(s), \quad (1.118)$$

где  $H(t)$  – функция Хевисайда. Аналогично для любого комплексного  $s_0$

$$\exp(s_0 t) f(t) \doteq \bar{f}(s - s_0). \quad (1.119)$$

3. Предельные соотношения. Если существует преобразование Лапласа от  $f'(t)$ , то

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \bar{f}(s) = f(0). \quad (1.120)$$

Если существует предел  $f(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \bar{f}(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t). \quad (1.121)$$

4. Справедливо следующее утверждение о свертке оригиналов. Если  $f(t)$  и  $g(t)$  – оригиналы, а  $\bar{f}(s)$  и  $\bar{g}(s)$  – изображения, то произведение  $\bar{f}(s) \bar{g}(s)$  также является изображением:

$$\bar{f}(s) \bar{g}(s) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (1.122)$$

Таким образом, умножение изображений равносильно свертыванию оригиналов.

Как следует из (1.114), задачу отыскания оригинала  $f(t)$  по изображению  $\bar{f}(s)$  можно свести к решению интегрального уравнения первого рода. Отметим, что обращение преобразования Лапласа относится к некорректным задачам, т. е. к таким задачам, когда малому изменению параметра  $s$  может соответствовать сколь угодно большое изменение решения  $f(t)$ . Кроме того, некорректные задачи разрешимы не при всех значениях числовых и функциональных параметров, определяющих решение. Поэтому к решению уравнения (1.114) можно применить метод регуляризации Тихонова [258], позволяющий получать приближенные значения оригинала, сопоставимые по точности с погрешностью определения изображения. Указанный метод использован в работах [13, 209] для решения нестационарных контактных задач. Обращение преобразования Лапласа методом регуляризации строится по значениям изображения на вещественной оси ( $\text{Im } s = 0$ ). Метод оказывается удобным для решения интегральных уравнений нестационарных контактных задач, так как можно применять известные методы решения статических задач вследствие

того, что при  $\overline{Re} s > 0$  свойства ядер этих уравнений такие же, как и в статических задачах.

Для построения обращения преобразования Лапласа можно использовать метод сведения к интегралу Фурье [230, 422]. Это возможно, если отыскиваются решения таких физических задач, когда имеет место рассеяние энергии, а возмущающие динамические воздействия ограничены на бесконечности и в выражениях (1.115) нет слагаемых, растущих по экспоненциальному закону, т. е.  $s = -\xi + i\zeta$  ( $\xi > 0$ ). В случае отсутствия корней в правой полуплоскости  $\overline{Re} s > 0$  интеграл по прямой, параллельной мнимой оси можно заменить интегралом по мнимой оси. Тогда обращение преобразования Лапласа сводится к интегралу Фурье

$$f(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im} \bar{f}(\zeta) \sin(t\zeta) d\zeta, \quad (1.123)$$

который можно вычислить по методу Филона [146, 147, 241, 245]:

$$f(t) \approx \frac{2}{\pi} \alpha \text{Re} f(\zeta_0) + \gamma \sum_{n=0}^{N-1} \text{Re} f(\zeta_{2n+1}) \cos[(2n+1)\theta] + \\ + 2\alpha \sum_{n=1}^N \text{Re} f(\zeta_{2n}) \cos(2n\theta), \quad (1.124)$$

где  $\zeta_n = nh$ ;  $\theta = th$ ;  $h$  – шаг интегрирования;

$$\frac{\alpha}{h} = \frac{3}{2} \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{2} \frac{\cos 2\theta}{\theta^2} - \frac{\sin 2\theta}{\theta^3} \quad (\theta \geq 0,1); \quad \frac{\alpha}{h} = \frac{1}{3} + \frac{\theta^2}{15} \quad (\theta < 0,1); \\ \frac{\gamma}{h} = \frac{4}{\theta^3} (\sin \theta - \theta \cos \theta) \quad (\theta \geq 0,1); \quad \frac{\gamma}{h} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{\theta^2}{10}\right) \quad (\theta < 0,1). \quad (1.125)$$

Если динамическое воздействие изменяется во времени как функция Хевисайда  $H(t)$ , то для численного обращения используется интеграл Фурье в виде выражения

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re} \bar{f}(\zeta) \frac{\sin t\zeta}{\zeta} d\zeta, \quad (1.126)$$

в котором уже учитывается преобразование Лапласа функции Хевисайда. Формула Филона в этом случае имеет вид

$$f(t) \approx \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{4} \text{Re} \bar{f}(0) [(2 - \beta' - \gamma')\pi + 2\beta'\theta] + \beta' \sum_{k=1}^N \frac{\text{Re} \bar{f}(i\zeta_{2k})}{2k} \sin(2k\theta) + \right. \\ \left. + \gamma' \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\text{Re} \bar{f}(\zeta_{2k+1})}{2k+1} \sin[(2k+1)\theta] \right\}, \quad (1.127)$$

где

$$\beta' = 2 \left( \frac{1 + \cos^2 \theta}{\theta^2} - \frac{\sin 2\theta}{\theta^3} \right); \quad \gamma' = 4 \left( \frac{\sin \theta}{\theta^3} - \frac{\cos \theta}{\theta^2} \right).$$

Преимущество метода, основанного на использовании формул (1.123) и (1.127), перед другими способами численного обращения заключается в том, что его точность обуславливается точностью вычисления интегралов от осциллирующих функций. Малые погрешности определения функций  $\bar{f}(i\zeta)$  при дискретных значениях переменных в (1.123) не вызывают больших изменений значений функции  $f(t)$ . Использование приведенных формул приводит к удовлетворительным результатам даже в тех случаях, когда сама искомая функция  $f(t)$  осциллирующая.

### 1.6.3 Преобразование Меллина

Это интегральное преобразование задается выражением

$$M[f](z) = \int_0^{\infty} f(x) x^{z-1} dx, \quad (1.128)$$

а формула обращения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M[f](z) x^{-z} dz, \quad x > 0. \quad (1.129)$$

Одним из простейших достаточных условий справедливости формул (1.128), (1.129) служит условие непрерывности функции  $f(x)$ ,  $x > 0$  вместе с условием сходимости интеграла

$$\int_0^{\infty} |f(x)| x^{\sigma-1} dx < \infty.$$

Формулы Меллина можно получить из формул Фурье. Действительно, если положить переменные  $x = e^{\xi}$ ,  $\xi \in (-\infty, \infty)$  и  $z = \sigma + it$ , то формула (1.128) примет вид

$$M[f](\sigma + it) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{\xi}) e^{\xi(\sigma+it)} d\xi,$$

а формула обращения (1.129) приводится к выражению

$$f(e^{\xi}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} M[f](\sigma + it) e^{-\xi(\sigma+it)} dt.$$

Таким образом, функция  $M[f](\sigma + it)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$ , является преобразованием Фурье функции  $e^{\sigma\xi} f(e^{\xi})$ .

Преобразование Меллина традиционно используется при работе с аналитическими функциями, при этом широко используется возможность деформиро-

вания контура интегрирования на основании теоремы Коши о независимости интеграла от аналитической функции от пути интегрирования.

В рассмотренных первого и второго параграфов второй главы систематически используется следующее важное утверждение из теории преобразования Меллина [257, § 1.29]

**Теорема.** Пусть  $f(z)$  – аналитическая в угле  $\arg z \in (-\alpha, \beta)$  функция, где  $\alpha \in (0, \pi]$ ,  $\beta \in (0, \pi]$ , причем для некоторых  $a < b$  в любом угле  $\arg z \in (-\alpha + \delta, \beta - \delta)$  выполняются оценки

$$|f(z)| \leq \frac{c}{|z|^{a+\epsilon}}, \quad |z| \leq r, \quad |f(z)| \leq \frac{c}{|z|^{b-\epsilon}}, \quad |z| \geq r. \quad (1.130)$$

Тогда преобразование Меллина  $M[f](z)$  является аналитической функцией в полосе  $\operatorname{Re} z \in (a, b)$  и во всякой полосе, внутренней к  $\operatorname{Re} z \in (a, b)$ , для каждого  $\epsilon > 0$  выполняются равномерные оценки

$$|M[f](z)| \leq c_\epsilon e^{-(\beta-\epsilon)\operatorname{Im} z}, \quad \operatorname{Im} z \geq 0, \quad (1.131)$$

$$|M[f](z)| \leq c_\epsilon e^{-(\alpha-\epsilon)|\operatorname{Im} z|}, \quad \operatorname{Im} z \leq 0.$$

Обратно, если  $M(z)$  есть заданная аналитическая в полосе  $\operatorname{Re} z \in (a, b)$  функция, удовлетворяющая условиям (1.131), то функция  $f$ , определенная формулой (1.128), является аналитической в угле  $\arg z \in (-\alpha, \beta)$  и удовлетворяет оценкам (1.130).

### 1.6.4 Преобразование Ханкеля

При записи уравнений в цилиндрической системе координат удобно применять преобразование Ханкеля по радиальной координате  $r$  и конечное преобразование Фурье по угловой координате  $\theta$ .

Преобразование Ханкеля по  $0 \leq r < \infty$  с параметром  $\xi$  вводится по формуле

$$(H_n f)(\xi) = \int_0^\infty r f(r) J_n(r\xi) dr, \quad (1.132)$$

а формула обращения имеет вид

$$f(r) = \int_0^\infty \xi (H_n f)(\xi) J_n(r\xi) d\xi. \quad (1.133)$$

Здесь  $J_n(\cdot)$  – функция Бесселя порядка  $n$ , где вещественное число  $n > -1/2$ .

Для применимости формулы обращения Ханкеля достаточно, чтобы функция  $f(r)$  была кусочно-непрерывной, изменялась ограниченно на всяком конечном отрезке полуоси  $r > 0$  и интеграл  $\int_0^\infty f(r) \sqrt{r} dr$  абсолютно сходился.

Формула коммутации для преобразования Ханкеля имеет вид

$$(H_n(L_n f))(\xi) = -\xi^2 (H_n f)(\xi), \quad (1.134)$$

$$(L_n f)(r) = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) - \frac{n^2}{r^2} f(r),$$

Формула (1.134) справедлива для функций  $f \in C^2(0, \infty)$ , для которых

$$\int_0^\infty |(L_n f)(r)| \sqrt{r} dr < \infty,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^n f(r) = \lim_{r \rightarrow 0} r^{n+1} f'(r) = 0, \quad (1.135)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} f(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} f'(r) = 0.$$

В частном случае для  $n = 0$

$$(H_0(f''(r) + r^{-1} f'(r)))(\xi) = -\xi^2 (H_0 f)(\xi). \quad (1.136)$$

Отметим, что формула Парсеваля для изображений Ханкеля имеет вид

$$\int_0^\infty \xi \bar{f}(\xi) \bar{g}(\xi) d\xi = \int_0^\infty r f(r) g(r) dr. \quad (1.137)$$

Для определения волновых полей на полубесконечном интервале ( $r_0 \leq r < \infty$ ) (см. § 6.2) используется преобразование Ханкеля по  $r$  из монографии В. В. Дыхты [108]. Параметр преобразования  $\xi$ , трансформанта здесь обозначается символом  $\sim$ .

Формула преобразования имеет вид

$$\tilde{\Phi}(\xi) = \int_{r_0}^\infty \phi(r) C_v(r, \xi) r dr, \quad (1.138)$$

а формула обратного преобразования

$$\phi(r) = \int_0^\infty \tilde{\Phi}(\xi) C_v(r, \xi) \xi d\xi, \quad (1.139)$$

где ядро [108, (5.77)]

$$C_v(r, \xi) = \frac{J_v(\xi r) N'_v(\xi r_0) - N_v(\xi r) J'_v(\xi r_0)}{\sqrt{[J'_v(\xi r_0)]^2 + [N'_v(\xi r_0)]^2}} \quad (1.140)$$

содержит  $J_v(\xi r)$  и  $N_v(\xi r_0)$  – цилиндрические функции Бесселя и Неймана порядка  $v$  и их производные по радиусу. Это ядро обладает свойствами

$$\frac{d^2 C_v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dC_v}{dr} + \left( \xi^2 - \frac{v^2}{r^2} \right) C_v = 0, \quad (1.141)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ r \left( C_v \frac{d\bar{\Phi}^*}{dr} - \bar{\Phi}^* \frac{dC_v}{dr} \right) \right] = 0. \quad (1.142)$$



## ГЛАВА 2

### ИНТЕГРОАЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА СУПЕРПОЗИЦИИ

В данной главе рассмотрены вопросы, связанные с исследованием некоторых классов линейных интегральных уравнений и бесконечных систем алгебраических уравнений, имеющих непосредственное отношение к анализу применимости метода суперпозиции при построении решений граничных задач теории упругости и теории потенциала.

В § 2.1 и § 2.2 введены в рассмотрение и исследованы классы интегральных уравнений на полуоси и бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, которые охватывают основные уравнения метода суперпозиции для статических граничных задач теории упругости в таких областях как полуплоскость, цилиндр, прямоугольник. Основная идея исследования этих уравнений состоит в использовании преобразования Меллина и теории возмущений линейных операторов. Такой подход, по существу, был использован в работах [22, 52, 65, 139] при рассмотрении некоторых конкретных задач теории упругости на основании метода суперпозиции.

В § 2.3 рассмотрен абстрактный вариант известного в теории линейных алгебраических систем бесконечного порядка закон асимптотических выражений Б. М. Кояловича [143]. Показано, что этот закон допускает абстрактную формулировку в рамках теории функциональных уравнений в полупорядоченных  $K_\sigma$ -пространствах.

В § 2.4 приведены результаты исследований бесконечной алгебраической системы уравнений, возникающей при рассмотрении граничной задачи теории потенциала во внешности двух сфер одинакового радиуса.

В § 2.5 рассмотрен вопрос о поведении при  $\alpha \rightarrow \infty$  функций, определяемых рядами с общими членами  $a_k = k^{-\nu}(k+\alpha)^{-1}$  и  $a_k = k^{-\nu}(k-\alpha)^{-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где параметр  $\alpha \neq k$  и число  $\nu > 0$ . Найдены асимптотические разложения таких функций в ряды по степеням  $\alpha^{-1}$  при  $\alpha \rightarrow \infty$  (в случае целого значения  $\nu$  присутствует также логарифмический множитель в одном из слагаемых). Показано, что коэффициенты полученных асимптотических разложений определяются значениями дзета-функции Римана  $\zeta(z)$  в последовательности точек  $\nu - m$ , где  $m = 0, 1, \dots$  и  $m \neq \nu$ . При получении асимптотических разложений используется техника интегрального преобразования Меллина, теорема Коши

о вычетах и рекуррентные формулы, связывающие рассматриваемые ряды при значениях параметра  $\nu$  и  $\nu + 1$ .

Основные результаты §§ 2.2–2.5 данной главы опубликованы в работах [53, 56–58, 68, 69, 357, 361].

## 2.1 Интегральные уравнения метода суперпозиции

**2.1.1** Использование метода суперпозиции в граничных задачах статической теории упругости в полуполосе [92, гл. 8], приводит к рассмотрению интегроалгебраической системы уравнений, которая обычно сводится к некоторому интегральному уравнению на полуоси. Анализ широкого класса этих уравнений показывает, что они могут быть записаны в виде

$$X(s) - \int_0^\infty Q(s, t)X(t) dt = F(s), \quad s > 0, \quad (2.1)$$

где вещественное ядро представимо выражением  $Q = Q_0 + Q_1$ , причем “главная” часть  $Q_0$  ядра имеет форму

$$Q_0(s, t) = t^{-1} \sum_{n=1}^\infty t_n^{-1} \phi_1(t_n^{-1}s) \phi_2(t_n t^{-1}), \quad s, t > 0, \quad (2.2)$$

с последовательностью

$$t_n = t_1 + n - 1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \text{для некоторого } t_1 \in (0, 1],$$

а  $Q_1$  – непрерывная функция переменных  $s \geq 0, t \geq 0$ . При этом вещественные функции  $\phi_j(s), s > 0$ , допускают аналитическое продолжение в некоторый сектор комплексной плоскости

$$S := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| < 2d \operatorname{Re} \lambda\}, \quad d > 0,$$

и выполняются оценки

$$|\phi_j(\lambda)| \leq c|\lambda|^{\nu_1} (|\lambda| + 1)^{-(\nu_1 + \nu_2)}, \quad \lambda \in S, \quad j = 1, 2, \quad (2.3)$$

$$|Q_1(s, t)| \leq cs^{\nu_0} (s + 1)^{-(\nu_0 + \nu_3)} (t + 1)^{-(1 + \nu_4)}, \quad s, t \geq 0, \quad (2.4)$$

где считается, что постоянные  $\nu_j > 0, j = 1, 2, 3, 4$  и  $\nu_0 \geq 0$ .

Следуя [126, с. 37], назовем уравнение (2.1) регулярным, если выполняется условие

$$1 - \int_0^\infty |Q(s, t)| dt = q(s) > 0, \quad s > 0. \quad (2.5)$$

Пусть  $B = L_\infty(\mathbb{R}_+)$  – банахово пространство комплекснозначных измеримых и существенно ограниченных относительно меры Лебега на полуоси  $\mathbb{R}_+ = (0, +$

$+\infty$ ) функций (см. [119, гл. 1, § 3, § 9]). При выполнении условия регулярности (2.5) для любой функции  $F \in B$ , допускающей для почти всех  $s > 0$  оценку

$$|F(s)| \leq cq(s), \quad (2.6)$$

существует решение  $X \in B$  интегрального уравнения (2.1). Это утверждение вытекает из общих результатов Л. В. Канторовича о разрешимости функциональных уравнений в  $K$ -пространствах (см. [47, гл. 12]). При этом решение  $X(s)$  представимо в виде ряда Неймана

$$X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} Q_n(s, t) F(t) dt + F(s), \quad s \geq 0, \quad (2.7)$$

( $Q_n(s, t)$  –  $n$ -я итерация ядра  $Q(s, t)$ ), сходящимся в пространстве  $L_{\infty}(0, d)$  для любого конечного  $d > 0$ . Эти утверждения получают при использовании метода последовательных приближений нахождения решения уравнения (2.1), и для обоснования сходимости ряда (2.7) как раз и используют условия регулярности (2.5) и оценку на правую часть (2.6).

Отметим, что в задачах статической теории упругости интегральное уравнение вида (2.1) оказывается вещественным, т. е. имеет вещественнозначные ядро и правую часть. Тем не менее, для общности изложения далее считаем, что ядро  $Q(s, t)$  и правая часть  $F(s)$  могут быть комплекснозначными.

При использовании метода суперпозиции для исследования граничных задач статической теории упругости соответствующее интегральное уравнение (2.1) обычно оказывается регулярным, однако выполнение условия разрешимости (2.6) часто приводит к неоправданно завышенным требованиям гладкости для граничных данных исходной граничной задачи. Однако для полного обоснования применимости метода суперпозиции для конкретной граничной задачи требуется также знание асимптотики решения  $X(s)$  при  $s \rightarrow \infty$ . Обычно, при исследовании этого вопроса используются результаты и метод лимитант Б. М. Кояловича (см. [143], [92, гл. 7, § 2]). Следует отметить, что теория Б. М. Кояловича имеет ограниченную область применимости и не позволяет дать оценку остатка в асимптотике решения  $X(s)$  при  $s \rightarrow \infty$ . Таким образом, возникает необходимость исследования интегральных уравнений метода суперпозиции с выходом из рамок теории регулярных уравнений, тем более, что структура (2.2) “главной” части  $Q_0$  ядра  $Q$  указывает на возможность использования интегрального преобразования Меллина при исследовании уравнения (2.1).

**2.1.2** Введем в рассмотрение некоторые функциональные пространства, которые будут использоваться в дальнейших рассуждениях. Пусть  $C_0^{\infty}(\mathbb{R}_+)$  – линейное пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактными в  $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$  носителями. Через  $B_{\nu, \mu}$  обозначим банахово пространство

измеримых на  $\mathbb{R}_+$  функций с нормой

$$\|X\|_{B_{\nu,\mu}} = \text{vrai sup}_{t>0} (t^{-1} + 1)^\nu (t + 1)^\mu |X(t)|,$$

так что, в частности, пространство  $B = B_{0,0}$ .

Через  $H_\sigma$  для вещественного значения  $\sigma$  обозначаем гильбертово пространство измеримых на  $\mathbb{R}_+$  функций с нормой

$$\|X\|_{H_\sigma} = \|X(t)t^{\sigma-1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \equiv \left\{ \int_0^\infty |X(t)|^2 t^{2\sigma-1} dt \right\}^{1/2}.$$

Через  $P_\sigma$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$  обозначаем прямую  $\text{Re } \gamma = \sigma$ , параллельную мнимой оси комплексной плоскости. Для  $-\infty < b_1 < b_2 \leq \infty$  введем в рассмотрение пространство  $H_2(b_1, b_2)$  [101, гл. 7, § 2] аналитических в полосе  $\text{Re } \gamma \in (b_1, b_2)$  функций  $M(\gamma)$  с равномерной по  $\sigma \in (b_1, b_2)$  оценкой

$$\|M(\gamma)\|_{L_2(P_\sigma)} \leq c < \infty.$$

В соответствии со структурой ядра  $Q$  введем в рассмотрение линейные интегральные операторы  $A, A_j, j = 0, 1$ :

$$A = A_0 + A_1, \quad (A_j X)(s) = \int_0^\infty Q_j(s, t) X(t) dt.$$

В принятых обозначениях интегральное уравнение (2.1) записывается в виде

$$X - AX = F$$

с линейным оператором  $A$ , непрерывно действующим из пространства  $B$  в подпространство  $C(\bar{\mathbb{R}}_+) \cap B$ , что вытекает из оценок (2.3), (2.4). Наряду с уравнением (2.1) будем рассматривать также "невозмущенное" (с ядром  $Q_0$ ) уравнение

$$X - A_0 X = F_0. \tag{2.8}$$

Согласно [101, с. 52] интегральный оператор, определенный преобразованием Меллина

$$M[X](\gamma) = \int_0^\infty X(t) t^{\gamma-1} dt, \quad X \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

продолжается до изометрии (с точностью до нормировки) между функциональными пространствами  $H_\sigma$  и  $L_2(P_\sigma)$ , а его обращение имеет вид

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M[X](\xi) t^{-\xi} d\xi. \tag{2.9}$$

В частности, если  $\nu + \mu > 0$  и функция  $X \in B_{\nu, \mu}$ , то ее преобразование Меллина  $M[X](\gamma)$  принадлежит пространству  $H_2(-\nu + \delta, \mu + \delta)$  для любого значения  $\delta \in (0, (\mu + \nu)/2)$ .

Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_j(\gamma) = M[\phi_j](\gamma), \quad j = 1, 2, \quad \Phi(\gamma) = \Phi_1(\gamma) \cdot \Phi_2(\gamma), \quad (2.10)$$

и пусть

$$D(\gamma) = 1 - \Phi(\gamma). \quad (2.11)$$

Из (2.3) и [256, с. 64], вытекает, что функции  $\Phi_j(\gamma)$ ,  $j = 1, 2$  аналитичны в полосе  $\text{Re } \gamma \in (-\nu_1, \nu_2)$  и для любого достаточно малого  $\delta > 0$  справедливы оценки

$$|\Phi_j(\gamma)| \leq c_\delta \exp(-d_0 |\text{Im } \gamma|), \quad \text{Re } \gamma \in (-\nu_1 + \delta, \nu_2 - \delta) \quad (2.12)$$

с постоянной  $d_0 = \text{arctg } d$ .

Напомним [271, гл. 13], что обобщенная дзета-функция Римана  $\zeta(z, a)$ ,  $a \in (0, 1]$ , определенная при  $\text{Re } z > 1$  равенством

$$\zeta(z, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^z}, \quad \text{Re } z > 1,$$

является мероморфной функцией переменного  $z \in \mathbb{C}$  с единственным простым полюсом в точке  $z = 1$ . При этом для любого  $\delta > 0$  выполняется оценка

$$|\zeta(z, a) - (z-1)^{-1}| \leq c(|\text{Im } z| + 1)^\tau, \quad |\text{Im } z| \leq \delta, \quad (2.13)$$

с некоторыми постоянными  $c = c(\delta) > 0$ ,  $\tau = \tau(\delta) > 0$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\sigma \in (-\nu_1, \nu_2)$ . Тогда линейный оператор  $A_0$  непрерывно действует в пространстве  $H_\sigma$ , а в пространстве  $L_2(P_\sigma)$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} M[A_0 X](\gamma) &= \frac{1}{2} \Phi(\gamma) M[X](\gamma) + \\ &+ \frac{\Phi_1(\gamma)}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Phi_2(\xi) \zeta(\xi - \gamma + 1, t_1) M[X](\xi) t^{-\xi} d\xi, \quad \forall X \in H_\sigma, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения Коши.

*Доказательство.* В силу оценок (2.12), (2.13) и непрерывности отображения

$$M^{-1} : M[X] \in L_2(P_\sigma) \rightarrow X \in H_\sigma,$$

с учетом непрерывности в пространстве  $L_2(P_\sigma)$  сингулярного оператора Коши [256, § 5.3]

$$(K_\sigma M)(\gamma) = \frac{1}{\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{M(\xi) d\xi}{\xi - \gamma},$$

закключаем, что при  $\sigma \in (-\nu_1, \nu_2)$  правая часть в (2.14) представляет собой линейный оператор, непрерывно действующий из пространства  $H_\sigma$  в пространство  $L_2(P_\sigma)$ . Отсюда и из плотности вложения линейного многообразия  $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$  в  $H_\sigma$  получаем, что утверждение теоремы будет доказано, если показать справедливость соотношения (2.14) для функций из  $C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ .

Из равенства (2.2) получаем при  $X \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$  и  $\operatorname{Re} \gamma \in (-\nu_1, \nu_2)$  равенство

$$M[A_0 X](\gamma) = \Phi_1(\gamma) \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty [\phi_2(t_n t^{-1}) t_n^{\gamma-1}] t^{-1} X(t) dt. \quad (2.15)$$

Подставляя в (2.15) выражение для  $X(t)$  из формулы обращения (2.9) при  $\sigma \in (\operatorname{Re} \gamma, \nu_2)$  и изменяя порядки суммирования и интегрирования, получаем

$$M[A_0 X](\gamma) = \frac{\Phi_1(\gamma)}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi_2(\xi) \zeta(\xi - \gamma + 1, t_1) M[X](\xi) d\xi, \quad (2.16)$$

где  $-\nu_1 < \operatorname{Re} \gamma < \sigma < \nu_2$ . Тогда, используя в равенстве (2.16) формулы Сохоцкого [204, с. 120] (при обосновании используем оценки (2.12), (2.13) и включения  $M[X](\gamma) \in H_2(-\nu_1, \nu_2)$ ,  $X \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ ), получаем требуемое соотношение (2.14).

Теорема доказана.

В пространстве  $L_2(P_\sigma)$ ,  $\sigma \in (-\nu_1, \nu_2)$ , введем в рассмотрение линейный непрерывный оператор  $T$ :

$$\begin{aligned} (TM)(\gamma) &= (1 - \Phi(\gamma)/2)M(\gamma) - \frac{1}{2} \Phi(\gamma)(K_\sigma M)(\gamma) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} v(\gamma, \xi) M(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где регулярное ядро

$$v(\gamma, \xi) = \Phi_1(\gamma)(\Phi_2(\gamma)(\xi - \gamma)^{-1} - \Phi_2(\xi) \zeta(\xi - \gamma + 1, t_1)),$$

так что справедливо включение (см. оценки (2.12), (2.13))

$$v(\gamma, \xi) \in L_2(P_\sigma \times P_\sigma). \quad (2.18)$$

Пусть  $I$  – тождественное отображение, тогда из (2.14) и определения оператора  $T$  получаем следующее утверждение.

**Следствие 1.** Справедливо равенство

$$M[(I - A_0)X](\gamma) = (TM[X])(\gamma), \quad X \in H_\sigma, \quad \sigma \in (-\nu_1, \nu_2),$$

т. е. операторы  $I - A_0$  и  $T$  унитарно эквивалентны как операторы, действующие в пространствах  $H_\sigma$  и  $L_2(P_\sigma)$ , соответственно.

Напомним (см. [144, с. 44]), что линейный замкнутый оператор  $T$ , действующий из банахова пространства  $B_1$  в банахово пространство  $B_2$ , называется нетеровым, если образ оператора  $T$  замкнут в  $B_2$ , а ядро  $\ker T \subset B_1$  и коядро  $\text{coker } T \subset B_2$  оператора  $T$  являются конечномерными подпространствами пространств  $B_1$  и  $B_2$  соответственно. При этом число

$$\kappa(T) = \dim \ker T - \dim \text{coker } T$$

называется индексом оператора  $T$ . Нетеров оператор называется фредгольмовым, если его индекс равен нулю. При этом, если  $T$  – непрерывный и непрерывно обратимый оператор, а  $T_1$  – вполне непрерывный оператор, то оператор  $T = T_0 + T_1$ , является фредгольмовым.

**Лемма 1.** Пусть для некоторого значения

$$\sigma \in (-\nu_1, \nu_2) \cap (-\min(\nu_0, \nu_4), (\min(1, \nu_3))) \quad (2.19)$$

выполнено условие

$$D(\gamma) \neq 0, \quad \gamma \in P_\sigma. \quad (2.20)$$

Тогда оператор  $I - T$  является нетеровым в пространстве  $H_\sigma$  и его индекс  $\kappa_\sigma = \kappa(I - T)$  определяется выражением

$$\kappa_\sigma = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{D'(\gamma)}{D(\gamma)} d\gamma. \quad (2.21)$$

*Доказательство.* Отметим, что из (2.12) и аналогичных оценок для производных  $\Phi'_j(\gamma)$ ,  $j = 1, 2$ , вытекает конечность величины  $\kappa_\sigma$  из (2.21), если выполнено условие (2.20). Для  $\sigma$  из интервала (2.19) выполняется включение (см. оценку (2.4))

$$Q_1(s, t) s^{\sigma-1/2} t^{-\sigma+1/2} \in L_2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$$

и, следовательно (см. [119, с. 382]), при этих значениях  $\sigma$  оператор  $A_1$  вполне непрерывно действует в пространстве  $H_\sigma$ . Тогда [144, с. 60] утверждение леммы достаточно доказать для невозмущенного оператора  $I - A_0$ , для чего, согласно следствию 1, достаточно установить нетеровость оператора  $T$  в пространстве  $L_2(P_\sigma)$  с индексом  $\kappa(T) = \kappa_\sigma$ . Пусть для определенности  $\sigma < 0$ . Рассмотрим на функциях  $M \in L_2(P_\sigma)$  отображение  $U$ :

$$(UM)(\lambda) = \lambda^{-1}M(\lambda^{-1}), \quad \lambda \in \Gamma_\sigma,$$

где окружность

$$\Gamma_\sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - (2\sigma)^{-1}| = |2\sigma)^{-1}|\}.$$

Оператор  $U$  унитарно отображает пространство  $L_2(P_\sigma)$  на пространство  $L_2(\Gamma_\sigma)$ , причем

$$\tilde{T}U = UT, \quad (2.22)$$

где оператор  $\tilde{T}$  имеет вид (см. равенство (2.15))

$$(\tilde{T}z)(\lambda) = (1 - \Phi(\lambda^{-1})/2)z(\lambda) - \frac{\Phi(\lambda^{-1})}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} \frac{z(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} \frac{v(\lambda^{-1}, \mu^{-1})z(\mu)}{\mu - \lambda} d\mu.$$

При этом функция  $\Phi(\lambda^{-1})$  является непрерывной на окружности  $\Gamma_\sigma$  (см. оценки (2.12)) и согласно (2.18) выполняется включение

$$\lambda^{-1}\mu^{-1}v(\lambda^{-1}, \mu^{-1}) \in L_2(\Gamma_\sigma \times \Gamma_\sigma).$$

Тогда с учетом условия (2.20) получаем [204, с. 139], что оператор  $\tilde{T}$  является нетеровым в пространстве  $L_2(\Gamma_\sigma)$  и его индекс

$$\kappa(\tilde{T}) = \frac{1}{2\pi} \left[ \arg \frac{1}{D(\lambda^{-1})} \right]_{\Gamma_\sigma} = \kappa_\sigma,$$

откуда и из (2.22) получаем утверждение леммы.

Лемма доказана.

**2.1.3** Следующее утверждение, наряду с теоремой 1, играет важную роль при получении оценок на бесконечности решений интегральных уравнений (2.1) и (2.8).

**Теорема 2.** Пусть  $-\nu_1 < -\nu < \mu < \nu_2$  и  $X \in H_\sigma$ ,  $\sigma \in (-\nu, \mu)$  – решение уравнения (2.8) с правой частью  $F_0 \in B\nu, \mu$ . Тогда функция  $D(\gamma)M[X](\gamma)$  принадлежит пространству  $H_2(\sigma, \sigma_1)$  для любого  $\sigma \in (\sigma, \mu)$  и справедливо равенство

$$D(\gamma)M[X](\gamma) = M[F_0](\gamma) + \Phi_1(\gamma)N_\sigma(\gamma), \quad \operatorname{Re} \gamma \in (\sigma, \mu), \quad (2.23)$$

где аналитическая в полуплоскости  $\operatorname{Re} \gamma > \sigma$  функция

$$N_\sigma(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi_2(\xi) \zeta(\xi - \gamma + 1, t_1) M[X](\xi) d\xi.$$



При этом, для любого  $\delta > 0$  выполняется оценка

$$|N_\sigma(\gamma)| \leq c_\delta \|X\|_{H_\sigma} (|\operatorname{Im} \gamma| + 1)^{\tau_1}, \quad \operatorname{Re} \gamma \in (\sigma + \delta, \delta^{-1}), \quad (2.24)$$

с показателем  $\tau_1 = \tau_1(\delta) > 0$ .

*Доказательство.* Прежде всего, по условию теоремы для любого  $\sigma_1 \in (\sigma, \mu)$  справедливо включение  $M[F_0](\gamma) \in H_2(\sigma, \sigma_1)$ . Далее, аналитичность функции  $N_\sigma(\gamma)$  при  $\operatorname{Re} \gamma > \sigma$  и оценка (2.24) вытекают из условия  $M[X](\gamma) \in L_2(P_\sigma)$  и оценок (2.12), (2.13). Кроме того, используя включение

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{M(\xi)}{\xi - \gamma} d\xi \in H_2(\sigma, \infty), \quad M \in L_2(P_\sigma),$$

и соотношение

$$L_2(P_\sigma) - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{M(\xi)}{\xi - \gamma - \epsilon} d\xi = -M(\gamma) + (K_\sigma M)(\gamma), \quad M \in L_2(P_\sigma)$$

(см. [152, гл. 6]), получаем, что функция  $\Phi_1(\gamma)N_\sigma(\gamma)$  принадлежит пространству  $H_2(\sigma, \sigma_1)$  для любого  $\sigma_1 \in (\sigma, \nu_2)$  и ее граничное значение на прямой  $P_\sigma$  задается выражением

$$\begin{aligned} L_2(P_\sigma) - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \Phi_1(\gamma + \epsilon)N_\sigma(\gamma + \epsilon) &= -\frac{1}{2} \Phi(\gamma)M[X](\gamma) + \\ &+ \frac{\Phi_1(\gamma)}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi_2(\xi) \zeta(\xi - \gamma + 1, t_1)M[X](\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.8), (2.14) получаем, что функция  $D(\gamma)M[X](\gamma)$ ,  $\gamma \in P_\sigma$  является граничным значением (в смысле сходимости в пространстве  $L_2(P_\sigma)$ ) функции из  $H_2(\sigma, \sigma_1)$ , определяемой правой частью формулы (2.23).

Теорема доказана.

Приведем два следствия из доказанной теоремы.

**Следствие 2.** Предположим, что в полосе  $\operatorname{Re} \gamma \in (\nu_-, \nu_+)$ , где  $-\nu_1 \leq \nu_- < 0 < \nu_+ \leq \nu_2$ , функция  $D(\gamma)$  имеет единственный простой корень в точке  $\gamma = 0$ . Пусть  $\nu_0 > 0$  и функция

$$X \in H_\sigma, \quad \sigma \in (\min(\nu_0, \nu_4, -\nu_-), 0)$$

является решением уравнения (2.1) с правой частью  $F \in B_{\nu, \mu}$  для некоторых  $\nu > |\sigma|$  и  $\mu \in (0, \min(\nu_+, \nu_3))$ . Тогда найдется такая постоянная  $a$ , что для произвольного  $\alpha \in (0, \mu)$  выполняется соотношение

$$X(s) - a \in B_{0, \alpha}. \quad (2.25)$$

*Доказательство.* Можно считать, что функция  $X \in H_\sigma$  является решением невозмущенного уравнения (2.8) с правой частью

$$F_0 = A_1 X + F \in B_{\nu_0} + B_{\nu, \mu} \quad (2.26)$$

(см. оценку (2.4) для  $Q_1(s, t)$ ). Тогда по теореме 2 имеем включение

$$M[X](\gamma) \in H_2(\sigma, \sigma_1), \quad \forall \sigma_1 \in (\sigma, 0)$$

и выражение (2.23) дает мероморфное продолжение функции  $M[X](\gamma)$  в полосу  $\text{Re } \gamma \in (\sigma, \mu)$  с единственным простым полюсом в точке  $\gamma = 0$ . Таким образом, используя формулу обращения (2.9) и оценки (2.12), (2.24), получаем в пространстве  $H_\sigma$  и  $\sigma_1 \in (\sigma, 0)$  равенство

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ L_2(P_\sigma) - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} M[X](\gamma + \epsilon) \right\} s^{-\gamma} d\gamma = \\ &= H_\sigma - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{M[F_0](\gamma + \epsilon) + \Phi_1(\gamma + \epsilon)N_\sigma(\gamma + \epsilon)}{D(\gamma + \epsilon)} s^{-\gamma} d\gamma = \\ &= F_0(s) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{\Phi_1(\gamma)(\Phi_2(\gamma)M[F_0](\gamma) + N_\sigma(\gamma))}{D(\gamma)} s^{-\gamma} d\gamma. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Применяя к интегралу в (2.27) теорему Коши о вычетах, имеем для любого  $\alpha \in (0, \mu)$ :

$$\begin{aligned} X(s) - F_0(s) &= -\frac{M[F_0](0) + \Phi_1(0)N_\sigma(0)}{D'(0)} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\Phi_1(\gamma)(\Phi_2(\gamma)M[F_0](\gamma) + N_\sigma(\gamma))}{D(\gamma)} s^{-\gamma} d\gamma. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Из (2.26)–(2.28) получаем утверждение (2.25). Следствие доказано.

Отметим, что если в условиях следствия 2 функция  $F(s)$  является непрерывной при  $s \geq 0$ , то непрерывной будет и соответствующее решение  $X(s)$  и тогда из (2.25) получаем асимптотическое соотношение

$$X(s) = a + O(s^{-\alpha}), \quad s \rightarrow \infty, \quad \forall \alpha \in (0, \mu).$$

**Следствие 3.** Пусть функция  $D(\gamma)$  удовлетворяет условиям следствия 2. Предположим, что  $X \in B$  – решение интегрального уравнения (2.1) с правой частью  $F \in B_{0, \mu}$  для некоторого  $\mu \in (0, \min(\nu_+, \nu_3))$ . Тогда для функции  $X(s)$  справедливо утверждение (2.25).

*Доказательство.* Функция

$$X_1 = X - A_1 X - F \equiv A_0 X \in B_{\nu_1, 0} \subset H_\sigma, \quad \sigma \in (-\nu_1, 0)$$

и удовлетворяет уравнению (2.8) с правой частью

$$F_0 = A_0(F + A_1 X) \in B_{\nu_1, \mu} \quad (2.29)$$

(см. оценки (2.3), (2.4)). Тогда утверждение следствия вытекает из следствия 2, примененного к уравнению (2.8) с правой частью (2.29).

**2.1.4** Всюду в этом пункте, в том числе в формулировках теорем, считаем, что функция  $D(\gamma)$  удовлетворяет условиям следствия 2, причем индекс  $\kappa_\sigma = 0$  (см. выражение (2.21)) для некоторого, а значит, и для любого значения  $\sigma \in (\nu_-, 0)$ . Кроме того, предполагается, что показатели  $\nu_j$  из оценок (2.3), (2.4) удовлетворяют неравенствам

$$\nu_j \geq 1, \quad j = 1, 2, 3, 4. \quad (2.30)$$

Наличие неравенств (2.30) упрощает изложение, кроме того, такие неравенства выполняются в интересных для приложений случаях, рассмотренных в гл. 3.

Введем в рассмотрение союзный к  $A$  оператор  $A^*$ :

$$(A^* Y)(s) = \int_0^\infty Q(t, s) Y(t) dt, \quad s > 0,$$

и линейные пространства функций

$$E = \cup_{\epsilon > 0} B_{0, \epsilon}, \quad E^* = \cap_{\epsilon \in (0, 1)} B_{0, \epsilon}.$$

Таким образом, пространство  $E$  состоит из таких функций  $X \in B$ , что для некоторого  $\epsilon > 0$ , зависящего от  $X$ , выполняется оценка  $|X(t)| \leq c(1+t)^{-\epsilon}$  при почти всех  $s > 0$ . При этом пространство  $E^*$  образуют такие функции  $X \in B$ , что оценка  $|X(t)| \leq c_\epsilon(1+t)^{-\epsilon}$  справедлива для произвольного значения  $\epsilon < 1$ . Для дальнейшего является важным, что (с учетом (2.30)) оператор  $A$  действует из  $E$  в  $E$ , а оператор  $A^*$  отображает  $B_{0,1} \subset E^*$  в  $E^*$ , причем выполняется соотношение

$$(AX, Y) = (X, A^* Y), \quad X \in E, Y \in B_{0,1}, \quad (2.31)$$

где билинейная форма

$$(X, Y) = \int_0^\infty X(t) Y(t) dt, \quad X \in E, Y \in E^*.$$

**Лемма 2.** Однородное уравнение

$$Y(s) - (A^* Y)(s) = 0, \quad s > 0 \quad (2.32)$$

имеет нетривиальное решение в пространстве  $B_{0,1}$ .

*Доказательство.* Сделаем в (2.32) замену неизвестной функции  $Y^*(s) = sY(s)$ , тогда для  $Y^*(s)$  получим интегральное уравнение

$$Y^*(s) - \int_0^\infty Q^*(s, t) Y^*(t) dt = 0, \quad s > 0 \quad (2.33)$$

с ядром

$$Q^*(s, t) = t^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_1^*(t_n^{-1}s) \phi_2^*(t_n t^{-1}) t_n^{-1} + st^{-1} Q_1(s, t),$$

где функции

$$\phi_j^*(\lambda) = \phi_{3-j}(\lambda^{-1}), \quad \lambda \in S, \quad j = 1, 2.$$

Из (2.3), (2.4) имеем оценки

$$|\phi_j^*(\lambda)| \leq c|\lambda|^{\nu_2}(1+|\lambda|)^{-(\nu_1+\nu_2)}, \quad \lambda \in S, \quad j = 1, 2,$$

$$|st^{-1}Q_1(s, t)| \leq cs(1+s)^{-(1+\nu_4)}(1+t)^{-(1+\nu_3)}, \quad s, t \geq 0.$$

Таким образом, уравнение (2.33) имеет вид (2.1)–(2.4), причем соответствующая функция

$$D^*(\gamma) := 1 - M[\phi_1^*](\gamma)M[\phi_2^*](\gamma) = D(-\gamma), \quad \text{Re } \gamma \in (-\nu_2, \nu_1),$$

удовлетворяет требованиям следствия 2, налагаемым на функцию  $D(\gamma)$  (с заменой  $\nu_-$  на  $-\nu_+$  и  $\nu_+$  на  $-\nu_-$ ). Для соответствующей величины индекса  $\kappa_\sigma^*$  из (2.21), используя теорему Коши, получаем

$$\kappa_\sigma^* = 1 - \kappa_{\sigma_1} = 1, \quad \sigma \in (-\nu_+, 0), \quad \sigma_1 \in (\nu_-, 0).$$

Так как  $\kappa_\sigma^* > 0$ , то по лемме 1 и следствию 2 заключаем, что найдется нетривиальное решение  $Y^* \in B_{1,0}$  уравнения (2.33). Тогда получаем, что существует нетривиальное решение  $Y(s) = s^{-1}Y^*(s) \in B_{0,1}$  уравнения (2.32).

Лемма доказана.

Введем в рассмотрение функцию

$$q_0(s) = 1 - \int_0^\infty Q(s, t) dt \in B.$$

Используя равенство (2.15), которое справедливо при  $\sigma \in (-\nu_1, 0)$  и  $X \in B$ , и формулу обращения (2.9), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Q_0(s, t) dt &= \frac{\Phi_2(0)}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi_1(\gamma) \zeta(1-\gamma, t_1) s^{-\gamma} d\gamma = \\ &= 1 + \frac{\Phi_2(0)}{2\pi i} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \Phi_1(\gamma) \zeta(1-\gamma, t_1) s^{-\gamma} d\gamma = \end{aligned}$$

$$= 1 + O(s^{-\sigma_1}), \quad s \rightarrow \infty, \quad \forall \sigma_1 \in (0, \nu_2),$$

и, значит, функция  $q_0(s)$  принадлежит пространству  $E$ .

В случае выполнения условия (2.6) справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** Уравнение (2.1) однозначно разрешимо в пространстве  $H_\sigma$  для любого значения  $\sigma \in (\nu_-, 0)$ . Кроме того, для любой функции  $F \in E$  существует единственное решение  $X \in B$  уравнения (2.1), и если

$$F \in B_{0, \mu}, \quad \mu \in (0, \min(\nu_+, \nu_3)),$$

то для решения  $X \in B$  справедливо утверждение (2.25) с постоянной

$$a = \frac{(F, Y)}{(q_0, Y)}, \quad (2.34)$$

где  $Y \in B_{0,1}$  – единственное, с точностью до нормировки, нетривиальное решение однородного уравнения (2.32).

*Доказательство.* Пусть  $X \in B$  – решение уравнения (2.1) с  $F \in E$ , тогда согласно следствию 3 найдется такое  $\alpha$ , что функция  $X - 1 = X - a \in E$  удовлетворяет равенству  $(I - A)X_1 = F - aq_0$ , откуда, используя (2.31), (2.32), получаем соотношение

$$a(q_0, Y) = (F, Y), \quad (2.35)$$

где  $Y \in B_{0,1}$  – произвольная функция из утверждения леммы 2. В силу условия регулярности (2.6) уравнение (2.1) имеет решение  $X \in B$  для любой правой части  $F \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$  (см. (2.7)). Тогда из (2.35) вытекает, что  $(q_0, Y) \neq 0$ , откуда, в частности, следует единственность (с точностью до нормировки) функции  $Y$  из утверждения леммы 2. Далее, из (2.35) получаем утверждение (2.34). Таким образом, в силу леммы 1 и следствия 2 теорема будет полностью доказана, если показать единственность решения уравнения (2.1) в пространстве  $B$ .

Пусть  $X_0 \in B$  – решение однородного уравнения (2.1). Тогда, в силу (2.1), функция  $X_0(s)$  является непрерывной при  $s \geq 0$  и по следствию 3 и установленному равенству (2.34) заключаем, что  $X_0(s) \rightarrow 0, s \rightarrow \infty$ . Далее используем прием из [25], а именно, пусть  $s_0 \geq 0$  – такая точка, что  $|X_0(s_0)| = \|X\|_B$ . Тогда, используя (2.5), получаем

$$\|X_0\|_B \leq (1 - q_0(s_0))\|X_0\|_B,$$

т. е. функция  $X_0(s) \equiv 0$ .

Теорема доказана.

## 2.2 Об одном классе бесконечных систем алгебраических уравнений

**2.2.1** Использование метода суперпозиции при исследовании плоских статических граничных задач теории упругости в прямоугольной области [92, гл. 7] приводит к необходимости рассмотрения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, которые в общей ситуации можно записать в виде

$$x_{1,k} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}^{(1)} x_{2,n} = b_{1,n}, \quad x_{2,k} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}^{(2)} x_{1,n} = b_{2,n}, \quad (2.36)$$

с коэффициентами вида

$$a_{kn}^{(j)} = \phi_j(t_k t_n^{-1}) t_n^{-1} + q_{kn}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \quad k, n = 1, 2, \dots,$$

где  $t_n = t_1 + (n - 1)$  и число  $t_1 \in (0, 1]$ . Функции  $\phi_j$  обладают теми же свойствами, что и в § 2.1, в частности для них выполняются оценки (2.3). При этом для коэффициентов  $q_{kn}^{(j)}$  верны оценки (ср. с оценками (2.4))

$$|q_{kn}^{(j)}| \leq c k^{-\nu_3} n^{-(1+\nu_4)}, \quad j = 1, 2, \quad k, n = 1, 2, \dots, \quad (2.37)$$

с некоторыми показателями  $\nu_3 > 0$ ,  $\nu_4 > 0$ .

Для практического решения системы уравнений (2.36) важное значение имеют утверждения об однозначной разрешимости, а также априорная информация об асимптотическом при  $k \rightarrow \infty$  поведении неизвестных  $x_{1,k}$ ,  $x_{2,k}$ . В данном параграфе при исследовании системы (2.36) аналогично рассмотрением § 2 (см. также [52], [22, гл. 4]) используется аппарат интегрального преобразования Меллина. Кроме установления асимптотики с оценкой остатка для ограниченных решений системы уравнений (2.36), такой подход позволяет при рассмотрении вопроса о разрешимости системы (2.36) использовать достаточно полно разработанную теорию систем сингулярных интегральных уравнений (см., например, [33]).

Далее будем использовать следующие обозначения для комплекснозначных последовательностей:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_j = \{x_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}, \quad j = 1, 2.$$

Через  $l_p = l_p(\mathbb{N})$ ,  $1 \leq p < \infty$  обозначаем банахово пространство последовательностей, суммируемых в  $p$ -й степени а через  $l_{\infty} = l_p(\mathbb{N})$  – банахово пространство ограниченных последовательностей. Норма в пространстве  $l_p$  опре-

деляется стандартным образом:

$$\|\{x_k\}\|_{l_p} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad \|\{x_k\}\|_{l_\infty} = \sup_{k \geq 1} |x_k|.$$

Для прямой суммы двух экземпляров пространства  $l_p$  используем обозначение  $l_p^2 = l_p \oplus l_p$ . При этом норма элемента  $x = \{x^{(1)}, x^{(2)}\} \in l_p^2$  определяется выражением  $\|x\|_{l_p^2} = (\|x^{(1)}\|_{l_p}^p + \|x^{(2)}\|_{l_p}^p)^{1/p}$ , если  $1 \leq p < \infty$  и  $\|x\|_{l_p^2} = \max\{\|x^{(1)}\|_{l_\infty}, \|x^{(2)}\|_{l_\infty}\}$ , если  $p = \infty$ .

Введем в рассмотрение линейные операторы

$$A = A_0 + A_1, \quad A_j x = \begin{pmatrix} A_{j1} x \\ A_{j2} x \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1,$$

где

$$A_{0j} x = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \phi_j(t_k t_n^{-1}) t_n^{-1} x_{3-j,n} \right\}_{k=1}^{\infty},$$

$$A_{1j} x = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} q_{kn}^{(j)} x_{3-j,n} \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

В принятых обозначениях система уравнений (2.36) записывается в виде

$$x - Ax = b,$$

с линейным оператором  $A$ , непрерывно действующим в пространстве  $l_\infty$ . Частным случаем системы (2.36) является “невозмущенная” система алгебраических уравнений

$$x - A_0 x = b, \tag{2.38}$$

при исследовании которой и используется техника интегрального преобразования Меллина. Далее основное внимание уделяется ограниченным решениям систем уравнений (2.36), (2.38), т. е. когда искомым вектор  $x \in l_\infty^2$ .

**2.2.2** Далее функции  $\Phi_j(\gamma)$ ,  $j = 1, 2$  имеют тот же смысл, что и в § 2.1 (см. (2.10)). Введем в рассмотрение линейное отображение  $M : x \rightarrow M[x]$  из пространства  $l_\infty^2$  в множество аналитических вектор-функций, определенных в полосе  $\text{Re } \gamma \in (-\nu_1, 0)$ ;

$$M[x] = \begin{pmatrix} M_1 x \\ M_2 x \end{pmatrix}, \quad (M_j x)(\gamma) = \Phi_j(\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} t_n^{\gamma-1} x_{3-j,n}, \quad j = 1, 2. \tag{2.39}$$

Свойства отображения  $M$  и его связь с оператором  $A_0$  задаются следующим утверждением.

**Предложение 1.**

1) Если вектор  $x \in l_p^2$ ,  $p \geq 1$ , то функции  $(M_j x)(\gamma)$ ,  $j = 1, 2$  аналитичны в полосе  $\text{Re } \gamma \in (-\nu_1, \nu_2(p))$ ,  $\nu_2(p) = \min(\nu_2, p^{-1})$  и для любого достаточно малого  $\delta > 0$  справедливы оценки

$$|(M_j x)(\gamma)| \leq c_\delta \exp(-d_0 |\text{Im } \gamma|), \quad \text{Re } \gamma \in (-\nu_1 + \delta, \nu_2(p) - \delta). \quad (2.40)$$

2) Если  $(M_j x)(\gamma) = 0$  при  $\gamma \in P_\sigma$ ,  $j = 1, 2$  для некоторого  $\sigma \in (-\nu_1, 0)$ , то вектор  $x = 0$ .

3) Для любых  $x \in l_\infty^2$  и  $\sigma \in (-\nu_1, 0)$  справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_j(t_k t_n^{-1}) t_n^{-1} x_{3-j,n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (M_j x)(\gamma) t_k^{-\gamma} d\gamma, \quad (2.41)$$

где  $j = 1, 2$  и  $k = 1, 2, \dots$ .

*Доказательство.* Используя неравенство Гельдера, получаем

$$|(M_j x)(\gamma)| \leq |(\Phi_j x)(\gamma)| \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n^{(\text{Re } \gamma - 1) p'} \right\}^{1/p'} \cdot \|x\|_{l_p^2}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

откуда и из оценок (2.12) следует утверждение 1). Утверждение 2) вытекает из аналитичности рассматриваемых функций и [257, с. 316]. Наконец, утверждение 3) следует из определения отображения  $M$  и формулы обращения

$$\phi_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi_j(\gamma) t^{-\gamma} d\gamma, \quad t > 0, \quad \sigma \in (-\nu_1, \nu_2).$$

Пусть вектор  $b \in l_\infty^2$  и предположим, что существует решение  $x \in l_\infty^2$  соответствующего уравнения (2.36). Тогда согласно (2.41) для любого значения  $\sigma \in (-\sigma_1, 0)$  имеем равенства

$$x_{j,k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (M_j x)(\xi) t_k^{-\xi} d\xi + b_{j,k}, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.42)$$

Применяя к (2.42) отображение  $M$  и вводя обозначения

$$M_j(\gamma) = (M_j x)(\gamma), \quad F_j(\gamma) = (M_j b)(\gamma), \quad j = 1, 2,$$

получаем следующие соотношения:

$$M_j(\gamma) = \frac{\Phi_j(\gamma)}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \zeta(\xi - \gamma + 1, t_1) M_{3-j}(\xi) d\xi + F_j(\gamma),$$

$$-\nu_1 < \text{Re } \gamma < \sigma < 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.43)$$



Соотношения (2.43) играют определяющую роль при исследовании априорных асимптотических свойств ограниченных решений систем (2.38) и (2.36), а также при дальнейшем сведении системы уравнений (2.38) к системе сингулярных интегральных уравнений.

Применяя, на основании оценок (2.40), (2.13), к интегралам в формуле (2.43) теорему Коши (вычет берется в простом полюсе  $\gamma = \xi$ ), получаем соотношения

$$M_j(\gamma) = \Phi_j(\gamma)M_{3-j}(\gamma) + \frac{\Phi_j(\gamma)}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \zeta(\xi - \gamma + 1, t_1)M_{3-j}(\xi) d\xi + F_j(\gamma), \quad j = 1, 2,$$

где уже  $-\nu_1 < \sigma < \operatorname{Re} \gamma < 0$ . Это соотношения, после простых алгебраических преобразований, приводятся к виду

$$M_j(\gamma) = \frac{M_{j,\sigma}(\gamma)}{D(\gamma)}, \quad \operatorname{Re} \gamma \in (\sigma, 0), \quad j = 1, 2, \quad (2.44)$$

где функция  $D(\gamma)$  определена согласно (2.11) и функции

$$M_{j,\sigma}(\gamma) = \Phi_j(\gamma)[N_{3-j,\sigma}(\gamma) + \Phi_{3-j}(\gamma)N_{j,\sigma}(\gamma) + F_{3-j}(\gamma)] + F_j(\gamma),$$

$$N_{j,\sigma}(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma-i\infty} \zeta(\xi - \gamma + 1, t_1)M_j(\gamma) d\xi. \quad (2.45)$$

При этом функции  $N_{j,\sigma}(\gamma)$  аналитичны в полуплоскости  $\operatorname{Re} \gamma > \sigma$  с оценками (см. оценки (2.10), (2.13), (2.40))

$$|N_{j,\sigma}(\gamma)| \leq c_\delta (|\operatorname{Im} \gamma| + 1)^{\tau_1(\delta)}, \quad \operatorname{Re} \gamma \in (\sigma + \delta, \delta^{-1}), \quad (2.46)$$

справедливыми для всех достаточно малых  $\delta > 0$ .

Проведенные рассмотрения позволяют заключить, на основании равенств (2.42), что справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть вектор  $b \in l_\infty^2$  и  $x \in l_\infty^2$  – решение уравнения (2.38). Тогда для  $x$  справедливо представление

$$x_{j,k} = b_{j,k} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{M_{j,\sigma}(\gamma)}{D(\gamma)} t_k^{-\gamma} d\gamma, \quad (2.47)$$

где  $j = 1, 2$ ,  $k = 1, 2, \dots$  и  $-\nu_1 < \sigma < \sigma_1 < 0$ , а функции  $D(\gamma)$ ,  $M_{j,\sigma}(\gamma)$  определены согласно (2.11) и (2.45).

Важным моментом, относящимся к представлению решения уравнения (2.38) в виде (2.47) является то обстоятельство, что независимо от рассматриваемого ограниченного решения  $x$  функции  $N_{j,\sigma}(\gamma)$ ,  $j = 1, 2$ , являются аналитическими в полуплоскости  $\operatorname{Re} \gamma > \sigma$ , где допускают оценки (2.46). Из условия  $x \in l_\infty^2$  вытекает, что функции  $M_j(\gamma) = (M_j x)(\gamma)$  аналитичны в полосе  $\operatorname{Re} \gamma \in (-\nu_1, 0)$ , а формулы (2.44), (2.45) при условии  $b \in l_p^2$ ,  $p \in [1, \infty)$ , дают

мероморфное продолжение  $M_j(\gamma)$  в полосу  $\operatorname{Re} \gamma \in [0, \nu_2(p))$ , а в общем случае – в область мероморфности функций  $\Phi_j(\gamma)$ ,  $F_j(\gamma)$ , которые определяются явным образом через коэффициенты и правую часть уравнения (2.38). При этом особенности функций  $M_j(\gamma)$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} \gamma \geq 0$  определяются корнями функции  $D(\gamma)$  и полюсами функций  $F_j(\gamma)$ . Это и дает возможность, исходя из представления (2.47), получать асимптотические оценки для  $x_{1,k}$ ,  $x_{2,k}$  при  $k \rightarrow \infty$  в случае конкретных систем уравнений вида (2.36) или (2.38).

Приведем пример на использование теоремы 1, который понадобится в дальнейшем. Предположим, что функция  $D(\gamma)$  удовлетворяет условиям следствия 2.2, т. е.:

$$D(\gamma) \neq 0, \quad \gamma \neq 0, \quad \operatorname{Re} \gamma \in (-\nu_-, \nu_+); \quad D(0) = 0, \quad D'(0) \neq 0. \quad (2.48)$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

**Следствие 1.** Пусть

$$b \in l_p^2, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (2.49)$$

и  $x \in l_\infty^2$  – решение системы уравнений (2.36). Тогда справедливы асимптотические формулы

$$x_{j,k} = a_j + b_{j,k} + O(k^{-\alpha}), \quad k \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, \quad (2.50)$$

где  $\alpha$  – любое число из интервала

$$(0, \alpha_0(p)), \quad \alpha_0(p) = \min(\nu_+, \nu_3, p^{-1}),$$

и постоянные  $a_j$  связаны соотношением  $a_2 = \Phi_2(0)a_1$ .

*Доказательство.* В силу системы (2.36) вектор  $x$  можно считать решением уравнения (2.38) с правой частью  $b + A_1x$ , при этом, согласно (2.37), имеем оценки

$$|(A_{1j}x)_k| \leq c \|x\|_{l_\infty^2} \cdot k^{-\nu_3}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \quad (2.51)$$

так что  $A_1x \in l_p^2$  для любого  $p > \max(\nu_3^{-1}, 1)$ . Тогда (см. (2.40), (2.45)) функции  $M_{j,\sigma}(\gamma)$  являются аналитическими при  $\operatorname{Re} \gamma \in (\sigma, \alpha_0(p))$ , и применяя теорему Коши к интегралам в (2.47), получаем, с учетом оценок (2.51), следующие выражения для  $x_{j,k}$ :

$$\begin{aligned} x_{j,k} &= b_{j,k} + (A_{1j}x)_k + a_j + \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{M_{j,\sigma}(\gamma)}{D(\gamma)} t_k^{-\gamma} d\gamma = \\ &= a_j + b_{j,k} + O(k^{-\alpha}), \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где

$$a_j = -\frac{M_{j,\sigma}(0)}{D(0)}, \quad j = 1, 2.$$

Далее, так как по условию  $\Phi_1(0)\Phi_2(0) = 1$ , то из (2.45) имеем соотношение  $M_{2,\sigma}(0) = \Phi_2(0)M_{1,\sigma}(0)$  и тогда  $a_2 = \Phi_2(0)a_1$ .

Следствие доказано.

**2.2.3** Соотношения (2.43) позволяют провести сведение системы линейных алгебраических уравнений (2.38) к системе сингулярных интегральных уравнений относительно функций  $M_j(\gamma)$ ,  $j = 1, 2$ . Действительно, используя в (2.43) формулы Сохоцкого при  $\gamma \rightarrow \xi$  (для обоснования привлекаются оценки (2.13) и (2.40)), получаем систему интегральных уравнений на прямой  $P_\sigma$ :

$$TM := A(\gamma)M(\gamma) + \frac{B(\gamma)}{\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{M(\xi)}{\xi - \gamma} d\xi + (VM)(\gamma) = F(\gamma), \quad (2.52)$$

где вектор-функции

$$M(\gamma) = \begin{pmatrix} M_1(\gamma) \\ M_2(\gamma) \end{pmatrix}, \quad F(\gamma) = \begin{pmatrix} F_1(\gamma) \\ F_2(\gamma) \end{pmatrix},$$

матрицы

$$A(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & -\Phi_1(\gamma)/2 \\ -\Phi_2(\gamma)/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & -\Phi_1(\gamma)/2 \\ -\Phi_2(\gamma)/2 & 0 \end{pmatrix}$$

и регулярный интегральный оператор

$$V = \{V_{ij}\}_{i,j=1}^2, \quad (V_{ij}M_j)(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} V_{ij}(\gamma, \xi) M_j(\xi) d\xi,$$

с ядрами  $\mathcal{V}_{11} = \mathcal{V}_{22} \equiv 0$  и

$$\mathcal{V}_{12}(\gamma, \xi) = \Phi_1(\gamma)((\xi - \gamma)^{-1} - \zeta(\xi - \gamma + 1, t_1)),$$

$$\mathcal{V}_{21}(\gamma, \xi) = \Phi_2(\gamma)((\xi - \gamma)^{-1} - \zeta(\xi - \gamma + 1, t_1)).$$

Для определителей матриц  $A(\gamma) \pm B(\gamma)$  имеем равенства

$$\det(A(\gamma) + B(\gamma)) = D(\gamma), \quad \det(A(\gamma) - B(\gamma)) \equiv 1,$$

откуда следует, что при выполнении условия (2.18) система (2.52) является системой нормального типа с суммарным индексом  $\kappa_\sigma$ , определяемым выражением (2.21) [33, с. 52].

Отметим, что выполнения условия (2.20) всегда можно добиться за счет выбора значения параметра  $\sigma \in (-\nu_1, 0)$  (см. оценки (2.12)), поэтому далее в этом параграфе, не уменьшая общности, считаем, что в полосе  $\operatorname{Re} \gamma \in (-\nu_1, 0)$  функция  $D(\gamma)$  не имеет корней. Так как дзета-функция  $\zeta(\lambda, t_1)$  неограничена по модулю при  $\operatorname{Re} \lambda = 1$ ,  $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow \pm\infty$ , то систему уравнений (2.52) следует рассматривать в некотором весовом функциональном пространстве с растущим

при  $\text{Im } \lambda \rightarrow \pm\infty$  весом. В связи с этим, введем в рассмотрение гильбертово пространство  $\mathcal{H}_\sigma$  с нормой

$$\|f(\gamma)\|_{\mathcal{H}_\sigma} = \|f(\gamma) \exp [d_0|\gamma|/2]\|_{L_2(P_\sigma)},$$

и соответствующее пространство вектор-функций  $\mathcal{H}_\sigma^2 = \mathcal{H}_\sigma \oplus \mathcal{H}_\sigma$ .

**Лемма 1.** Оператор  $T$  из (2.52) является нетеровым в пространстве  $\mathcal{H}_\sigma^2$  с индексом  $\kappa(T) = \kappa_\sigma$ ,  $\sigma \in (-\nu_1, 0)$ .

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству нетеровости оператора  $T$  из (2.17) (см. доказательство леммы 2.1). При этом следует использовать отображение

$$U : M(\gamma) \rightarrow z(\lambda) = \lambda^{-1} \exp [d_0|\gamma|/2M(\lambda^{-1})]$$

и результаты из [33, § 49], относящиеся к системам сингулярных интегральных уравнений на гладком конечном контуре.

Справедлива следующая теорема о связи между решениями систем уравнений (2.38) и (2.52).

**Теорема 2.**

1) Пусть вектор  $b \in l_\infty^2$  и  $x \in l_\infty^2$  – решение уравнения (2.38). Тогда для любого  $\sigma \in (-\nu_1, 0)$  вектор-функция  $M(\gamma) = M[x](\gamma)$  принадлежит  $\mathcal{H}_\sigma^2$  и является решением системы уравнений (2.52) с правой частью  $F(\gamma) = M[b](\gamma)$ .

2) Пусть функция  $F(\gamma) = M[b](\gamma)$ ,  $b \in l_\infty^2$  и предположим, что существует решение  $M(\gamma) \in \mathcal{H}_{\sigma_0}^2$  системы уравнений (2.52) для некоторого  $\sigma_0 = \sigma \in (-\nu_1, 0)$ . Положим последовательности

$$x_{j,k} = b_{j,k} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M_j(\gamma) t_k^{-\gamma} d\gamma, \quad j = 1, 2. \quad (2.53)$$

Тогда для соответствующего вектора  $x$  справедливы утверждения:

а) вектор  $x$  является решением системы уравнений (2.38) с правой частью  $b \in l_\infty^2$ , по которой определена функция  $F(\gamma)$  и допускает оценки

$$|x_{j,k}| \leq c_\sigma k^\sigma, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (2.54)$$

б) если  $b = 0$  (а значит, и  $F(\gamma) \equiv 0$ ), а  $M(\gamma) \in \mathcal{H}_{\sigma_0}^2$  – нетривиальное решение системы уравнений (2.52), то вектор  $x$  является нетривиальным решением однородной системы уравнений (2.38);

в) если функция  $D(\gamma)$  удовлетворяет условиям (2.48) и  $b \in l_p^2$ ,  $p \in [1, \infty)$ , то вектор  $x \in l_\infty^2$  и верны асимптотические формулы (2.50).

*Доказательство.* Утверждение 1) вытекает, по существу, из проведенных ранее рассуждений.

Поясним вывод утверждения 2). Пусть правая часть в (2.52) имеет вид  $F(\gamma) = M[b](\gamma)$ ,  $b \in l_\infty^2$ , тогда функции  $F_j(\gamma)$  аналитичны в полосе

$\operatorname{Re} \gamma \in (-\nu_1, 0)$  с оценками

$$\|F(\gamma)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq c_\sigma < \infty, \quad \sigma \in (-\nu_1 + \delta, -\delta),$$

для всех достаточно маленьких  $\delta > 0$  (см. предложение 1). Пусть для этой вектор-функции  $F(\gamma)$  существует решение  $M(\gamma) \in \mathcal{H}_{\sigma_0}^2$  системы уравнений (2.52) при некотором фиксированном  $\sigma_0 = \sigma \in (-\nu_1, 0)$ . Тогда (см. доказательство теоремы 2.2 и [256, §§ 5.2–5.9]) нетрудно показать, что функции  $M_j(\gamma)$  допускают аналитические продолжения в полосу  $\operatorname{Re} \gamma \in (-\nu_1, 0)$ , причем для  $\operatorname{Re} \gamma \in (-\nu_1, \sigma_0)$  эти продолжения определяются формулами (2.43) с  $\sigma = \sigma_0$  (через значения  $M_j(\gamma)$  на прямой  $P_{\sigma_0}$ ), а при  $\operatorname{Re} \gamma \in (\sigma_0, 0)$  аналитические продолжения определяются формулами (2.44), (2.45), причем для всех достаточно малых  $\delta > 0$  справедливы оценки

$$\|M_j(\gamma)\|_{\mathcal{H}_\sigma} \leq c_\sigma < \infty, \quad \sigma \in (-\nu_1 + \delta, -\delta). \quad (2.55)$$

Тогда, используя обратное преобразование Меллина, получаем из (2.43) следующие равенства:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M_j(\gamma) t^{-\gamma} d\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_j(t t_n^{-1}) t_n^{-1} x_{3-j,n},$$

$$t > 0, \quad \sigma \in (-\nu_1, \sigma_0), \quad (2.56)$$

где  $j = 1, 2$  и  $x_{j,k}$  определены согласно (2.53). Далее, оценки (2.55) позволяют утверждать [256, с. 167], что для любого  $t > 0$

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M_j(\gamma) t^{-\gamma} d\gamma = \int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} M_j(\gamma) t^{-\gamma} d\gamma, \quad \forall \sigma \in (-\nu_1, 0). \quad (2.57)$$

Тогда из (2.56), (2.57) и (2.53) заключаем, что  $x$  – решение уравнения (2.38), причем верны оценки (2.54). При этом, если  $b = 0$  и предположить, что полученное по (2.53) решение уравнения (2.38) является тривиальным, то тогда из (2.56) и [256, § 3.17] следует, что  $M_j(\gamma) \equiv 0$ ,  $\operatorname{Re} \gamma \in (-\nu - 1, \sigma_0)$  для  $j = 1, 2$ , а в силу аналитичности  $M_j(\gamma)$  получаем, что  $M_j(\gamma) \equiv 0$ ,  $\operatorname{Re} \gamma = \sigma_0$ . Таким образом, установлены утверждения а), б).

Далее, если функция  $D(\gamma)$  удовлетворяет условиям (2.48), а вектор  $b$  – условию (2.49), то используя для аналитического продолжения функций  $M_j(\gamma)$ ,  $j = 1, 2$  в полосу  $\operatorname{Re} \gamma \in (\sigma_0, 0)$  формулы (2.44), (2.45), получим утверждение в) (см. доказательство следствия 1 из п. 2).

Теорема доказана.

**2.2.4** Всюду в этом пункте, в том числе и в формулировках утверждений, предполагаем, что для функции  $D(\gamma)$  выполнены условия (2.48) с  $\nu_- = \nu_1$ .

Введем в рассмотрение два банаховых пространства последовательностей, являющихся подпространствами пространства  $l_\infty$  [125, с. 147]. Пусть  $c$  – пространство сходящихся при  $k \rightarrow \infty$  последовательностей, а  $c_0$  – пространство сходящихся к нулю последовательностей. Положим прямые суммы  $c^2 = c \oplus c$ ,  $c_0^2 = c_0 \oplus c_0$ . Обозначим, через  $c_{00}^2$  множество “финитных” последовательностей из  $l_\infty^2$ , это множество состоит из векторов  $x \in l_\infty^2$ , у которых не более конечного числа координат  $x_{j,k}$  отлично от нуля.

Если  $x \in l_p^2$ , а  $y \in l_{p'}^2$ , где  $1/p + 1/p' = 1$ ,  $p \in (1, \infty)$ , то через  $\langle x, y \rangle$  обозначаем соотношение двойственности между пространствами  $l_p^2$  и  $l_{p'}^2$ :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_{1,k} y_{1,k} + \sum_{k=1}^{\infty} x_{2,k} y_{2,k}.$$

Положим линейные пространства (без введения топологий)

$$E = \cup_{p \in (1, \infty)} l_p^2, \quad E^* = \cap_{p \in (1, \infty)} l_{p'}^2.$$

Пусть число  $p_0 = \max(1, \nu_2^{-1}, \nu_3^{-1})$ , введем при  $p \in (p_0, \infty)$  линейный оператор  $R_p$ , действующий из  $l_\infty^2$  в  $l_p^2$  с областью определения  $D(R_p)$ :

$$R_p x = x - Ax, \quad D(R_p) = \{x \in l_\infty^2 : x - Ax \in l_p^2\}.$$

Для дальнейшего отметим, что  $c_{00}^2 \subset D(R_p)$ ,  $p \in (p_0, \infty)$  (см. оценки (2.3), (2.4) и (2.37)). Так как оператор  $A$  непрерывно действует в пространстве  $l_\infty^2$ , а  $l_p^2$  непрерывно вложено в  $l_\infty^2$ , то оператор  $R_p$  является замкнутым (как оператор из  $l_\infty^2$  в  $l_p^2$ ).

**Лемма 2.** Для любого  $p \in (p_0, \infty)$  оператор  $R_p$  является нетеровым, причем

$$\kappa(R_p) \geq \kappa_\sigma, \tag{2.58}$$

где величина  $\kappa_\sigma$  определена согласно выражению (2.21) и не зависит от значения  $\sigma \in (-\nu_1, 0)$ .

*Доказательство.* Так как справедливо равенство  $A = A_0 + A_1$  и оператор  $A_1$ , на основании оценок (2.37) и [125, гл. 11, § 2] вполне непрерывно действует из пространства  $l_\infty^2$  в  $l_p^2$  при  $p > \max(1, \nu_3^-)$ , то утверждения леммы достаточно доказать в частном случае  $A_1 = 0$ . В этом случае используем результаты п. 3. Пусть  $\kappa_\sigma^+$  – количество линейно независимых решений однородной системы уравнений (2.52), рассматриваемой в пространстве  $\mathcal{H}_\sigma^2$  для некоторого фиксированного значения  $\sigma \in (-\nu_1, 0)$ . Тогда, согласно лемме 1, найдутся такие вектор-функции  $L^m(\gamma) \in \mathcal{H}^2(\sigma)$ ,  $m = 1, 2, \dots, \kappa_\sigma^-$ , где  $\kappa_\sigma = \kappa_\sigma^+ - \kappa_\sigma^-$ , что система уравнений (2.52) имеет решение тогда и только тогда, когда для правой части  $F(\gamma) \in \mathcal{H}^2(\sigma)$  выполняются условия ортогональности

$$(F(\gamma), L^m(\gamma))_{\mathcal{H}_\sigma^2} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \kappa_\sigma^-,$$

где  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}_\sigma^2}$  – скалярное произведение в пространстве  $\mathcal{H}_\sigma^2$ . Тогда, полагая векторы  $\tilde{L}_j^m(\gamma) = L_j^m(\gamma) \exp(d_0|\gamma|)$ :

$$y^m = \begin{pmatrix} y_1^m \\ y_2^m \end{pmatrix},$$

$$y_{j,k}^m = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi_{3-j}(\gamma) \overline{\tilde{L}_{3-j}^m(\gamma)} t_k^{\gamma-1} d\gamma, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

на основании теоремы 2 заключаем, что для  $b \in E$  система уравнений (2.38) имеет решение в пространстве  $l_\infty^2$  тогда и только тогда, когда выполняются соотношения ортогональности

$$\langle b, y^m \rangle = 0, \quad m = 1, \dots, \kappa_\sigma^-. \quad (2.59)$$

Отсюда вытекает, что образ оператора  $R_p$  является замкнутым в пространстве  $l_p^2$ , причем выполняется неравенство

$$\dim \ker R_p \leq \kappa_\sigma^-. \quad (2.60)$$

Далее, по теореме 2 и предложению 1 получаем, что справедливо равенство

$$\dim \ker R_p = \kappa_\sigma^+. \quad (2.61)$$

Таким образом, заключаем, что оператор  $R_p$  является нетеровым, причем согласно (2.60), (2.61) выполняется оценка (2.58) для индекса  $\kappa(R_p)$ .

Лемма доказана.

Из леммы 2, используя плотность вложения пространства  $l_p^2$  в  $l_{p_1}^2$  при  $1 < p < p_1 < \infty$  и лемму 2.1 из [85], нетрудно получить следующее утверждение.

**Следствие 2.** Найдутся такие числа  $\kappa^+$ ,  $\kappa^-$ , что  $\kappa^+ - \kappa^- \geq \kappa_\sigma$ , и система линейно независимых векторов  $y^m \in E^*$ ,  $m = 1, \dots, \kappa^-$ , что однородная система уравнений (2.36) имеет ровно  $\kappa^+$  линейно независимых решений в пространстве  $l_\infty^2$ , а неоднородная система уравнений (2.36) с правой частью  $b \in E$  имеет решение в пространстве  $l_\infty^2$  тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\langle b, y^m \rangle = 0, \quad m = 1, \dots, \kappa^-.$$

В силу условия (2.48) далее, не уменьшая общности, считаем, что выполняются равенства

$$\Phi_1(0) = \Phi_2(0) = 1.$$

Положим векторы (ср. с функцией  $q_0(s)$  из § 2, п. 4)

$$e = \begin{pmatrix} \{1\}_{k=1}^\infty \\ \{1\}_{k=1}^\infty \end{pmatrix}, \quad q^0 = e - Ae. \quad (2.62)$$

Тогда (см. (2.42), (2.51)) имеем для  $\alpha \in (0, \min(\nu_1, \nu_3))$  соотношения

$$q_{j,k}^0 = 1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi_j(\gamma) \zeta(1-\gamma, t_1) t_k^{-\gamma} d\gamma + O(k^{-\nu_3}) = \\ = O(k^{-\alpha}), \quad k \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2,$$

и значит справедливо включение  $q^0 \in E$ .

Введем в рассмотрение союзный к  $A$  линейный оператор  $A^*$ :

$$A^* x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad y_j = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(3-j)} x_{3-j,n} \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad j = 1, 2.$$

При этом оператор  $A$  действует из пространства  $E$  в  $E$ , а оператор  $A^*$  отображает пространство  $E^*$  в  $E^*$  и справедливо соотношение двойственности

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle, \quad x \in E, \quad y \in E^*. \quad (2.63)$$

Аналогично доказательству леммы 2.2 проводится доказательство следующего утверждения.

**Лемма 3.** Пусть  $\kappa_\sigma = 0$ , где  $\sigma \in (-\nu_1, 0)$ . Тогда однородное уравнение

$$y - A^* y = 0$$

имеет нетривиальное решение  $y \in e^*$ , причем для компонент  $y_{j,k}$  этого решения справедливы оценки

$$|y_{j,k}| \leq c k^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2.$$

Сформулируем основной результат настоящего пункта, который относится к вопросу об однозначной разрешимости регулярной системы линейных алгебраических уравнений вида (2.36). Напомним [126, с. 37], что система (2.36) называется регулярной, если выполняются оценки

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} |a_{kn}^{(j)}| > 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2.$$

**Теорема 3.** Пусть индекс  $\kappa_\sigma = 0$ ,  $\sigma \in (-\nu_1, 0)$  и система (2.36) является регулярной. Тогда для любого вектора  $b \in l_p^\infty$  с  $p \in [1, \infty)$  существует единственное решение  $x \in l_\infty^2$  системы уравнений (2.36). При этом для решения  $x$  справедлива асимптотическая формула (2.50) с постоянными

$$a_1 = a_2 = \frac{\langle b, y \rangle}{\langle q^0, y \rangle}, \quad (2.64)$$



где  $\langle q^0, y \rangle \neq 0$  и  $y \in E^*$  – вектор из утверждения леммы 3 (в условиях теоремы единственный, с точностью до нормировки), а вектор  $q^0$  определен согласно (2.62).

*Доказательство.* Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.3. При этом используются лемма 3, соотношение (2.63) и утверждение о единственности в пространстве  $c_0^2$  решения регулярной системы линейных алгебраических уравнений [25, теорема 7].

Отметим, что способ определения коэффициентов  $a_j$  из асимптотической формулы (2.50), основанный на формуле (2.64) (см. также утверждение теоремы 2.3), вполне аналогичен предложенному в работе [164] способу определения коэффициентов разложений решений эллиптических граничных задач по однородным решениям в окрестности конической или угловой точки.

**2.2.5** Рассмотрим некоторые приложения полученных в предыдущих пунктах результатов к алгебраическим системам уравнений, возникающим при рассмотрении плоских граничных задач теории упругости в прямоугольной области.

Первая система уравнений имеет вид [126, с. 77]

$$\begin{aligned} x_{1,k} - 4\mu_1^3 \frac{\cosh^2(\mu_1\beta_k)}{\Delta(\mu_1\beta_k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_k^3}{(\beta_n^2 + \mu_1^2\beta_k^2)^2} x_{2,n} &= b_{1,k}, \\ x_{2,k} - 4\mu_2^3 \frac{\cosh^2(\mu_2\beta_k)}{\Delta(\mu_2\beta_k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_k^3}{(\beta_n^2 + \mu_2^2\beta_k^2)^2} x_{1,n} &= b_{2,k}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

где функция  $\Delta(t) = \sinh t \cosh t + t$ , последовательность  $\beta_k = \pi(k - 1/2)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , а  $\mu_1, \mu_2$  – фиксированные положительные числа, связанные соотношением  $\mu_1\mu_2 = 1$ . Система уравнений (2.65) приводится к виду (2.36) с функциями

$$\phi_j(t) = \frac{4\mu_j^3 t^3}{\pi(1 + \mu_j^2 t^2)}, \quad j = 1, 2, \quad (2.66)$$

последовательностью  $t_k = k - 1/2$  и коэффициентами

$$q_{kn}^{(j)} = \left\{ \frac{\cosh^2(\mu_j\beta_k)}{\Delta(\mu_j\beta_k)} - 1 \right\} \cdot \frac{4\mu_j^3 \beta_k^3}{(\beta_n^2 + \mu_j^2 \beta_k^2)^2}.$$

При этом, нетрудно удостовериться, что оценки (2.3) для функций  $\phi(\lambda)$  выполняются с показателями  $\nu_1 = 1, \nu_2 = 1$  и произвольным числом  $d > 0$ , а оценки (2.37) справедливы для  $\nu_4 = 3$  и любого значения  $\nu_3 > 0$  (так как функция  $|\cosh^2 t / \Delta(t) - 1|$  убывает экспоненциальным образом при стремлении  $t$  к  $\infty$ ).

Согласно равенству [256, с. 256]

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\gamma+2}}{(t^2+1)^2} dt = \frac{\pi(\gamma+1)}{4 \cos(\pi\gamma/2)}, \quad \operatorname{Re} \gamma \in (-3, 1), \quad (2.67)$$

имеем следующие выражения для функций из (2.45), (2.46):

$$\Phi_j(\gamma) = \frac{\gamma+1}{\mu_j \cos(\pi\gamma/2)}, \quad D(\gamma) = 1 - \frac{(\gamma+1)^2}{\cos^2(\pi\gamma/2)}. \quad (2.68)$$

Кроме того, равенства [207, с. 689]

$$1 - \frac{\cosh^2 \mu_j \beta_k}{\Delta(\mu_j \beta_k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\mu_j^3 \beta_k^3}{(\beta_n^2 + \mu_j^2 \beta_k^2)^2} = \frac{2\mu_j \beta_k}{\Delta(\mu_j \beta_k)}, \quad j = 1, 2, \quad (2.69)$$

показывают, что система уравнений (2.65) является регулярной. При этом последовательности  $\beta_k/\Delta(\mu_j \beta_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  из правой части равенства (2.69) имеют экспоненциальный характер убывания при  $k \rightarrow \infty$ . Это обстоятельство не позволяет непосредственно применить результаты работ [143], [126, гл. 1, § 2] для исследования вопроса о разрешимости системы уравнений (2.65) в пространстве ограниченных последовательностей  $l_{\infty}^2$  при правых частях  $b \in E$ .

**Теорема 4.** Пусть вектор  $b \in l_p^2$ ,  $p \in [1, \infty)$ . Тогда система уравнений (2.65) имеет единственное решение  $x \in l_{\infty}^2$ . Для этого решения справедлива асимптотическая формула (2.50) с произвольным  $\alpha \in (0, p^{-1})$  и постоянными

$$a_1 = a_2 = \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(\mu_j \beta_k) b_{j,k}}{\beta_k \cosh^2(\mu_j \beta_k)}. \quad (2.70)$$

*Доказательство.* Для доказательства покажем, что выполнены все условия теоремы 3. Функция  $D(\gamma)$  из формулы (2.68) при  $\operatorname{Re} \gamma \in (-3, -1)$  имеет лишь один простой корень  $\gamma = 0$  (см. [134, 414]). Далее, так как  $D(\gamma)$  является аналитической при  $\operatorname{Re} \gamma \in (-3, 0)$  функцией и не имеет там корней, а на прямой  $\operatorname{Re} \gamma = -1$  принимает лишь вещественные значения, то значит, индекс  $\kappa_{\sigma} = \kappa_{-1} = 0$ , для любого  $\sigma \in (-3, 0)$ .

Таким образом, выполнены все условия теоремы 3, согласно которой получаем утверждения доказываемой теоремы, за исключением равенств (2.70). Равенство (2.70) выводится из формулы (2.64), исходя из того, что в рассматриваемом случае вектор  $y \in E^*$  из утверждения леммы 3 можно найти в явном виде. Действительно, на основании равенства [207, с. 690]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)^2}{[(2k+1)^2 + t^2]^2} = \frac{\pi}{16} \left\{ \frac{2 \tanh(\pi t/2)}{t} + \frac{\pi}{\cosh^2(\pi t/2)} \right\}, \quad t > 0,$$

получаем, что вектор

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad y_{j,k} = \frac{\Delta(\mu_j \beta_k)}{\beta_k \cosh^2(\mu_j \beta_k)}, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

принадлежит пространству  $E^*$  и является решением однородной системы уравнений, союзной к (2.65). При этом вектор  $q^0$  (см. (2.62), (2.69)) имеет компоненты

$$q_{j,k}^0 = \frac{2\mu_j \beta_k}{\Delta(\mu_j \beta_k)}, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда, учитывая равенство (см. [207, с. 723] и [305, с. 116])

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_j}{\cosh^2(\mu_j \beta_k)} = \frac{1}{\pi}, \quad \mu_1 \mu_2 = 1, \quad \mu_j > 0,$$

на основании (2.64) получаем выражения (2.70) для постоянных  $a_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Теорема доказана.

В случае задачи о прогибе тонкой прямоугольной пластинки, защемленной по краям и находящейся под воздействием равномерно распределенной нагрузки, правая часть в системе уравнений (2.65) имеет вид [126, с. 74–82]

$$b_{j,k} = (-1)^j \frac{4 \cosh^2(\mu_j \beta_k)}{\beta_k \Delta(\mu_j \beta_k)}, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.71)$$

Тогда по теореме 4 получаем, что для вектора  $b \in E$  из (2.71) существует единственное ограниченное решение системы (2.65), при этом справедлива оценка (см. (2.70))

$$x_{j,k} = O(k^{-\alpha}), \quad k \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, \quad \forall \alpha \in (0, 1). \quad (2.72)$$

Отметим, что оценка (2.72) может быть уточнена. Действительно, для вектора  $b$  из (2.71) функции  $F_j(\gamma) = (M_j b)(\gamma)$  имеют вид

$$F_j(\gamma) = (-1)^j \frac{4(\gamma + 1)}{\pi \mu_j^2 \cos(\pi\gamma/2)} \times \\ \times \left\{ \zeta(2 - \gamma, 1/2) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\cosh^2(\mu_j^{-1} \beta_k)}{\Delta(\mu_j^{-1} \beta_k)} - 1 \right] (k - 1/2)^{\gamma-2} \right\}, \quad (2.73)$$

и, следовательно, функция  $F_j(\gamma) \cos(\pi\gamma/2)$  является мероморфной во всей комплексной плоскости с единственным простым полюсом в точке  $\gamma = 1$  и вычетов

$$\operatorname{Res}_{\gamma=1} F_j(\gamma) \cos(\pi\gamma/2) = -(-1)^j \frac{8}{\pi \mu_j}, \quad j = 1, 2.$$

Тогда из (2.47), с учетом (2.45) и (2.71) (см. доказательство следствия 1), имеем соотношение

$$x_{j,k} = b_{j,k} + (-1)^j \frac{4}{\beta_k} + O(k^{-\alpha_1}) = O(k^{-\alpha_1}), \quad k \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2,$$

где  $\alpha_1 > 1 > -$  действительная часть первого по возрастанию действительных частей корня функции  $D(\gamma)$  из (2.68) в полуплоскости  $\text{Re } \gamma > 0$ . Наличие явных формул (2.68), (2.73) позволяет получить полное асимптотическое разложение при  $k \rightarrow \infty$  для решения

$$x = (\{x_{1,k}\}_{k=1}^{\infty}, \{x_{2,k}\}_{k=1}^{\infty}) \in l_{\infty}^2$$

системы уравнений (2.65) с правой частью (2.71). Это разложение естественным образом связано с корнями функции  $D(\gamma)$  в полуплоскости  $\text{Re } \gamma > 0$ .

Рассмотрим систему уравнений [92, гл. 7, § 4]

$$\begin{aligned} x_{1,k} - 4\mu_1^3 \frac{\sinh^2(\mu_1 \alpha_k)}{\Delta(\mu_1 \alpha_k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^3}{(\alpha_n^2 + \mu_1^2 \alpha_k^2)^2} x_{2,n} &= b_{1,k}, \\ x_{2,k} - 4\mu_2^3 \frac{\sinh^2(\mu_2 \alpha_k)}{\Delta(\mu_2 \alpha_k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_k^3}{(\alpha_n^2 + \mu_2^2 \alpha_k^2)^2} x_{1,n} &= b_{2,k}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

где функция  $\Delta = \sinh t \cosh t + t$  и последовательность  $\alpha_k = \pi k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Эта система, как и (2.65), может быть представлена в виде (2.36) (см. (2.66)) с последовательностью  $t_k = k$  и является регулярной, а именно, справедливы равенства [207, с. 688]

$$1 - \frac{\sinh^2 \mu_j \alpha_k}{\Delta(\mu_j \alpha_k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\mu_j^3 \alpha_k^3}{(\alpha_n^2 + \mu_j^2 \alpha_k^2)^2} = \frac{2 \sinh^2(\mu_j \alpha_k)}{\mu_j \alpha_k \Delta(\mu_j \alpha_k)}, \quad \alpha_k = \pi k. \quad (2.75)$$

Аналогично теореме 4 доказывается следующая теорема.

**Теорема 5.** Пусть  $b \in l_p^2$ ,  $p \in [1, \infty)$ . Тогда система уравнений (2.65) имеет единственное решение  $x \in l_{\infty}^2$ . Для этого решения справедлива асимптотическая формула (2.50) с произвольным  $\alpha \in (0, p^{-1})$  и некоторыми постоянными  $a_1 = a_2$ .

Отметим, что теория регулярных систем алгебраических уравнений гарантирует, на основании (2.75), существование в  $l_{\infty}^2$  решения системы (2.74) при выполнении условия  $|b_{j,k}| \leq ck^{-1}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Теорема 5 дает утверждение о единственности решения в  $l_{\infty}^2$  системы (2.74 и обеспечивает существование решения  $x \in l_{\infty}^2$  при условии на правую часть  $|b_{j,k}| \leq ck^{-\epsilon}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , для некоторого (произвольного)  $\epsilon > 0$ .

### 2.3 Закон асимптотических выражений в абстрактной формулировке

**2.3.1** Пусть  $Z$  – полуупорядоченное  $K_\sigma$ -пространство с классом положительных элементов  $Z_+$  (используем терминологию и обозначения из [47]). Для каждого  $z \in Z_+$  обозначим через  $Z_z$  подпространство тех элементов  $x \in Z$ , для которых выполняется неравенство  $|x| \leq \alpha z$  при некоторой постоянной  $\alpha > 0$ , зависящей от  $x$ .

Пусть  $A$  – положительный ( $o$ )-линейный оператор в  $Z$ . Предположим, что для некоторых элементов  $z \in Z_+$ ,  $w \in Z_+$  справедливо равенство

$$z - Az = w. \quad (2.76)$$

Тогда, согласно классическим результатам Л. В. Канторовича (см. [47, гл. 12]) для любого  $v \in Z_w$  существует решение  $x \in Z_z$  уравнения

$$x - Ax = v, \quad (2.77)$$

которое может быть получено по методу последовательных приближений (относительно ( $o$ )-сходимости в  $Z$ ) при начальном элементе  $x_0 = 0$ :

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} A^k v. \quad (2.78)$$

Далее такие решения будем называть главными. При этом, если выполнено условие  $|v| \leq \alpha w$ , то  $|x| \leq \alpha z$ , а если  $v \in Z_+$ , то тогда и  $x \in Z_+$ .

Приведенные утверждения Л. В. Канторовича обобщают на функциональные уравнения в  $K_\sigma$ -пространствах результаты Б. М. Кояловича [143], относящиеся к разрешимости и методу последовательных приближений для бесконечных регулярных алгебраических систем линейных уравнений. В работе [143] при определенных условиях также установлено существование предела  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$  для ограниченного решения алгебраической системы уравнений. Этот результат Б. М. Кояловича, названный им законом асимптотических выражений, не нашел своего отражения в рамках теории функциональных уравнений в  $K_\sigma$ -пространствах. В данном параграфе на основании анализа методики [143] устанавливается закон асимптотических выражений в абстрактной формулировке (теорема 1). Попутно исправлены некоторые неточности в формулировках и доказательстве из [143], отмеченные в [151].

Отметим, что результаты [143] нашли важное применение и дальнейшее развитие в [87] при рассмотрении различных граничных задач линейной теории упругости.

**2.3.2** Пусть  $Z_k \subset Z_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  – некоторая последовательность главных элементов пространства  $Z$ . Обозначим через  $P_k$  оператор проектирования  $Z$  на  $Z_k$ , а через  $Q_k$  – оператор проектирования на дизъюнктное дополнение к  $Z_k$ . Положим  $P_{k,n} = P_k - P_n$ ,  $n > k$  и введем в рассмотрение подпространство

$$Z_0 = \{y \in Z : \exists k, \text{ что } Q_k y = 0\}.$$

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия:

1) существуют такие постоянные  $a > 0$ ,  $b > 0$  и положительный функционал  $f$ , заданный на  $Z_0$ , что для любого  $g \in Z_+ \cap Z_z$  выполняются неравенства

$$a f(P_k g) Q_k w \leq Q_k A P_k g \leq b f(P_k g) Q_k w, \quad k = 1, 2, \dots,$$

причем  $f(P_k z) \rightarrow \infty$ ,  $k \rightarrow \infty$ ;

2) положительный элемент  $w \in Z_+$  является единицей в  $Z$ .

Тогда, если  $z$  – главное решение уравнения (2.76), а  $x$  – главное решение уравнения (2.77) с правой частью  $v \in Z_w$ ,  $|v| \leq \alpha w$ , то найдется постоянная  $c$ ,  $|c| \leq \alpha$ , что  $\forall \epsilon > 0$  существует такое  $n$ , что

$$|Q_n(x - cz)| \leq \epsilon Q_n z. \quad (2.79)$$

Доказательство теоремы разобьем на ряд лемм (леммы 1–4). Отметим, что согласно условию 2) в пространстве  $Z$  предполагается существование единицы.

**Лемма 1.** Для вещественного  $\beta$  и натурального  $n$  положим элемент

$$g_n(\beta) = Q_n(AP_n(\beta z - x) + \beta w - v). \quad (2.80)$$

Тогда, если  $g_n(\beta) \in Z_+$ , то  $\beta Q_n z \geq Q_n x$ , а если  $-g_n(\beta) \in Z_+$ , то тогда  $\beta Q_n z \leq Q_n x$ .

*Доказательство.* Из (2.76), (2.77) имеем

$$\beta z - x = A(\beta z - x) + \beta w - v.$$

Тогда, вводя в рассмотрение элемент  $y_n = Q_n(\beta z - x)$ , получим

$$y_n = A_n y_n + g_n, \quad (2.81)$$

где  $g_n = g_n(\beta)$  определен согласно (2.80), а  $A_n = Q_n A$  – положительный (о)-линейный оператор в  $Z$ , для которого оператор  $A$  является модулярной мажорантой:

$$|A_n y| \leq |A y|, \quad y \in Z.$$

Кроме того, в силу условия 1) теоремы и неравенств

$$|v| \leq \alpha w, \quad |x| \leq \alpha z, \quad (2.82)$$

получаем, что

$$\begin{aligned} |g_n| &\leq |Q_n A P_n(\beta z - x)| + |Q_n(\beta w - v)| \leq \\ &\leq (|\beta| + \alpha) Q_n(AP_n z + w) \leq (|\beta| + \alpha)(bf(P_n z) + 1)w, \\ |y_n| &= |Q_n(\beta z - x)| \leq (|\beta| + \alpha)z. \end{aligned}$$

Тогда по теореме 12.3.2 из [47] заключаем, что  $y_n$  является главным решением уравнения (2.81). Значит, если  $g_n \in Z_+$ , то тогда  $y_n \in Z_+$ , т. е.  $\beta Q_n z \geq Q_n x$ , а включение  $-g_n \in Z_+$  влечет включение  $-y_n \in Z_+$ .

Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть  $\beta_n$  – наименьшая из постоянных, для которой  $g_n(\beta) \in Z_+$ . Тогда существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta_0, \quad |\beta_0| \leq \alpha. \quad (2.83)$$

*Доказательство.* Отметим, что существование наименьшей постоянной  $\beta_n$  следует из принципа Архимеда, который выполнен в любом  $K_\sigma$ -пространстве [47, с. 94], условия 2) теоремы 1 и неравенств (2.82), откуда также следует, что  $|\beta_n| \leq \alpha$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . При этом, так как  $Q_n Q_k = Q_n$ ,  $n \geq k$ , то

$$\beta_k Q_n(w + A P_k z) \geq Q_n(v + A P_k x), \quad n \geq k,$$

и по лемме 1, с учетом  $\beta_k P_{k,n} z \geq P_{k,n} x$ , получаем при  $n \geq k$ :

$$\begin{aligned} \beta_k Q_n(w + A P_n z) &= \beta_k Q_n(w + A P_k z) + \beta_k Q_n A P_{k,n} z \geq \\ &\geq Q_n(v + A P_k x) + Q_n A P_{k,n} x = Q_n(v + A P_n x), \end{aligned}$$

т. е.  $\beta_k \geq \beta_n$ . Из невозрастания последовательности чисел  $\beta_n$  и оценки  $|\beta_n| \leq \alpha$  следует утверждение (2.83).

Лемма доказана.

**Лемма 3.** Если для некоторого элемента  $y \in Z_+ \cap Z_z$  выполнено условие

$$Q_n(A P_n y - w - A P_n z) \notin Z_+,$$

то тогда

$$(b/a)^2 Q_n(w + a P_n z) - Q_n A P_n y \in Z_+.$$

*Доказательство.* Пусть

$$u = Q_n(AP_n - w - A P_n z)$$

и  $u = u_+ - u_-$  – разложение элемента  $u$  на его положительную и отрицательную части [47, с. 65], а  $P$  – оператор проектирования на главную компоненту,

порожденную элементом  $u_-$ . Тогда, в силу условия леммы, имеем

$$P Q_n A P_n y < P Q_n (w + A P_n z).$$

При этом  $P Q_n = P$  и по условию 1) теоремы 1 получаем

$$a f(P_n y) P w \leq P A P_n y < [1 + b f(P_n z)] P w.$$

Так как  $w$  – единица в  $Z$ , то  $P w > 0$  и из предыдущего неравенства следует неравенство

$$f(P_n y) < a^{-1}(1 + b f(P_n z)).$$

Тогда, снова используя условие 1), получаем

$$\begin{aligned} Q_n A P_n y &\leq b f(P_n y) Q_n w < (b/a) [1 + b f(P_n z)] Q_n w \leq \\ &\leq (b/a) Q_n [w + (b/a) A P_n z] \leq (b/a)^2 Q_n (w + A P_n z). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

**Лемма 4.** Для любого числа  $\epsilon > 0$  существует такой номер  $n$ , что

$$g_n(\beta_0 + \epsilon) \in Z_+, \quad -g_n(\beta_0 - \epsilon) \in Z_+,$$

т. е.

$$(\beta_0 - \epsilon) Q_n (w + A P_n z) \leq Q_n (v + A P_n x) \leq (\beta_0 + \epsilon) Q_n (w + A P_n z).$$

*Доказательство.* Справедливость включения  $g_n(\beta_0 + \epsilon) \in Z_+$  при достаточно больших  $n$  следует из леммы 2 и определения чисел  $\beta_n$ . Докажем, что и  $-g_n(\beta_0 - \epsilon) \in Z_+$  при достаточно больших номерах  $n$ . Пусть  $n$  фиксировано, тогда для любого вещественного  $\gamma > 0$ , согласно определению  $\beta_n$ , имеем

$$(\beta_n - \gamma) Q_n (w + A P_n z) - Q_n (v + A P_n x) \notin Z_+. \quad (2.84)$$

Так как для любого  $k$ ,  $k < n$ :

$$\begin{aligned} Q_n (v + A P_n x) &= Q_n (v + A P_k x) + \beta_k Q_n A P_{k,n} z + Q_n A P_{k,n} (x - \beta_k z) \leq \\ &\leq \beta_k Q_n (w + A P_n z) + Q_n a P_{k,n} (x - \beta_k z), \end{aligned}$$

то из (2.84) следует, что

$$Q_n A P_{k,n} (\beta_k z - x) - (\beta_k - \beta_n + \gamma) Q_n (w + A P_n z) \notin Z_+.$$

Тогда по лемме 3 получаем

$$(b/a)^2 (\beta_k - \beta_n + \gamma) Q_n (w + A P_n z) \geq Q_n A P_{k,n} (\beta_k z - x). \quad (2.85)$$



Поскольку число  $\gamma > 0$  является любым, то в силу принципа Архимеда неравенство (2.85) справедливо и при  $\gamma = 0$ . Тогда из (2.76) при  $\gamma = 0$ , с учетом (2.82) и условия 1) имеем для любого числа  $\delta > 0$ :

$$Q_n(v + A P_n x) \geq -\alpha Q_n(w + A P_k z) + \delta(af(P_n z) - bf(P_k z)) Q_n w + \\ + (\beta_k - \delta) Q_n A P_{k,n} z + (b/a)^2(\beta_n - \beta_k) Q_n(w + A P_n z). \quad (2.86)$$

Теперь, по данному  $\epsilon > 0$  положим  $\delta = \epsilon/2$  и выберем номер  $N$  таким образом, чтобы (см. лемму 2)

$$(a/a)^2|\beta_k - \beta_n| \leq \delta, \quad \forall k, n \geq N,$$

и  $bf(P_k z) \geq 1$ , для всех  $k \geq N$  (условие 1)). Затем зафиксируем некоторое  $k \geq N$  и выберем  $n > k$  таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\delta af(P_k z) \geq b(2\beta_0 + 2\alpha + \delta) f(P_k z),$$

что возможно в силу условия 1). Тогда из (2.86), с учетом неравенства  $\beta_k \geq \beta_0$ , следует, что

$$Q_n(v + A P_n x) \geq -\alpha Q_n(w + A P_k z) - \delta Q_n(w + A P_n z) + \\ + 2bf(P_k z)(\beta_0 + \alpha) Q_n w + (\beta_k - \delta) Q_n A P_{k,n} z \geq \\ \geq -\delta Q_n(w + A P_n z) + \beta_0 Q_n w + \beta_0 Q_n A P_{k,n} z + (\beta_k - \delta) Q_n A P_{k,n} z \geq \\ \geq \beta_0 Q_n(w + A P_n z) - \delta Q_n(w + A P_n z + A P_{k,n} z) \geq (\beta_0 - \epsilon) Q_n(w + A P_n z).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Утверждение теоремы очевидным образом следует из лемм 1 и 4, причем постоянная  $c$  равна постоянной  $\beta_0$  из утверждения леммы 2.

**2.3.3** В этом пункте приведем приложение теоремы 1 к интегральному уравнению, рассматриваемому в пространстве  $L_\infty$ .

Пусть  $(\mathcal{G}, \Sigma, \mu)$  – пространство с полной  $\sigma$ -конечной мерой  $\mu$ :

$$\mathcal{G} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_k, \quad \mathcal{G}_k \subset \mathcal{G}_{k+1}, \quad \mu(\mathcal{G}_k) < \infty, \quad \mu(\mathcal{G}) = \infty.$$

В вещественном функциональном  $K$ -пространстве  $L_\infty = L_\infty(\mathcal{G}, \Sigma, \mu)$  [125, с. 376] рассматривается интегральный оператор  $A$ :

$$(Az)(s) = \int_{\mathcal{G}} A(s, t) z(t) d\mu(t),$$

где  $A(s, t)$  – неотрицательная  $\nu = \mu \times \mu$ -измеримая функция на  $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ , причем предполагается, что  $Az \in L_\infty$  для любой функции  $z \in L_\infty$ .

**Теорема 2.** Пусть для некоторых функций  $z(s)$ ,  $w(s)$  из  $L_\infty$ , таких что  $z(s) > 0$ ,  $w(s) > 0$  для  $\mu$ -почти всех  $s \in \Sigma$ , выполняется соотношение (2.76). Предположим, что найдутся такие постоянные  $a > 0$ ,  $b > 0$ , что

$$aw(s) \leq \mathcal{A}(s, t) \leq bw(s), \quad \nu - \text{п. в. } (s, t) \in (\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_k) \times \mathcal{G}_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и пусть

$$\int_{\mathcal{G}} z(t) d\mu(t) = \infty.$$

Тогда, если  $x = x(s) \in L_\infty$  – главное решение уравнения (2.77), с правой частью

$$v = v(s) \in L_\infty, \quad |v(s)| \leq \alpha w(s), \quad \mu - \text{п. в.},$$

то найдется такая постоянная  $a_0$  с оценкой  $|a_0| \leq \alpha$ , что справедливо неравенство

$$\text{vrai} \sup_{s \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_k} \left| \frac{x(s)}{z(s)} - a_0 \right| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.87)$$

*Доказательство.* Для применения теоремы 1 в качестве компонент  $Z_k$  в  $K$ -пространстве  $Z = L_\infty$  возьмем компоненты, порожденные характеристическими функциями  $\mu$ -измеримых множеств  $\mathcal{G}_k$ . Тогда пространство

$$Z_0 = \{y(t) \in L_\infty : \exists k, \text{ что } y(t) = 0, \mu - \text{п. в. } t \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_k\}$$

и условие 1) теоремы 1 будет выполняться с функционалом

$$f(y) = \int_{\mathcal{G}} y(s) d\mu(s).$$

При этом условие  $w(s) > 0$ ,  $\mu$  – п. в. обеспечивает выполнение условия 2) теоремы 1 [47, с. 84].

Таким образом, по теореме 1 существует такая постоянная  $a_0$  с оценкой  $|a_0| \leq \alpha$ , что для любого  $\epsilon > 0$  найдется номер  $n$ , для которого

$$|x(s) - a_0 z(s)| \leq \epsilon z(s), \quad \mu - \text{п. в. } s \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_n,$$

откуда, так как  $z(s) > 0$  для  $\mu$  – п. в.  $s \in \mathcal{G}$ , следует утверждение (2.87).

Теорема доказана.

Приведем пример на использование теоремы 2. В [92, гл. 8, § 1] рассмотрена следующая система интегроалгебраических уравнений относительно вещественных неизвестных  $y_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и  $x(s)$  ( $s \geq 0$ ):

$$y_n = \frac{4\alpha_n^3}{\pi} \int_0^\infty \frac{x(s)}{(s^2 + \alpha_n^2)^2} ds + f_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$x(s) = \frac{4s^3 \sinh^2 s}{\Delta(s)} \sum_{n=1}^\infty \frac{y_n}{(s^2 + \alpha_n^2)^2} + g(s), \quad s \geq 0, \quad (2.88)$$

где использованы обозначения  $\alpha = \pi n$  и  $\Delta(s) = \sinh s \cos s + s$ . При этом, на физическом уровне строгости было получено утверждение, что при выполнении условий

$$|f_n| \leq \frac{c}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad g(s) \equiv 0$$

существует ограниченное решение системы (2.88), для которого справедливы предельные соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{s \rightarrow \infty} x(s) = a \quad (2.89)$$

для некоторой постоянной  $a$ . Исходя из теоремы 2 можно получить следующий строго обоснованный результат.

**Теорема 3.** Пусть  $g$  – измеримая на полуоси  $s > 0$  вещественная функция, удовлетворяющая оценке

$$|g(s)| \leq \frac{c}{s+1} \quad \text{для почти всех } s > 0.$$

Предположим, что

$$f_n = \frac{f_0}{n} + o(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда система уравнений (2.88) имеет единственное ограниченное решение  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, x(s)$  ( $s \geq 0$ ). При этом существует такая постоянная  $a$ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \quad \lim_{s_0 \rightarrow \infty} \operatorname{vrai\,sup}_{s \geq s_0} |x(s) - a| = 0.$$

В частности, если  $g$  является непрерывной при  $s > 0$  функцией, то функция  $x(s)$  также является непрерывной и справедливы соотношения (2.89).

*Доказательство.* Пусть  $T = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{N}$  (теоретико-множественное объединение), где  $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ , а  $\mathbb{N}$  – множество натуральных чисел. Мету  $\mu$  на  $T$  определим как мету, которая совпадает на  $\mathbb{R}_+$  с мерой Лебега, а на  $\mathbb{N}$  является дискретной мерой, причем  $\mu(n) = 1$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ .

При этом систему уравнений (2.88) можно записать в виде интегрального уравнения (2.77) с ядром

$$\mathcal{A}(s, \tau) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \frac{(\pi s)^3}{[t^2 + (\pi s)^2]^2}, & (\tau, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}, \\ \frac{4s^3}{[s^2 + (\pi\tau)^2]^2} \psi(s), & (\tau, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+, \\ 0, & \text{при остальных } (s, \tau) \in T \times T, \end{cases} \quad (2.90)$$

где введено обозначение

$$\psi(s) = \frac{\sinh^2 s}{\sinh s \cosh s + s}.$$

Пусть  $\alpha \in (0, 1]$  – фиксированное число, положим функцию  $Z(s)$ ,  $s \in T$ :

$$Z(s) = \psi^\alpha(s), \quad s \in \mathbb{R}_+, \quad Z(s) = 1, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что

$$\int_T Z(s) d\mu(s) = \infty,$$

т. е. выполнено условие 3) теоремы 2.

Положим функции

$$w(s) = Z(s) - (AZ)(s),$$

$$w_0(s) = w(s), \quad s \in \mathbb{R}_+, \quad w_n = w(n), \quad n \in \mathbb{N},$$

имеем

$$w_n = 1 - \frac{4\alpha_n^3}{\pi} \int_0^\infty \frac{\psi^\alpha(s)}{(s^2 + \alpha_n^2)^2} ds = \frac{4\alpha_n^3}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \psi^\alpha(s)}{(s^2 + \alpha_n^2)^2} ds,$$

$$w_0(s) = \psi^\alpha(s) - \psi(s) \sum_{n=1}^\infty \frac{4s^3}{(\alpha_n^2 + s^2)^2} = \psi^\alpha(s) + \frac{2}{s} \psi(s) - 1.$$

Для функции  $1 - \psi^\alpha(s)$ ,  $s > 0$ , имеем следующие оценки:

$$1 - \psi^\alpha(s) \geq \alpha(1 - \tanh s) \geq \alpha e^{-2s},$$

$$1 - \psi^\alpha(s) \leq 1 - \psi(s) \leq \frac{s + e^{-s} \sin s}{s + \sinh s \cosh s} \leq \frac{2}{\cosh s} \leq 4e^{-s}.$$

Из этих оценок получаем неравенства

$$\begin{aligned} w_n &\geq \frac{4\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-2\alpha_n t}}{(t^2 + 1)^2} dt \geq \\ &\geq \frac{\alpha}{6\pi} \int_0^\infty e^{-(2n+1)t} dt \geq \frac{\alpha}{24\pi\alpha_n}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$w_n \leq \frac{16}{\pi} \int_0^\infty e^{-\alpha_n t} dt = \frac{16}{\pi\alpha_n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.92)$$

и

$$w_0(s) = \frac{2}{s} + O(e^{-s}), \quad s \rightarrow \infty. \quad (2.93)$$

Кроме того, имеем соотношение

$$w_0(s) = \frac{s^\alpha}{2} + O(1), \quad s \rightarrow 0. \quad (2.94)$$

Покажем, что справедливо неравенство

$$w_0(s) > 0, \quad s > 0. \quad (2.95)$$

В самом деле, так как  $\psi(s) \leq 1$ ,  $\alpha \leq 1$ , то

$$w_0(s) \geq \frac{2}{s} \psi(s) + \psi(s) - 1 \geq \frac{2 \sinh^2 s - s^2 - se^{-s} \sinh s}{s(\sinh s \cosh s + s)},$$

откуда и из неравенств

$$\sinh s > s, \quad e^{-s} < 1, \quad s > 0,$$

вытекает (2.95).

В силу оценок (2.93)–(2.95) найдутся такие постоянные  $\beta_2 > \beta_1 > 0$ , для которых

$$\beta_2 \frac{s^\alpha}{1+s^{1+\alpha}} \geq w_0(s) \geq \beta_1 \frac{s^\alpha}{1+s^{1+\alpha}}, \quad s \geq 0. \quad (2.96)$$

Положим для натурального  $k$  множество

$$T_k = [0, k] \cup \{1, 2, \dots, k\} \subset T,$$

тогда

$$T = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k, \quad \mu(T_k) = 2k < \infty.$$

Для проверки выполнения условия 1) теоремы 2 для этой последовательности множеств  $T_k$ , исходя из (2.93) и (2.90), необходимо показать, что для некоторых постоянных  $L \geq l > 0$  выполняются неравенства

$$\frac{l}{s} \leq \mathcal{A}(s, \tau) \leq \frac{L}{s}, \quad s \geq \tau, \quad s \geq 1.$$

Эти неравенства эквивалентны неравенствам

$$\frac{l}{s} \leq \frac{s^3}{(s^2 + \tau^2)^2} \leq \frac{L}{s}, \quad s \geq \tau, \quad s \geq 1,$$

которые очевидным образом справедливы с постоянными  $l = 1/4$  и  $L = 1$ .

Таким образом, для того, чтобы применить теорему 2 к системе (2.88), осталось проверить, что эта система при  $f_n \equiv 0$ ,  $g(s) \equiv 0$  имеет лишь тривиальное ограниченное решение. Для установления этого факта используем прием из работы [25], посвященной вопросам единственности решений бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Пусть  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $x(s)$  – ограниченное решение одноуровневой системы уравнений (2.88). Тогда из (2.88) следует, что функция  $x(s)/s^2$  является непрерывной при  $s \geq 0$ , причем

$$\frac{x(s)}{s^2} \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty, \quad \frac{y_n}{\alpha_n^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, найдутся такие числа  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $s_0 \in \mathbb{R}_+$ , для которых

$$m := \sup_{n \geq 1} \frac{|y_n|}{\alpha_n^2} = \frac{|y_{n_0}|}{\alpha_{n_0}^2}, \quad M := \sup_{s \geq 0} \frac{|x(s)|}{s^2} = \frac{|x(s_0)|}{s_0^2}.$$

Тогда из системы уравнений (2.88) получаем неравенства

$$0 \leq m \leq \frac{4M\alpha_{n_0}}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^2 ds}{(s + \alpha_{n_0}^2)^2} = M,$$

$$M \leq \frac{4ms_0 \sinh^2 s_0}{(\sinh s_0 \cosh s_0 + s_0)} \sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha_n^2}{(\alpha_n^2 + s_0^2)^2} =$$

$$= \left( 1 - \frac{2s_0}{\sinh s_0 \cosh s_0 + s_0} \right) M,$$

откуда вытекает, что  $M = 0$  и, значит,  $x(s) \equiv 0$ ,  $y_n \equiv 0$ .

Теорема доказана.

## 2.4 Бесконечная система линейных алгебраических уравнений в задаче теории потенциала

**2.4.1** Пусть неограниченная область  $\mathcal{G}$  трехмерного пространства  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$  образована пересечением внешностей двух сфер

$$S_1 = \{y : y_1^2 + y_2^2 + (y_3 - b)^2 = d^2\},$$

$$S_2 = \{y : y_1^2 + y_2^2 + (y_3 + b)^2 = d^2\},$$

$b > d > 0,$

одинакового радиуса  $d$ . Пусть  $(r_j, \theta_j, \phi_j)$ ,  $j = 1, 2$  – сферические координаты, связанные со сферой  $S_j$ :

$$y_1 = r_j \sin \theta_j \cos \phi_j, \quad y_2 = r_j \sin \theta_j \sin \phi_j,$$

$$y_3 = (-1)^{j+1} b + r_j \cos \theta_j, \quad j = 1, 2.$$

В области  $\mathcal{G}$  рассмотрим осесимметричную, нечетную по переменной  $y_3$ , граничную задачу Дирихле для однородного уравнения Лапласа

$$\Delta u(y), \quad y \in \mathcal{G}, \quad u(\infty) = 0, \tag{2.97}$$

$$u|_{r_1=d} = f(\cos \theta_1), \quad u|_{r_2=d} = -f(-\cos \theta_2). \tag{2.98}$$

Такая задача возникает при расчете электростатического поля в пространстве, содержащем два сферических проводника, и может быть решена в явном виде в биполярных координатах (см. [155, § 8.13]). Другой подход к построению решения граничной задачи (2.97), (2.98), основанный на методе суперпозиции,

дает следующее представление для искомого решения:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \left\{ (-1)^n \left( \frac{d}{r_1} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta_1) - \left( \frac{d}{r_2} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta_2) \right\}, \quad (2.99)$$

где  $P_n(\cdot)$  – полиномы Лежандра, а  $x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  – ограниченная последовательность неизвестных коэффициентов. При этом функция  $u$  из (2.99) является гармонической в  $\mathcal{G}$ , стремится к нулю на бесконечности и удовлетворяет условию нечетности по переменной  $y_3$ . Таким образом, для нахождения коэффициентов  $x_n$  достаточно удовлетворить граничному условию из (2.98) на сфере  $S_1$ . Используя формулу переразложения [50]

$$\frac{P_n(\cos \theta_2)}{r_2^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (n+k)!}{n! k!} \cdot \frac{r_1^k P_k(\cos \theta_1)}{(2b)^{n+k+1}},$$

получаем для  $u$  в окрестности сферы  $S_1$  следующее представление:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ x_k \left( \frac{d}{r_1} \right)^{k+1} - \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{(n+k)! r_1^n}{n! k! (2b)^{n+k+1}} \right\} (-1)^k P_k(\cos \theta_1).$$

Тогда, удовлетворение граничному условию на  $S_1$ , вместе с соотношениями ортогональности

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{\delta_{nk}}{n+1/2}, \quad n, k = 0, 1, \dots,$$

приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$x_k - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n! k! \nu^{n+k+1}} x_n = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.100)$$

где

$$f_k = (-1)^k (k+1/2) \times \\ \times \int_0^{\pi} f(\cos \theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \nu = \frac{2b}{d} > 2.$$

В этом параграфе через  $l_{\infty}$  обозначаем банахово пространство ограниченных последовательностей  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  с нормой

$$\|x\|_{\infty} = \sup_{k=0,1,\dots} |x_k|.$$

Кроме того, далее считаем, что все встречающиеся последовательности занумерованы значениями индекса от нуля до бесконечности, а в выражении  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  будем опускать индексы и писать  $\{x_k\}$ .

Равенства

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n! k! \nu^{n+k+1}} = \frac{1}{(\nu-1)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.101)$$

показывают [126, с. 29-38] (см. также [51]), что для любой последовательности  $f = \{f_k\}_{k=0}^{\infty} \in l_{\infty}$  система уравнений (2.100) допускает единственное ограниченное решение  $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \in l_{\infty}$ , причем это решение дается рядом Неймана

$$x_k = \sum_{m=0}^{\infty} x_{m,k}, \quad x_{m+1,k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n! k! \nu^{n+k+1}} x_{m,n}, \quad (2.102)$$

$$x_{0,k} = f_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

и справедливы оценки

$$\|x\|_{\infty} \leq \frac{\nu-1}{\nu-2} \|f\|_{\infty},$$

$$|x_k| \leq |f_k| + \frac{1}{(\nu-1)^k (\nu-2)} \|f\|_{\infty}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.103)$$

Введем в рассмотрение в пространстве  $l_{\infty}$  линейные ограниченные функционалы  $A_k$  и оператор  $A$ :

$$A_k x = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad Ax = y,$$

$$y_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n! k!} \alpha^{n+k+1} x_n, \quad x = \{x_k\}, \quad y = \{y_k\}. \quad (2.104)$$

Для индекса  $j = 0, 1, \dots$  обозначим через  $x(j) = \{x_k(j)\}_{k=0}^{\infty}$  решение системы уравнений (2.100) из пространства  $l_{\infty}$  в случае правой части  $f_k = \delta_{kj}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ :

$$x_k(m) - A_k \{x_n(m)\} = \delta_{km}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Для решения  $x(0) = \{x_k(0)\}$  можно, используя равенства (2.102), записать выражения

$$x_k(0) = \delta_{k0} + (1-\beta^2) \beta^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\beta^{2n})^k \beta^n}{(1-\beta^{2n+2})^{k+1}}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.105)$$

где число

$$\beta = \left( \nu - \sqrt{\nu^2 - 4} \right) / 2 \in (0, 1).$$

В общем случае правой части  $f \in l_{\infty}$  системы уравнений (2.100) формулы (2.102) представляют собой достаточно сложные выражения. Тем не менее, как показано далее, существуют рекуррентные соотношения для решений  $x(j)$  системы уравнений (2.100), так что для нахождения  $x(j)$  при  $j \geq 1$  достаточно знать решение  $x(0)$ , определенное согласно (2.105).



**2.4.2** Введем в рассмотрение дробно-линейное преобразование комплексной плоскости

$$Tz := \frac{1}{\nu - z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отметим, что точки  $\beta$  и

$$\frac{1}{\beta} = \left( \nu + \sqrt{\nu^2 - 4} \right) / 2 \in (1, \infty)$$

являются неподвижными точками преобразования  $T$ :  $T\beta = \beta$ ,  $T\beta^{-1} = \beta^{-1}$ .

Согласно (2.103) справедливы оценки

$$|x_k(j)| \leq \frac{c_j}{(\nu - 1)^k}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

поэтому корректно определены аналитические в круге  $|z| < \nu - 1 \in (1, \infty)$  функции

$$\Phi_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(j) z^n, \quad j = 0, 1, \dots \quad (2.106)$$

**Лемма 1.** Функция  $\Phi_j(z)$  продолжается мероморфным образом в область  $\mathcal{V}_0 = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{\beta^{-1}\}$  расширенной комплексной плоскости  $\bar{\mathbb{C}}$  и удовлетворяет в  $\mathcal{V}_0$  функциональному уравнению

$$\Phi_j(z) = \Phi_j(Tz) Tz + z^j. \quad (2.107)$$

При этом  $\Phi_j(z)$  имеет в  $\mathcal{V}_0$  полюс порядка  $j$  в точке  $z = \infty$  и полюсы порядка  $j + 1$  в точках

$$z_k = \frac{1 - \beta^{2k+2}}{\beta(1 - \beta^{2k})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.108)$$

*Доказательство.* Пусть  $\gamma$  – единичная окружность  $|z| = 1$ , ориентированная против часовой стрелки, тогда из определения (2.106) получаем для  $x_k(j)$  выражения

$$x_k(j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Phi_j(z)}{z^{k+1}} dz, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.109)$$

Подстановка (2.109) в систему уравнений (2.100), с учетом равенств (2.101), приводит к соотношению

$$\Phi_j(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int_{\gamma} \frac{\Phi_j(z) z^k}{(\nu z - 1)^{k+1}} dz + \lambda^j, \quad |\lambda| \leq 1. \quad (2.110)$$

При этом окружность  $\gamma_1 = T\gamma$  лежит внутри  $\gamma$  и, используя теорему Коши о вычетах, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int_{\gamma} \frac{\Phi_j(z) z^k}{(\nu z - 1)^{k+1}} dz = \\ & = \int_{\gamma} \frac{\Phi_j(z)}{(\nu z - \lambda z - 1)} dz = \frac{2\pi i}{\nu - \lambda} \Phi_j \left( \frac{1}{\nu - \lambda} \right), \quad |\lambda| \leq 1. \end{aligned}$$

Отсюда и из равенства (2.110) заключаем, что функция  $\Phi_j(z)$  удовлетворяет соотношению (2.107) при  $|z| \leq 1$ .

Пусть  $G$  – разрывная в области  $\mathcal{V} = \bar{C} \setminus (\{\beta\} \cup \{\beta^{-1}\})$  группа дробно-линейных преобразований, порожденная преобразованием  $T$  (см. [21, с. 76]). При этом область  $\mathcal{F}$ , ограниченная окружностями  $\gamma$  и  $\gamma_1$ :

$$\mathcal{F} = \{z : |z| < 1\} \cap \{z : |(\nu^2 - 1)z - \nu| > 1\},$$

является фундаментальной областью группы преобразований  $G$  (см. [21, с. 84]). Тогда, так как замыкание  $\bar{\mathcal{F}}$  области  $\mathcal{F}$  лежит в круге  $|z| < \nu - 1$ , где функция  $\Phi_j(z)$  является аналитической по своему определению, то продолжение  $\Phi_j(z)$  согласно соотношению (2.107), справедливому при  $|z| \leq 1$ , приводит к соотношению (2.107), справедливому уже при  $z \in \mathcal{V}_0$ . Это показывает, что  $\Phi_j(z)$  является мероморфной функцией в  $\mathcal{V}_0$ . При этом,  $\Phi_j(z)$  имеет полюс порядка  $j$  в точке  $z = \infty$  и полюсы порядка  $j + 1$  в точках  $z_k = T^{-k}\infty$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , для которых, с учетом равенства

$$T^{-1}z = \nu - z^{-1},$$

нетрудно получить выражения (2.108).

Лемма доказана.

Пусть функция

$$R(z) = (z - \beta)(z - 1/\beta) \equiv z^2 - \nu z + 1.$$

По последовательности функций  $\Phi_j(z)$ ,  $j = 0, 1, \dots$  введем в рассмотрение функции

$$N_m(z) = \Phi_m(z) + \frac{1}{z} \sum_{j=0}^m (-1)^j C_m^j \nu^{m-j} \Phi_j(z^{-1}),$$

$$K_m(z) = zN_m(z) + R(z)N'_m(z), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (2.111)$$

где биномиальные коэффициенты  $C_m^j = m!/[j!(m-j)!]$ . Из леммы 1 вытекает, что  $N_m(z)$ ,  $K_m(z)$  являются мероморфными функциями в области  $\mathcal{V}_0$  с полюсами в точках  $z = 0, \infty$  и  $z_k^{\pm 1} \notin \bar{\mathcal{F}}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

**Лемма 2.** Справедливы соотношения

$$N_m(z) = N_m(Tz)Tz, \quad K_m(z) = K_m(Tz)Tz, \quad z \in \mathcal{V}. \quad (2.112)$$

*Доказательство.* Используя (2.107) и соотношение  $T((Tz)^{-1}) = z^{-1}$ , имеем

$$\Phi_j((Tz)^{-1}) = \Phi_j(T(Tz)^{-1}) T(Tz)^{-1} + (Tz)^{-j} = z^{-1} \Phi_j(z^{-1}) + (\nu - z)^j,$$

тогда, учитывая равенства

$$\Phi_j(Tz) Tz = \Phi_j(z) - z^j, \quad \sum_{j=0}^m (-1)^j C_m^j \nu^{m-j} (\nu - z)^j = z^m,$$

получаем

$$\begin{aligned} N_m(Tz) Tz &= \\ &= \Phi_m(z) - z^m + \sum_{j=0}^m (-1)^j C_m^j \nu^{m-j} [z^{-1} \Phi_j(z^{-1}) + (\nu - z)^j] = N_m(z), \end{aligned}$$

т. е. первое из соотношений (2.112). Из этого соотношения и следующего из него после дифференцирования равенства

$$N'_m(z) = (Tz)^2 [N_m(Tz) + N'_m(Tz) Tz]$$

имеем следующее выражение для  $K_m(z)$ :

$$\begin{aligned} K_m(z) &= z N_m(Tz) Tz + R(z) (Tz)^2 (N_m(Tz) + N'_m(Tz) Tz) = \\ &= [z + R(z) Tz] N_m(Tz) + R(z) (Tz)^3 N'_m(Tz), \end{aligned}$$

откуда и из легко проверяемых равенств

$$z + R(z) Tz = Tz, \quad R(Tz) = R(z) (Tz)^2, \quad z \in \mathbb{C},$$

получаем второе из соотношений (2.112). Лемма доказана.

Для дальнейшего получения рекуррентных формул, связывающих между собой решения  $x(j)$ , важное значение, наряду с леммами 1, 2, имеет следующее простое утверждение.

**Предложение 1.** Пусть мероморфная в области  $\mathcal{V}$  функция  $M(z)$  удовлетворяет соотношению

$$M(z) = M(Tz) Tz. \quad (2.113)$$

Предположим, что  $M(z)$  не имеет полюсов при  $z \in \bar{\mathcal{F}} \setminus \{0\}$  и справедлива оценка на бесконечности

$$M(z) = O(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.114)$$

Тогда  $M(z) \equiv 0$ .

*Доказательство.* Из соотношения (2.113) при  $z \rightarrow 0$ , оценки (2.114) и включения  $0 \in \mathcal{V}$  следует, что функция  $M(z)$  не имеет особенности в точке  $z = 0$ .

Далее, мероморфная в  $\mathcal{V}$  функция

$$S(z) = R(z)M^2(z), \quad (2.115)$$

согласно (2.113) и соотношению  $R(Tz) = R(z)(Tz)^2$ , удовлетворяет соотношению

$$S(z) = S(Tz), \quad z \in \mathcal{V}.$$

Таким образом, функция  $S(z)$  является автоморфной функцией относительно группы преобразований  $G$  и не имеет полюсов при  $z \in \bar{\mathcal{F}}$ . Отсюда заключаем (см. [110, с. 388]), что  $S(z) \equiv \text{const}$ , что вместе с (2.115) дает равенство  $S(z) \equiv 0$ . Значит, и функция  $M(z)$  тождественно равна нулю.

Предложение доказано.

**Теорема 1.** Справедливы равенства

$$mN_m(z) = K_{m-1}(z) + \nu(m-1)N_{m-1}(z) - (m-1)N_{m-2}(z), \quad z \in \mathcal{V},$$

где индекс  $m = 1, 2, \dots$  и принято соглашение, что  $N_{-1}(z) \equiv 0$ .

*Доказательство.* При фиксированном  $m$  введем в рассмотрение функцию

$$M(z) = mN_m(z) - K_{m-1}(z) - \nu(m-1)N_{m-1}(z) + (m-1)N_{m-2}(z).$$

Для доказательства теоремы следует установить, что  $M(z) \equiv 0$ .

Прежде всего, из лемм 1 и 2 следует, что  $M(z)$  мероморфна в области  $\mathcal{V}$ , не имеет полюсов при  $z \in \bar{\mathcal{F}} \setminus \{0\}$  и удовлетворяет функциональному соотношению (2.113). Далее, из уравнения (2.107) имеем при  $n = 0, 1, \dots$ :

$$\frac{d^n}{dz^n} \left( \Phi_j(z) - z^j + \frac{\Phi_j(0)}{z} \right) = O(z^{-(n+2)}), \quad z \rightarrow \infty,$$

поэтому, согласно определению (2.111), получаем

$$\frac{d^n}{dz^n} \left( N_m(z) - z^m - \frac{c_m}{z} \right) = O(z^{-(n+2)}), \quad z \rightarrow \infty, \quad (2.116)$$

где  $n = 0, 1, \dots$  и постоянная

$$c_m = -\Phi_m(0) + \sum_{j=0}^m (-1)^j c_m^j \nu^{m-j} \Phi_j(0).$$

Из (2.116) и (2.111) заключаем, что функция  $K_m(z)$  имеет на бесконечности асимптотику

$$\begin{aligned} K_m(z) &= z[z^m + c_m z^{-1} + O(z^{-2})] + \\ &+ (z^2 - \nu z + 1)[mz^{m-1} - c_m z^{-2} + O(z^{-3})] = \\ &= (m+1)z^{m+1} - \nu m z^m + m z^{m-1} + O(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Тогда на основании асимптотических равенств (2.116), (2.117) получаем, что для функции  $M(z)$  выполняется условие (2.114) и, значит, что по предложению 1 функция  $M(z) \equiv 0$ .

Теорема доказана.

Теорема 1 позволяет рекуррентным образом определить через функцию  $N_0(z)$  и ее производные все остальные функции  $N_m(z)$  при  $m = 1, 2, \dots$ . Это обстоятельство, в свою очередь, дает возможность утверждать, что для нахождения решения  $x(j)$  системы (2.100) с индексом  $j \geq 1$  достаточно определить решение  $x(0)$ . А именно, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Решения  $x(j)$  системы уравнений (2.100) связаны между собой следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} m x_k(m) = \\ = k x_{k-1}(m-1) + \nu(m-k-1) x_k(m-1) + (k+1) x_{k+1}(m-1) - \\ - (m-1) x_k(m-2), \quad m = 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (2.118)$$

где принято соглашение, что  $x_k(-1) = 0$ ,  $x_{-1}(j) = 0$ .

*Доказательство.* Из формул (2.109), (2.111) получаем следующие выражения для  $x_k(j)$ :

$$x_k(j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{N_j(z)}{z^{k+1}} dz, \quad j k = 0, 1, \dots \quad (2.119)$$

Кроме того, из теоремы 1 и формул (2.111) получаем

$$\begin{aligned} m N_m(z) = z N_{m-1}(z) + R(z) N'_{m-1}(z) + \\ + \nu(m-1) N_{m-1}(z) - (m-1) N_{m-2}(z), \end{aligned}$$

откуда, учитывая определение функции  $R(z)$ , после интегрирования по частям имеем при  $m = 1, 2, \dots$  и  $k = 0, 1, \dots$ :

$$\begin{aligned} m \int_{\gamma} \frac{N_m(z)}{z^{k+1}} dz = k \int_{\gamma} \frac{N_{m-1}(z)}{z^k} dz + \nu(m-k-1) \int_{\gamma} \frac{N_{m-1}(z)}{z^{k+1}} dz - \\ - (m-1) \int_{\gamma} \frac{N_{m-2}(z)}{z^{k+1}} dz + (k+1) \int_{\gamma} \frac{N_{m-1}(z)}{z^{k+2}} dz. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Из (2.120) и (2.119) очевидным образом следуют рекуррентные формулы (2.119).

Теорема доказана.

**2.4.3** Преобразуем выражения (2.105) к интегральному виду, удобному для исследования асимптотики решения  $x_k(0)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Введем в рассмот-

рение постоянные  $a_0$ ,  $a$  и функцию  $V(t)$ :

$$a_0 = -\frac{1 - \beta^2}{4 \ln \beta}, \quad a = -\frac{\pi}{\ln \beta}, \quad V(t) = \frac{t^{ia} + 1}{t^{ia} - 1}. \quad (2.121)$$

**Предложение 2.** Решение  $\{x_k(0)\}$  системы уравнений (2.98) с правой частью  $f_k = \delta_{k0}$  имеет вид

$$x_k(0) = a_0 \beta^k \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} V(t) \frac{(1-t)^k}{t^{1/2}(\beta^2-t)^{k+1}} dt, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.122)$$

где  $\delta$  – произвольное число из интервала  $(\beta^2, 1)$  и выбрана ветвь корня  $t^{1/2}$ , соответствующая значению  $(1)^{1/2} = 1$ .

*Доказательство.* Для доказательства достаточно показать, что выражения для  $x_k(0)$  из (2.122) совпадают с выражениями (2.105). Функция  $V(t)$  имеет простые полюсы в точках  $t = \beta^{-2n}$ ,  $n = 0, 1, \dots$  и ограничена при  $\operatorname{Re} t \geq \delta$  вне кружков  $|t - \beta^{-2n}| < \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Тогда, по теореме Коши, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} V(t) \frac{(1-t)^k}{t^{1/2}(\beta^2-t)^{k+1}} dt = \\ & = -2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Res}_{t=\beta^{-2n}} \left\{ V(t) \coth(iat) \frac{(1-t)^k}{t^{1/2}(\beta^2-t)^{k+1}} \right\}. \end{aligned} \quad (2.123)$$

С помощью непосредственного подсчета получаем следующие выражения для вычетов:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{t=1} \left\{ V(t) \frac{(1-t)^k}{t^{1/2}(\beta^2-t)^{k+1}} \right\} &= \frac{2i}{a(1-\beta^2)} \delta_{k0}, \\ \operatorname{Res}_{t=\beta^{-2n}} \left\{ V(t) \frac{(1-t)^k}{t^{1/2}(\beta^2-t)^{k+1}} \right\} &= \frac{2i\beta^n}{a} \frac{(1-\beta^{2n})^k}{(1-\beta^{2n+2})^{k+1}}, \\ & n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.124)$$

Из (2.123), (2.124) и (2.105), с учетом обозначений (2.121), получаем утверждение (2.122). Предложение доказано.

Далее понадобится следующая простая лемма.

**Лемма 3.** Пусть  $a, l, q$  – положительные постоянные, а  $b_n$  – последовательность комплексных чисел с оценками

$$|b_n| \leq c n^l \exp(-\pi a n / 2), \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда для последовательности

$$s_k(q) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left\{ \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+q-ian)} - k^{ian-q} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.125)$$

выполняется оценка

$$|s_k(q)| = O(k^{-(q+1)}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.126)$$

*Доказательство.* Согласно формуле Стирлинга [155, с. 24] имеем равномерную по  $n = 1, 2, \dots$  асимптотику

$$\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+q-ian)} = \exp[\omega(k, n)](1 + O(k^{-1})), \quad k \rightarrow \infty, \quad (2.127)$$

где показатель

$$\begin{aligned} \omega(k, n) = \\ = -ian + q + (k+1/2) \ln(k+1) - (k+1/2+q-ian) \ln(k+1+q-ian), \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} |\exp[\omega(k, n)]| \leq c \frac{(k+1)^{k+1/2}}{[(an)^2 + (k+1+q)^2]^{(k+1/2+q)/2}} \times \\ \times \exp\left(an \operatorname{arctg} \frac{an}{k+1+q}\right). \end{aligned} \quad (2.128)$$

В частности, из (2.127), (2.128) получаем при  $n \geq k \geq l + 3/2$  и любом  $m \geq 0$  оценки

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(k+1)}{|\Gamma(k+1+q-ian)|} \leq c n^{-(l+2)} k^{l+2-q} (a^2+1)^{-k/2} \times \\ \times \exp(\pi an/2) \leq c_m n^{-(l+2)} k^{-m} \exp(\pi an/2). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=k}^{\infty} b_n \left\{ \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+q-ian)} - k^{ian-q} \right\} \right| \leq \\ \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^l \exp(-\pi an/2) \left\{ \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+q-ian)} + \frac{1}{k^q} \right\} \leq \\ \leq c_m k^{-m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + c k^{-q} \sum_{n=k}^{\infty} n^l \exp(-\pi an/2) \leq \\ \leq c_m k^{-m}, \quad k \geq l + 3/2. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Далее, из (2.128) при  $n \leq k$  имеем оценку

$$\begin{aligned} |\exp[\omega(k, n)]| \leq c k^{-q} \exp(san), \\ k = 1, 2, \dots, \quad s = \operatorname{arctg} a > \pi/2, \end{aligned} \quad (2.130)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^k |b_n| \left| \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+q-ian)} - \exp[\omega(k, n)] \right| \leq \\ & \leq ck^{-(q+1)} \sum_{n=1}^{\infty} n^l \exp[-(\pi/2-s)an] \leq ck^{-(q+1)}, \quad k=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.131)$$

Таким образом, на основании определения (2.125) и оценок (2.129), (2.131) заключаем, что для доказательства соотношения (2.126) достаточно установить, что для положительной последовательности

$$R_k = \sum_{n=1}^k n^l \exp(-\pi an/2) \left| k^{-ian+q} \exp[\omega(k, n)] - 1 \right|, \quad k=1, 2, \dots$$

выполняется соотношение

$$R_k = O(k^{-1}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.132)$$

Используя простую оценку

$$|1 - \exp(z)| \leq |z| \exp|\operatorname{Re} z|, \quad z \in \mathbb{C},$$

получаем

$$R_k \leq k^q \sum_{n=1}^k n^l \exp(-\pi an/2) |\omega(k, n) + (q-ian) \ln k| \exp[\omega(k, n)]. \quad (2.133)$$

При этом, используя оценки

$$|\ln(1+z)| \leq |z|, \quad |\ln(1+z) - z| \leq \frac{3}{2} |z|^2, \quad \operatorname{Re} z \geq 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} |\omega(k, n) + (q-ian) \ln k| & \leq |q-ian| |\ln(1 + (1+q-ian)k^{-1})| + \\ & + |q-ian| \left| 1 - \frac{k+1/2}{k+1} \right| + (k+1/2) \left| \ln \left( 1 + \frac{q-ian}{k+1} \right) - \frac{q-ian}{k+1} \right| \leq \\ & \leq c(n+1)^2 k^{-1}, \quad k, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда из (2.133), с учетом неравенства (2.130), имеем оценку (2.132):

$$R_k \leq \frac{c}{k} \sum_{n=1}^k n^l (n+1)^2 \exp[-(\pi/2-s)an] \leq \frac{c}{k}, \quad k=1, 2, \dots$$

Лемма доказана.



**Теорема 3.** Для решения  $\{x_k(0)\}_{k=0}^{\infty}$  справедлива асимптотика

$$x_k(0) = \frac{(1 - \beta^2)^{1/2} \beta^k}{|\ln \beta| k^{1/2}} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \right. \\ \left. + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \beta^2)^{ian} \Gamma(1/2 - ian) k^{ian} + O(k^{-1}) \right\}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.134)$$

*Доказательство.* При  $k \geq 1$  из равенств (2.122) имеем выражения

$$x_k(0) = 2a_0 \beta^k \operatorname{Re} \tilde{x}_k, \quad \tilde{x}_k = \int_1^{1+i\infty} V(t) \frac{(1-t)^k}{t^{1/2} (\beta^2 - t)^{k+1}} dt. \quad (2.135)$$

Далее, при  $t \in (1, 1 + i\infty)$  справедливо разложение в ряд

$$\frac{1+t^{ia}}{1-t^{ia}} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} t^{ian}. \quad (2.136)$$

При этом, в силу неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t^{ian}| \leq \frac{\exp(-a \arctan s)}{1 - \exp(-\arctan s)} \leq \frac{s+1}{as}, \quad t = 1 + is, \quad s > 0,$$

на основании теоремы Фубини [119, с. 33] получаем из (2.135) и (2.136) соотношение

$$\tilde{x}_k = J_{0,k} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{n,k}, \quad (2.137) \\ J_{n,k} = \int_1^{1+i\infty} t^{ian-1/2} \frac{(t-1)^k}{(t-\beta^2)^{k+1}} dt.$$

Далее, для  $J_{n,k}$  имеем представление

$$J_{n,k} = J_{n,k}^{(0)} + \beta^2 (ian - 1/2) J_{n,k}^{(1)} + J_{n,k}^{(2)}, \quad (2.138)$$

где

$$J_{n,k}^{(j)} = \int_1^{1+i\infty} (t - \beta^2)^{ian-j-k-3/2} (t-1)^k dt, \quad j = 0, 1, \\ J_{n,k}^{(2)} = \int_1^{1+i\infty} \left\{ t^{ian-1/2} - (t - \beta^2)^{ian-1/2} - \right. \\ \left. - \beta^2 (ian - 1/2) (t - \beta^2)^{ian-3/2} \right\} \frac{(t-1)^k}{(t - \beta^2)^{k+1}} dt.$$

При этом, на основании теоремы Коши и [19, с. 24], имеем для  $J_{n,k}^{(j)}$ ,  $j = 0, 1$  выражения

$$\begin{aligned} J_{n,k}^{(j)} &= \int_1^\infty (t - \beta^2)^{-(k+3/2+j-ian)} (t-1)^k dt = \\ &= \int_0^1 x^{-1/2+j-ian} (1-x)^k (1-\beta^2 x)^{-(k+3/2+j-ian)} dx = \\ &= (1-\beta^2)^{-(1/2+j-ian)} \frac{\Gamma(1/2+j-ian)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+3/2+j-ian)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим вопрос об оценках для  $J_{n,k}^{(2)}$ . Отметим, что для функции

$$g_n(t) = t^{ian-1/2} - (t - \beta^2)^{ian-1/2} - \beta^2(ian - 1/2)(t - \beta^2)^{ian-3/2}$$

и ее производных при  $t \in (1, 1 + i\infty)$  справедливы оценки

$$\left| \frac{d^j g_n(t)}{dt^j} \right| \leq c_j (n+1)^{j+2} |t|^{-(j+5/2)} \exp(-an \operatorname{arctg} \operatorname{Im} t), \quad j = 0, 1, \dots$$

Тогда, используя представление

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{t-1}{t-\beta^2} \right)^{k+1} = \frac{(1-\beta^2)(k+1)}{(t-\beta^2)^2} \left( \frac{t-1}{t-\beta^2} \right)^k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

дважды интегрируя по частям, получаем для  $J_{n,k}^{(2)}$  равенство

$$\begin{aligned} J_{n,k}^{(2)} &= \frac{(1-\beta^2)^{-2}}{(k+1)(k+2)} \int_1^{1+i\infty} \left\{ g_n^{(2)}(t)(t-\beta^2)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 4g_n'(t-\beta^2) + 2g_n(t) \right\} \frac{(t-1)^{k+2}}{(t-\beta^2)^{k+1}} dt \end{aligned}$$

и соответствующую оценку

$$\begin{aligned} |J_{n,k}^{(2)}| &\leq c \frac{(n+1)^4}{k^2} \int_1^{1+i\infty} \left\{ |t|^{-3/2} \left| \frac{t-1}{t-\beta^2} \right|^{k+1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp(-an \operatorname{Im} t (\operatorname{Im} t + 1)^{-1}) \right\} |dt|. \end{aligned}$$

Учитывая здесь неравенство  $|t-1| \leq |t-\beta^2|$ ,  $t \in [1, 1+i\infty)$ , получаем при  $k \geq 5$  оценку

$$|J_{n,k}^{(2)}| \leq c \frac{(n+1)^4}{k^2} \int_0^\infty \left( \frac{s}{s+1} \right)^5 (s+1)^{-3/2} \exp[-abs(s+1)^{-1}] ds =$$

$$= c \frac{(n+1)^4}{k^2} \int_0^1 x^6 (1-x)^{-1/2} \exp(-anx) dx \leq \frac{c}{(n+1)^2 k^2}, \quad (2.139)$$

с постоянной  $c > 0$ , не зависящей от  $n$  и  $k$ .

Таким образом, на основании (2.137)–(2.139) получаем для последовательности  $\tilde{x}_k$  выражение

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k = & \frac{\Gamma(k+1)}{(1-\beta^2)^{1/2}} \left\{ \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(k+3/2)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (1-\beta^2)^{ian} \frac{\Gamma(1/2-ian)}{\Gamma+3/2-in} \right\} + \\ & + \frac{\Gamma(k+1)}{(1-\beta^2)^{3/2}} \left\{ \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(k+5/2)} + \right. \\ & \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (1-\beta^2)^{ian} \frac{\Gamma(3/2-ian)}{\Gamma+5/2-in} \right\} + O(k^{-3/2}), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тогда использование леммы 3 с  $q = 1/2$  и  $q = 3/2$  приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k = & \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2} k^{1/2}} \left\{ \Gamma(1/2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (1-\beta^2)^{ian} \Gamma(1/2-ian) k^{ian} \right\} + \\ & + O(k^{-3/2}), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Утверждение (2.134) вытекает из (2.135), (2.140) с учетом известного равенства  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

Теорема доказана.

**2.4.4** В статье [69] была рассмотрена более общая система алгебраических уравнений

$$x_k - \delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n! k! \nu^{n+k+1}} x_n = f_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.141)$$

где параметры  $\delta \in [-1, 1]$ ,  $\delta \neq 0$ , и  $\nu > 2$ . В частности, такая система для значения  $\delta = -1$  возникает при замене граничных условий (2.98) на “четные” по переменной  $y_3$  условия  $u|_{r_1=d} = f(\cos \theta_1)$ ,  $u|_{r_2=d} = f(-\cos \theta_2)$ .

При этом, для любой ограниченной последовательности  $\mathbf{f} = \{f_k\}_{k=0}^{\infty} \in l_{\infty}$  система уравнений (2.141) имеет единственное решение  $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \in l_{\infty}$  и это решение представляется рядом Неймана

$$\begin{aligned} x_k = & \sum_{j=0}^{\infty} x_k^{(j)}, \quad x_k^{(j+1)} = \\ = & \delta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n! k!} \alpha^{n+k+1} x_n^{(j)}, \quad x_k^{(0)} = f_k, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.142)$$

Непосредственным образом проверяется, что для любого  $\delta \in [-1, 1]$ ,  $\delta \neq 0$ , решения  $\mathbf{x}(j) \in l_\infty$  системы уравнений (2.141), соответствующие правым частям  $f_k = \delta_{kj}$ , связаны между собой рекуррентными соотношениями (2.127).

Поскольку в п. 2.4.1 утверждение (2.105) было приведено без доказательства, то здесь для полноты изложения приведем вывод соответствующих формул для системы уравнений (2.141).

**Лемма 5.** Решение  $\mathbf{x}(0) = \{x_k(0)\} \in l_\infty$  системы уравнений (2.141) имеет вид

$$x_k(0) = \delta_{k0} + (1 - \beta^2)\beta^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \beta^{2n})^k}{(1 - \beta^{2n+2})^{k+1}} (\delta\beta)^n, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.143)$$

*Доказательство.* Используя равенства (2.101) и обозначения (2.104), имеем следующие выражения для первых двух слагаемых  $\{x_k^{(j)}(0)\}$  ряда Неймана (2.142), представляющего решение  $\mathbf{x}(0)$ :

$$x_k^{(0)}(0) = \delta_{k0}, \quad x_k^{(1)}(0) = \delta A_k \{\delta_{n0}\} = \delta/\nu^{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.144)$$

Далее заметим, что если последовательность  $\{x_n^{(j)}\} \in l_\infty$  имеет вид  $x_n^{(j)} = c_j z_j^{n+1}$  с некоторыми постоянными  $c_j$  и  $z_j \in (-1, 1)$ , то на основании (2.101), можно получить равенства

$$x_k^{(j+1)} = A_k \{c_j z_j^{n+1}\} = \delta c_j z_j (Tz_j)^{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.145)$$

где, напомним, дробно-линейное преобразование  $Tz = (\nu - z)^{-1}$ . Тогда выражения (2.144), (2.144), (2.145) показывают, что решение  $\mathbf{x}(0) = \{x_k(0)\}$  можно представить в виде

$$x_k(0) = \delta_{k0} + \delta \alpha^{k+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n+1} \alpha (T^n \alpha)^{k+1} \left( \prod_{s=0}^{n-1} (T^s \alpha) \right). \quad (2.146)$$

Рассмотрим числовую последовательность  $q_{s+1} = Tq_s$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$ ,  $q_0 = \nu^{-1}$ . Так как  $\nu = (\beta^2 + 1)/\beta$ , то

$$q_1 = \frac{\beta}{\beta^2 + 1} = \frac{\beta(1 - \beta^2)}{1 - \beta^4}, \quad q_2 = \frac{1}{\beta + \beta^{-1} - q_1} = \frac{\beta(1 - \beta^4)}{(1 - \beta^6)},$$

а тогда по индукции нетрудно доказать, что

$$q_s = \frac{\beta(1 - \beta^{2s})}{(1 - \beta^{2s+2})}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (2.147)$$

$$\prod_{s=1}^{n-1} q_s = \frac{\beta^n(1 - \beta^2)}{1 - \beta^{2n+2}}, \quad n \geq 1.$$

Таким образом, согласно (2.146), (2.147) имеем выражения

$$\begin{aligned} x_k(0) &= \delta_{k0} + \delta q_0^{k+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n+1} \left( \prod_{s=1}^{n-1} q_s \right) q_j^{k+1} = \\ &= \delta_{k0} + (1 - \beta^2) \beta^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \beta^{2n})^k}{(1 - \beta^{2n+2})^{k+1}} (\delta \beta)^n, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Положим число  $\eta = \ln |\delta| / \ln \beta$ ,  $\delta \neq 0$  и пусть, как и в п. 2.4.3, число  $a = -\pi / \ln \beta$ . Для решения  $\{x_k(0)\}$  системы уравнений (2.141), исходя из равенств (2.143) и аналогично доказательству предложения 2, можно получить формулы

$$\begin{aligned} x_k(0) &= -a_0 \beta^k \times \\ &\times \int_{\mu - i\infty}^{\mu + i\infty} \frac{1}{\sinh(iat/2)} \cdot \frac{(1-t)^k}{t^{(1+\eta)/2} (\beta^2 - t)^{k+1}} dt, \quad \delta \in [-1, 0), \end{aligned} \quad (2.148)$$

$$x_k(0) = a_0 \beta^k \int_{\mu - i\infty}^{\mu + i\infty} V(t) \frac{(1-t)^k}{t^{(1+\eta)/2} (\beta^2 - t)^{k+1}} dt, \quad \delta \in (0, 1], \quad (2.149)$$

где функция  $V(t)$  определена согласно (2.122) и  $k = 0, 1, \dots$ . Отметим, что в формулах (2.148), (2.149) при  $k \geq 1$  значение  $\mu$  можно брать из интервала  $(\beta^2, \beta^{-2})$ , в частности, допускается значение  $\mu = 1$ .

Относительно асимптотического поведения решений системы (2.141) при  $k \rightarrow \infty$ , справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.** Решение  $\{x_k(0)\}$  системы уравнений (2.141) для значения параметра  $\delta \in [-1, 0)$  допускает асимптотическое представление при  $k \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} x_k(0) &= -\frac{(1 - \beta^2)^{1/2 - \eta/2}}{\ln \beta} \cdot \frac{\beta^k}{k^{1/2 + \eta/2}} \times \\ &\times \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \Gamma(1/2 + \eta/2 - ia(n - 1/2)) ((1 - \beta^2)k)^{ia(n - 1/2)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + O(k^{-1}) \right\}. \end{aligned}$$

В случае  $\delta \in (0, 1]$  асимптотическая формула для решения  $x_k(0)$  при  $k \rightarrow \infty$  имеет вид

$$x_k(0) = -\frac{(1 - \beta^2)^{1/2 - \eta/2}}{\ln \beta} \cdot \frac{\beta^k}{k^{1/2 + \eta/2}} \left\{ \frac{\Gamma(1/2 + \eta/2)}{2} + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \Gamma(1/2 + \eta/2 - ian) ((1 - \beta^2)k)^{ian} \right] + O(k^{-1}) \Big\}.$$

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 3 и основано на использовании равенств (2.148), (2.149).

**2.4.5** В данном пункте исследуется вопрос об асимптотическом поведении ограниченного решения системы уравнений (2.100) при  $\nu \rightarrow 2$ . В случае  $\delta = 1$ , т. е. для задачи о расчете электростатического поля в пространстве, содержащем два сферических проводника одинакового радиуса  $d$ , центры которых расположены на расстоянии  $2b$ , величина  $\nu = 2b/d$  и соотношение  $\nu \rightarrow 2$  означает, что проводящие сферы неограниченно сближаются. Отметим, что при  $\nu \rightarrow 2$  значение параметра  $\beta = (\nu - \sqrt{\nu^2 - 4})/2 \rightarrow 1$ .

Если значение  $\delta \in (-1, 1)$ , то исходя из равенств

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} (1 - \beta^2) \frac{(1 - \beta^{2n})^k}{(1 - \beta^{2n+2})^{k+1}} = \frac{1}{(n+1)} \left( \frac{n}{n+1} \right)^k,$$

непосредственно из (2.143) получаем при  $\beta \rightarrow 1$  выражения

$$\lim_{\nu \rightarrow 2} x_k(0) = \delta_{k0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^k \frac{\delta^n}{n+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.150)$$

При этом сходимость является равномерной по  $k$  и предельная последовательность представляет собой решение системы (2.141) для правой части  $f_k = \delta_{k0}$  и соответствующего значения параметра  $\delta \in (-1, 1)$ . При значении  $\delta = -1$  результат (2.150) остается в силе, однако требует специального доказательства.

**Теорема 5.** Для значения параметра  $\delta = -1$  решение  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0; \nu)$  системы уравнений (2.141) имеет покоординатный предел при  $\nu \rightarrow 2$ :

$$\lim_{\nu \rightarrow 2} x_k(0) = \delta_{k0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^k \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

*Доказательство.* Рассмотрим интегральное представление (2.148) решения  $\mathbf{x}(0)$  системы уравнений (2.141) в случае  $\delta = -1$ . Возьмем значение  $\mu = \beta \in (\beta^2, 1)$ , и сделаем в (2.148) замену переменной интегрирования

$$t = \frac{\ln z}{\zeta} = \frac{\ln(\beta^2 + s^2)^{1/2} + i \arg(\beta + is)}{\zeta}, \quad \zeta = -\ln \beta, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (2.151)$$

так что  $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} |t(s)| = \infty$ . Тогда получаем

$$x_k(0)/(a_0\beta^k) = G_k(\beta),$$

$$G_k(\beta) = \zeta \int_{\gamma} \frac{(1 - e^{\zeta t})^k}{(e^{-2\zeta} - e^{\zeta t})^{k+1}} \frac{e^{\zeta t/2}}{\sinh(\pi it/2)} dt. \quad (2.152)$$

При этом контур  $\gamma$  симметрично расположен относительно действительной оси, которую пересекает в единственной точке  $t = -1$ , и находится в полуплоске  $\operatorname{Re} t \geq -1$ ,  $|\operatorname{Im} t| < \pi/(2\zeta)$ . Подынтегральная функция в (2.152) является мероморфной и имеет полюсы в точках  $t = 2k$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$  и в точках  $t = -2 + 2\pi in/\zeta$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$ .

Таким образом, используя лемму Жордана [110], можем деформировать контур  $\gamma$ , не изменяя значение интеграла  $G_k(\beta)$ , к оси  $\operatorname{Re} t = -1$ . Тогда, полагая  $t = -1 + is$ , получаем после простых преобразований

$$G_k(\beta) = -\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{\zeta} - e^{i\zeta s})^k}{(e^{-\zeta} - e^{i\zeta s})^{k+1}} \frac{e^{\zeta(1+is)/2}}{\cosh(\pi s/2)} ds. \quad (2.153)$$

В формуле (2.153) можно уже перейти к пределу по  $\zeta \rightarrow 0$ , если использовать соотношение

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\zeta(e^{\zeta} - e^{i\zeta s})^k}{(e^{-\zeta} - e^{i\zeta s})^{k+1}} = \frac{i}{(s-i)} \left( \frac{s+i}{s-i} \right)^k. \quad (2.154)$$

Тогда справедливо равенство

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} G_k(\beta) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} G_k(\beta) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(s+i)^k}{(s-i)^{k+1}} \frac{ds}{\cosh(\pi s/2)}. \quad (2.155)$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно использовать в интеграле (2.155) формулу Коши о вычетах, замыкая действительную ось через нижнюю полуплоскость и беря вычеты в точках  $s = i(1 - 2n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Кроме того, возвращаясь к выражениям (2.152), следует учесть соотношение

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} a_0 = -\lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{(1 - \beta^2)}{4 \ln \beta} = 1/2.$$

Теорема доказана.

В случае  $\delta = 1$  имеем результат иного характера, а именно, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 6.** Для решений  $x(0) = x(0; \nu)$  системы уравнений (2.100) справедливы асимптотические формулы

$$x_k(0) = -\ln \epsilon + O(1), \quad \epsilon = 1 - \beta \rightarrow 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

*Доказательство.* Используя равенства (2.122), запишем  $x_k(0)$  в виде

$$x_k(0) = 2a_0\beta^k \operatorname{Re} \{G_{1,k}(\beta) + G_{2,k}(\beta)\}, \quad \beta \in (0, 1), \quad (2.156)$$

где интегралы

$$G_{1,k}(\beta) = \int_{\beta}^{\beta+i\infty} \frac{z^{1/2}(1-z)^k}{(\beta^2-z)^{k+1}} [1 + \coth(i\xi/2 \ln z)] dz,$$

$$G_{2,k}(\beta) = - \int_{\beta}^{\beta+i\infty} \frac{z^{1/2}(1-z)^k}{(\beta^2-z)^{k+1}} dz.$$

Преобразуем интеграл  $G_{k,1}(\beta)$ , а именно, сделаем замену переменной (2.151). Тогда получаем выражение

$$G_{1,k}(\beta) = \zeta \int_{\gamma_+} \frac{(1 - \exp(\zeta t))^k}{(\exp(-2\zeta) - \exp(\zeta t))^{k+1}} [1 + \coth(\pi i t/2)] \exp(\zeta t/2) dt,$$

где  $\gamma_+$  является частью контура  $\gamma$ , которая расположена в полуплоскости  $\operatorname{Im} t \geq 0$  и начинается в точке  $t = -1$ . Деформируя контур  $\gamma$  до полуоси  $\operatorname{Re} t = -1$ ,  $\operatorname{Im} t \geq 0$  и полагая  $t = -1 + is$ ,  $s \geq 0$ , получаем

$$G_{1,k}(\beta) = i\zeta \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{(\exp(\zeta) - \exp(i\zeta s))^k}{(\exp(-\zeta) - \exp(i\zeta s))^{k+1}} \times \right. \\ \left. \times [1 - \tanh(\pi s/2)] \exp[\zeta(1 + is)/2] \right\} ds,$$

а переходя здесь к пределу  $\zeta \rightarrow 0$  и используя соотношение

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\zeta [\exp(\zeta) - \exp(i\zeta s)]^k}{[\exp(-\zeta) - \exp(i\zeta s)]^{k+1}} = \frac{i}{(s-i)} \left( \frac{s+i}{s-i} \right)^k,$$

закключаем, что

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} G_{1,k}(\beta) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} G_{1,k}(\beta) = \\ = - \int_0^{\infty} \frac{(s+i)^k}{(s-i)^{k+1}} [1 - \tanh(\pi s/2)] ds. \quad (2.157)$$

Рассмотрим интеграл  $G_{2,k}(\beta)$ . Здесь сделаем замену переменной

$$t = \frac{z-\beta}{z-\beta^2}, \quad z = \frac{\beta(1-\beta t)}{1-t}.$$



При этом полюсь  $z = \beta + is$ ,  $s \geq 0$  преобразуется в дугу окружности, лежащую в нижней полуплоскости и соединяющую точки  $t = 0$  и  $t = 1$ . Деформируя эту дугу в отрезок  $t \in [0, 1]$ , получаем выражение

$$G_{2,k}(\beta) = \frac{(1 + \beta)^k}{\beta^{k+1/2}} \int_0^1 \frac{(t - 1/(\beta + 1))^k}{\sqrt{(1-t)(1-\beta t)}} dt.$$

Тогда, используя асимптотику полного эллиптического интеграла первого рода [22]

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = -\ln(1-k^2)^{1/2} + O(1), \quad k \rightarrow 1,$$

получаем соотношение

$$\begin{aligned} G_{2,k}(\beta) &= \frac{1}{\beta^{1/2}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1-\beta t)}} + O(1) = \frac{2}{\beta^{1/2}} K(\beta^{1/2}) + O(1) = \\ &= -\ln \epsilon + O(1), \quad \epsilon = 1 - \beta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.156), (2.157) получаем утверждение теоремы.

## 2.5 Асимптотическое поведение некоторых рядов, зависящих от параметра

**2.5.1** Во многих задачах математической физики возникает необходимость в исследовании асимптотического поведения рядов интегралов, зависящих от параметра. В данном параграфе рассматривается вопрос об асимптотическом при  $\alpha \rightarrow \infty$  поведении рядов

$$S^{(+)}(\alpha; \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\nu}(k + \alpha)}, \quad \alpha > 0, \quad (2.158)$$

$$S^{(-)}(\alpha; \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\nu}(k - \alpha)}, \quad \alpha > 0, \quad \alpha \neq k, \quad (2.159)$$

где  $\nu > 0$  – фиксированное число. В частности, ряды вида (2.158), (2.159) возникают при исследовании плоской смешанной задачи теории упругости для угла раствора  $\phi \in [\pi, 2\pi]$  (см. [438]).

В данном параграфе показано, что функции  $S^{(\pm)}(\alpha; \nu)$  при  $\alpha \rightarrow \infty$  допускают явные асимптотические разложения в ряды по степеням  $\alpha$  (в случае целого  $\nu$  присутствует также логарифмический множитель в одном из слагаемых), коэффициенты которых определяются значениями дзета-функции Римана  $\zeta(z)$  в последовательности точек  $\nu - m$ , где  $m = 0, 1, \dots, m \neq \nu$ .

Следует отметить, что асимптотические свойства функции  $S^{(+)}(\alpha; \nu)$  достаточно легко поддаются изучению на основании использования техники интегрального преобразования Меллина (см. далее п. 2), и главная цель дальнейших рассмотрений состоит в получении асимптотического разложения для функции  $S^{(-)}(\alpha; \nu)$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \in \Sigma_0$ , где область  $\Sigma_0 = \{\alpha > 0 : \alpha \neq k, \forall k \in \mathbb{N}\}$ . Отметим, что в [398] исследовано асимптотическое поведение ряда

$$\sum_{k=1, k \neq m}^{\infty} \frac{1}{k^{\nu}(k^2 - m^2)}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Основные идеи получения требуемых асимптотических разложений для  $S^{(-)}(\alpha; \nu)$  заключаются в следующем. Прежде всего равенство

$$S^{(-)}(\alpha; \nu) = -S^{(+)}(\alpha; \nu) + 2S_0(\alpha; \nu), \quad \alpha \in \Sigma_{\epsilon}, \quad (2.160)$$

где ряд

$$S_0(\alpha; \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1-\nu}}{k^2 - \alpha^2}, \quad \alpha \in \Sigma_{\epsilon}, \quad (2.161)$$

позволяет свести исследование функции  $S^{(-)}(\alpha; \nu)$  к исследованию  $S^{(+)}(\alpha; \nu)$  и  $S_0(\alpha; \nu)$ . При этом, как уже отмечалось, для изучения асимптотических свойств функции  $S^{(+)}(\alpha; \nu)$  используется преобразование Меллина. Кроме того, сумму  $S_0(\alpha; \nu)$  на основании теоремы Коши удастся заменить удобным для исследования интегральным представлением, если параметр  $\nu \in (0, 1)$ , а при  $\nu = 1$  функция  $S_0(\alpha; 1)$  допускает явное выражение ([207], с. 685):

$$S_0(\alpha; 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi \cot(\pi\alpha)}{2\alpha}, \quad \alpha \in \Sigma_0. \quad (2.162)$$

Тогда общий случай  $\nu > 0$  сводится к случаю  $\nu \in (0, 1]$  на основании рекуррентных формул

$$\alpha S_0(\alpha; \nu + 1) = S_0(\alpha; \nu) - S^{(+)}(\alpha; \nu), \quad \alpha \in \Sigma_0, \quad (2.163)$$

вытекающих из (2.160) и очевидных рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} \alpha S^{(+)}(\alpha; \nu + 1) &= \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k^{\nu+1}(k + \alpha)} - \frac{1}{\alpha k^{\nu} + 1} \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\nu} + 1} = \\ &= \zeta(\nu + 1) - S^{(+)}(\alpha; \nu), \quad \alpha > 0, \end{aligned} \quad (2.164)$$

$$\begin{aligned} \alpha S^{(-)}(\alpha; \nu + 1) &= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k^{\nu+1}(k+\alpha)} + \frac{1}{\alpha k^{\nu+1}} \right\} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\nu+1}} = \\ &= -\zeta(\nu + 1) + S^{(-)}(\alpha; \nu), \quad \alpha \in \Sigma_{\epsilon}, \end{aligned} \quad (2.165)$$

где дзета-функция

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}, \quad \operatorname{Re} z > 1.$$

Напомним понятие асимптотического разложения (см. [191, гл. 1, § 10]). Пусть  $\Sigma$  – заданное множество точек полуоси  $(0, \infty)$ , имеющее в качестве предельной точки бесконечность. Предположим, что  $\phi_n(\alpha)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  – последовательность функций, определенных при  $\alpha \in \Sigma$  и таких, что для любого  $n$  выполняется соотношение

$$\phi_{n+1}(\alpha) = o(\phi_n(\alpha)), \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad \alpha \in \Sigma.$$

Тогда последовательность  $\{\phi_n(\alpha)\}$  называется асимптотической, и если при любом натуральном  $N$  справедливо соотношение

$$f(\alpha) - \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(\alpha) = O(\phi_{N+1}(\alpha)), \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad \alpha \in \Sigma,$$

то полагают, что формальный ряд  $\sum \phi_n(\alpha)$  представляет собой асимптотическое разложение функции  $f(\alpha)$ :

$$f(\alpha) \asymp \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(\alpha), \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad \alpha \in \Sigma.$$

При этом в случае, если разность  $f(\alpha) - g(\alpha)$  имеет асимптотическое разложение  $\sum \phi_n(\alpha)$ , то будем писать

$$f(\alpha) \asymp g(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(\alpha), \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad \alpha \in \Sigma.$$

Напомним необходимые для дальнейшего сведения из теории дзета-функции Римана (см. [191, гл. 2], [271, гл. 13]). Функция  $\zeta(z)$ ,  $\operatorname{Re} z > 1$ , допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость  $z \in \mathbb{C}$  с единственным простым полюсом в точке  $z = 1$ . При этом, в окрестности точки  $z = 1$  справедливо разложение

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + \gamma + O(z-1), \quad z \rightarrow 1, \quad (2.166)$$

где  $\gamma = 0,5772157\dots$  – постоянная Эйлера. Из (2.165), в частности, вытекают соотношения

$$\lim_{z \rightarrow 1} \{(z-1)\zeta(z)\} = 1, \quad \frac{d}{dz} \{(z-1)\zeta(z)\}|_{z=1} = \gamma. \quad (2.167)$$

Кроме того, в любой полосе  $\operatorname{Re} z \in [a, b]$  конечной ширины выполняются оценки

$$|\zeta(z)| \leq c(1+|s|)^\tau, \quad z = \sigma + is, \quad |z-1| \geq 1 \quad (2.168)$$

с постоянными  $c > 0$  и  $\tau \geq 0$ , зависящими от  $a, b$ . Оценки (2.168) необходимы при обосновании асимптотических разложений рядов  $S^+(\alpha; \nu)$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Для значений дзета-функции в целых неположительных точках справедливы равенства

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-2m) = 0, \\ \zeta(1-2m) &= -\frac{B_{2m}}{2m}, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.169)$$

где числа Бернулли определяются равенством

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 2\pi. \quad (2.170)$$

При этом справедлива формула

$$B_{2m} = -4(-1)^m m \int_0^{\infty} \frac{t^{2m-1} dt}{e^{2\pi t} - 1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Как отмечается в [191, гл. 8, § 1], в некоторых работах (в том числе и в [271]) для чисел Бернулли используется несколько иное обозначение: число  $B_{2m}$  в них обозначается через  $(-1)^{m-1} B_m$ . Мы будем придерживаться более стандартного определения (2.170), а значит, и выражений из (2.165) для значений  $\zeta(1-2m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

**2.5.2** Далее удобно ввести обозначение  $\nu_0 = \nu/2$ ,  $\nu \in (0, 1]$ ,  $\nu_0 = 1$ ,  $\nu > 1$ . Для непрерывно дифференцируемой при  $\alpha \geq 0$  функции  $S^{(+)}(\alpha; \nu)$  выполняется оценка

$$S^{(+)}(\alpha; \nu) = O(t^{-\nu_0}), \quad \alpha \rightarrow \infty,$$

и, следовательно, при любом  $\nu > 0$  для преобразования Меллина

$$M_\nu(z) := \int_0^{\infty} S^{(+)}(\alpha; \nu) \alpha^{z-1} d\alpha, \quad \operatorname{Re} z \in (0, \nu_0)$$

справедлива формула обращения (см. [256, § 1.5, § 1.29]):

$$S^{(+)}(\alpha; \nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M_\nu(z) \alpha^{-z} dz, \quad \alpha > 0, \quad \sigma \in (0, \nu_0). \quad (2.171)$$

При этом, используя значение интеграла (см. [256, § 7.7])

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha^{z-1}}{\alpha+1} d\alpha = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad \operatorname{Re} z \in (0, 1),$$

получаем выражение

$$\begin{aligned} M_{\nu}(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\nu}} \left( \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{z-1}}{\alpha+k} d\alpha \right) = \\ &= \frac{\pi \zeta(1+\nu-z)}{\sin(\pi z)}, \quad \operatorname{Re} z \in (0, \nu_0). \end{aligned} \quad (2.172)$$

Тогда из (2.171), (2.172) имеем равенство

$$S^{(+)}(\alpha; \nu) = \frac{1}{2i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\zeta(1+\nu-z)}{\sin(\pi z)} \alpha^{-z} dz, \quad \alpha > 0, \quad \sigma \in (0, \nu_0). \quad (2.173)$$

Подынтегральная мероморфная функция в (2.165) имеет в полуплоскости  $\operatorname{Re} z > 0$  простые полюсы в точках  $z = \nu$  (см. (2.166)) и  $z = m \in \mathbb{N}$ , если  $\nu$  не является целым числом. В случае, когда  $\nu = m$  – натуральное число, особая точка  $z = m$  является полюсом второго порядка. При этом, согласно (2.166), при  $\nu \neq m \in \mathbb{N}$  (случай простых полюсов) получаем следующие выражения для вычетов:

$$\operatorname{Res}_{z=\nu} \left( \frac{\zeta(1+\nu-z)}{\sin(\pi z)} \alpha^{-z} \right) = -\frac{1}{\sin(\pi\nu) \alpha^{\nu}}, \quad (2.174)$$

$$\operatorname{Res}_{z=m} \left( \frac{\zeta(1+\nu-z)}{\sin(\pi z)} \alpha^{-z} \right) = \frac{(-1)^m \zeta(1+\nu-m)}{\alpha^m}. \quad (2.175)$$

Если же  $\nu = m \in \mathbb{N}$ , то на основании соотношений (2.167), получаем выражение

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=m} \left( \frac{\zeta(1+m-z)}{\sin(\pi z)} \alpha^{-z} \right) &= \frac{d}{dz} \left( \frac{(z-m)^2 \zeta(1+m-z)}{\sin(\pi z)} \alpha^{-z} \right) \Big|_{z=m} = \\ &= \frac{a_m \ln \alpha + b_m}{\alpha^m}, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.176)$$

где постоянные

$$a_m = - \left( \frac{(z-m)^2 \zeta(1+m-z)}{\sin(\pi z)} \right) \Big|_{z=m} = \frac{(-1)^m}{\pi},$$

$$b_m = \frac{d}{dz} \left( \frac{(z-m)^2 \zeta(1+m-z)}{\sin(\pi z)} \right) \Big|_{z=m} =$$

$$= \frac{(-1)^m}{\pi} \frac{d}{dz} [(z-m)\zeta(1+m-z)] \Big|_{z=m} - \frac{d}{dz} \left( \frac{z-m}{\sin(\pi z)} \right) \Big|_{z=m} = (-1)^m \frac{\gamma}{\pi}.$$

Таким образом, если  $\nu$  не является натуральным числом, то из (2.172)–(2.175) на основании теоремы Коши о вычетах получаем при любом конечном значении  $\sigma_1 \in (N, N+1)$  с  $N > \nu$  следующее соотношение:

$$\begin{aligned} S^{(+)}(\alpha; \nu) - \left\{ \frac{\pi}{\sin(\pi\nu) \alpha^\nu} - \sum_{m=1}^N (-1)^m \frac{\zeta(1+\nu-m)}{\alpha^m} \right\} = \\ = \frac{1}{2i} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} \frac{\zeta(1+\nu-z)}{\sin(\pi z)} \alpha^{-z} dz = O(\alpha^{-\sigma_1}), \quad \alpha \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.177)$$

При этом для обоснования формулы (2.177) используем оценки (2.168) и экспоненциальное убывание функции  $1/\sin(\pi z)$  при  $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$ . Поскольку в (2.177) натуральное число  $N$  можно взять любым, то соотношения (2.177) показывают, что при не целом  $\nu$  сумма  $S^{(+)}(\alpha; \nu)$  допускает асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} S^{(+)}(\alpha; \nu) \asymp \frac{\pi}{\sin(\pi\nu) \alpha^\nu} + \\ + \frac{1}{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\zeta(\nu-m)}{\alpha^m}, \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad \nu \neq n. \end{aligned} \quad (2.178)$$

Аналогичным образом, в случае  $\nu = n \in \mathbb{N}$ , с учетом (2.176) имеем асимптотическое при  $\alpha \rightarrow \infty$  разложение

$$\begin{aligned} S^{(+)}(\alpha; n) \asymp -(-1)^n \frac{\gamma + \ln \alpha}{\alpha^n} + \\ + \frac{1}{\alpha} \sum_{m=0, m \neq n-1}^{\infty} (-1)^m \frac{\zeta(n-m)}{\alpha^m}. \end{aligned} \quad (2.179)$$

При этом, используя (2.169), асимптотические равенства (2.179) можно записать в виде

$$\begin{aligned} S^{(+)}(\alpha; n) \asymp -(-1)^n \frac{\gamma + \ln \alpha}{\alpha^n} - \frac{(-1)^n}{2\alpha^{n+1}} + \\ + \frac{1}{\alpha} \sum_{m=0}^{n-2} (-1)^m \frac{\zeta(n-m)}{\alpha^m} + \frac{(-1)^n}{2\alpha^n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m \alpha^{2m}}, \quad \alpha \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.180)$$

где считается, что при  $n = 1$  конечная сумма отсутствует.

Отметим, что формально формулы (2.179) (или (2.180)) можно получить из (2.178) с помощью перехода к пределу при  $\nu \rightarrow n$ , если использовать соотношения (см. (2.167))

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \left\{ \frac{\pi}{\sin(\pi\nu) \alpha^\nu} - (-1)^n \frac{\zeta(\nu-n+1)}{\alpha^n} \right\} =$$

$$= -(-1)^n \frac{\gamma + \ln \alpha}{\alpha^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Кроме того, формулы (2.180) для значения  $n = 1$  также следуют из известного асимптотического равенства для пси-функции

$$\psi(\alpha) \asymp \ln \alpha - \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m\alpha^{2m}}, \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad (2.181)$$

и равенства (см. [271, § 12.16])

$$\psi(\alpha) = -\gamma - \frac{1}{\alpha} + \alpha S^{(+)}(\alpha; 1), \quad \alpha \neq 0, -1, \dots$$

**2.5.3** Рассмотрим вопрос об асимптотике суммы  $S_0(\alpha, \nu)$  когда  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \in \Sigma_0$ . При этом сначала ограничимся случаем  $\nu \in (0, 1)$ . На основании определения (2.161), по теореме Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{z^{1-\nu} \cot(\pi z)}{z^2 - \alpha^2} dz = -\frac{\cot(\pi\alpha)}{2\alpha^\nu} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1-\nu}}{k^2 - \alpha^2}, \quad \nu \in (0, 1),$$

где считается, что  $z^\mu = |z|^\mu e^{i\mu\psi}$ ,  $\psi = \arg z \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Таким образом, для суммы  $S_0(\alpha, \nu)$  имеем представление

$$S_0(\alpha; \nu) = -\frac{\pi \cot(\pi\alpha)}{2\alpha^\nu} + I(\alpha; \nu), \quad \alpha \in \Sigma_0, \quad \nu \in (0, 1), \quad (2.182)$$

где интеграл

$$I(\alpha; \nu) = -\frac{1}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{z^{1-\nu} \cot(\pi z)}{z^2 - \alpha^2} dz.$$

Делая в интеграле  $I(\alpha; \nu)$  замену переменной интегрирования  $z = is$  и используя равенства

$$\cot(\pi is) = -i \coth(\pi s), \quad (is)^{1-\nu} = ie^{-i\pi\nu/2} s^{1-\nu},$$

$$(-is)^{1-\nu} = -ie^{i\pi\nu/2} s^{1-\nu}, \quad s > 0,$$

получаем для  $I(\alpha; \nu)$  выражение

$$I(\alpha; \nu) = \cos(\pi\nu/2) \int_0^\infty \frac{\coth(\pi s)}{s^{\nu-1}(s^2 + \alpha^2)} ds. \quad (2.183)$$

Далее, используя равенство

$$\coth(\pi s) = 1 + 2e^{-2\pi s} / (1 - e^{-2\pi s}), \quad s > 0,$$

и значение интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{s^{1-\nu}}{s^2 + \alpha^2} ds = \frac{1}{2\alpha^\nu} \int_0^{\infty} \frac{\tau^{-\nu/2}}{\tau + 1} d\tau = \frac{\pi}{2\alpha^\nu \sin(\pi\nu/2)}, \quad \nu \in (0, 1),$$

получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{\coth(\pi s)}{s^{\nu-1}(s^2 + \alpha^2)} ds = \\ & = \frac{\pi}{2\alpha^\nu \sin(\pi\nu/2)} + 2 \int_0^{\infty} \frac{s^{1-\nu} e^{-2\pi s}}{(s^2 + \alpha^2)(1 - e^{-2\pi s})} ds. \end{aligned} \quad (2.184)$$

Таким образом, из формул (2.182)–(2.184), при  $\alpha \in \Sigma_0$  и значении параметра  $\nu \in (0, 1)$  вытекает равенство

$$S_0(\alpha; \nu) = \frac{\pi\{-\cot(\pi\alpha) + \cot(\pi\nu/2)\}}{2\alpha^\nu} + 2 \cos(\pi\nu/2) I_0(\alpha; \nu), \quad (2.185)$$

где интеграл

$$I_0(\alpha; \nu) = \int_0^{\infty} \frac{s^{1-\nu} e^{-2\pi s}}{(s^2 + \alpha^2)(1 - e^{-2\pi s})} ds.$$

Рассмотрим вопрос об асимптотическом поведении интеграла  $I_0(\alpha; \nu)$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ . Используя простую оценку

$$\left| \frac{1}{1+x} - \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m x^m \right| \leq x^n, \quad x \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

очевидным образом получаем неравенство

$$\left| \frac{1}{s^2 + \alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \left(\frac{s}{\alpha}\right)^{2m} \right| \leq \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{s}{\alpha}\right)^{2n}, \quad s, \alpha > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Из этого неравенства и из определения функции  $I_0(\alpha; \nu)$  вытекает асимптотическое равенство

$$I_0(\alpha; \nu) \asymp \frac{1}{\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\alpha^{2m}} I_{0,m}(\nu), \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad (2.186)$$

где интегралы [271, § 13.12]

$$\begin{aligned} I_{0,m}(\nu) & := \int_0^{\infty} \frac{s^{2m+1-\nu} e^{-2\pi s}}{(1 - e^{-2\pi s})} ds = \frac{1}{(2\pi)^{2m+2-\nu}} \int_0^{\infty} \frac{x^{2m+1-\nu} e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \\ & = \frac{\Gamma(2m+2-\nu)\zeta(2m+2-\nu)}{(2\pi)^{2m+2-\nu}}. \end{aligned}$$



При этом справедливо соотношение [271, § 13.151]

$$\Gamma(2m+2-\nu)\zeta(2m+2-\nu) = -(-1)^m \frac{(2\pi)^{2m+2-\nu} \zeta(\nu-2m-1)}{2 \cos(\pi\nu/2)},$$

и, следовательно, согласно (2.186) имеем при  $\alpha \rightarrow \infty$  асимптотическое равенство

$$I_0(\alpha; \nu) \asymp -\frac{1}{2 \cos(\pi\nu/2) \alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta(\nu-2m-1)}{\alpha^{2m}}. \quad (2.187)$$

Таким образом, на основании (2.185), (2.180), получаем для  $\nu \in (0, 1)$  и при  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \in \Sigma_0$  асимптотическое равенство

$$S_0(\alpha; \nu) \asymp \frac{\pi \{-\cot(\pi\alpha) + \cot(\pi\nu/2)\}}{2\alpha^\nu} - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta(\nu-2m-1)}{\alpha^{2m}}. \quad (2.188)$$

Используя рекуррентные соотношения (2.163), докажем, что асимптотические формулы (2.188) справедливы при всех не целых значениях  $\nu > 0$ .

**Теорема 1.** Для любого значения  $\nu > 0$ ,  $\nu \neq 1, 2, \dots$ , для  $S_0(\alpha; \nu)$ ,  $\alpha \in \Sigma_0$  справедливы асимптотические при  $\alpha \rightarrow \infty$  формулы (2.188).

*Доказательство.* Для доказательства используем индукцию по  $k$  в представлении  $\nu = \nu_0 + k$ ,  $\nu_0 \in (0, 1)$ . Предположим, что формулы (2.188) справедливы при  $\nu \in (0, k)$ ,  $\nu \neq n$ , для некоторого натурального  $k$ . Покажем, что тогда (2.188) выполняются и при  $\nu \in (k, k+1)$ . Действительно, используя индуктивное предположение, на основании (2.163), (2.178) имеем

$$\begin{aligned} \alpha S_0(\alpha; \nu+1) &= -S^{(+)}(\alpha; \nu) + S_0(\alpha; \nu) \asymp \\ &\asymp -\frac{\pi}{\sin(\pi\nu) \alpha^\nu} + \frac{\pi \{-\cot(\pi\alpha) + \cot(\pi\nu/2)\}}{2\alpha^\nu} - \\ &- \frac{1}{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\zeta(\nu-m)}{\alpha^m} - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta(\nu-2m-1)}{\alpha^{2m}}. \end{aligned}$$

При этом выполняется равенство

$$-\frac{2}{\sin(\pi\nu)} + \cot(\pi\nu/2) = -\tan(\pi\nu) = \cot(\pi(\nu+1)/2),$$

и тогда получаем

$$\alpha S_0(\alpha; \nu+1) \asymp \frac{\pi \{-\cot(\pi\alpha) + \cot(\pi(\nu+1)/2)\}}{2\alpha^\nu} -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta(\nu - 2m)}{\alpha^{2m+1}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta(\nu - 2m - 1)}{\alpha^{2m+2}} - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta(\nu - 2m - 1)}{\alpha^{2m}} = \\
& = \frac{\pi \{-\cot(\pi\alpha) + \cot(\pi(\nu + 1)/2)\}}{2\alpha^\nu} - \frac{1}{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta((\nu + 1) - 2m - 1)}{\alpha^{2m}},
\end{aligned}$$

т. е. формулы (2.188) верны и при  $\nu \in (k, k + 1)$ . Отсюда и из справедливости асимптотических формул (2.188) при  $\nu \in (0, 1)$  получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Рассмотрим ряд  $S_0(\alpha; n)$  при натуральных значениях  $n$ . Для суммы  $S_0(\alpha; 1)$  имеем явное выражение (2.162). Для  $n = 2$ , на основании (2.162), (2.163), (2.169) и (2.180) для значения  $n = 1$  имеем

$$\begin{aligned}
\alpha S_0(\alpha; 2) &= -S^{(+)}(\alpha; 1) + S_0(\alpha; 1) \asymp \\
&\asymp -\frac{\gamma + \ln \alpha}{\alpha} - \frac{\pi \cot(\pi\alpha)}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m\alpha^{2m}},
\end{aligned}$$

и, значит, при  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \in \Sigma_0$  выполняется соотношение

$$S_0(\alpha; 2) \asymp -\frac{\gamma + \ln \alpha + (\pi/2) \cot(\pi\alpha)}{\alpha^2} + \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m\alpha^{2m}}. \quad (2.189)$$

При получении разложения для суммы  $S_0(\alpha; n)$  в случае целого значения  $n$  удобно использовать рекуррентное соотношение

$$\alpha^2 S_0(\alpha; \nu + 2) = -\zeta(\nu + 1) + S_0(\alpha; \nu), \quad \alpha \in \Sigma_0, \quad (2.190)$$

вытекающее из формул (2.163) и (2.164), что вместе с равенствами (2.162) и (2.179), позволяет доказать следующее утверждение.

**Теорема 2.** Для не целых значений  $\alpha > 0$  и  $n = 0, 1, 2, \dots$  справедливы равенства

$$S_0(\alpha; 2n + 1) = -\frac{\pi \cot(\pi\alpha)}{2\alpha^{2n+1}} + \frac{1}{2\alpha^{2n+2}} - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\zeta(2n - 2m)}{\alpha^{2m}}. \quad (2.191)$$

При  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \in \Sigma_0$ , выполняется асимптотическое равенство

$$\begin{aligned}
S_0(\alpha; 2n + 2) &\asymp -\frac{\gamma + \ln \alpha + (\pi/2) \cot(\pi\alpha)}{\alpha^{2n+2}} - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\zeta(2n - 2m + 1)}{\alpha^{2m}} + \\
&+ \frac{1}{2\alpha^{2n+2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m\alpha^{2m}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.192)
\end{aligned}$$

При  $n = 0$  считаем, что конечные суммы в (2.191), (2.192) отсутствуют.

*Доказательство.* Формулы (2.191) вытекают из (2.162) и следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} S_0(\alpha; 2n+1) &= \alpha^{-2}[-\zeta(2n) + S_0(\alpha; 2n-1)] = \dots = \\ &= -\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\zeta(2n-2m)}{\alpha^{2m+2}} + \alpha^{-2n} S_0(\alpha; 1), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Аналогичным образом имеем

$$\begin{aligned} S_0(\alpha; 2n+2) &= \alpha^{-2}[-\zeta(2n+1) + S_0(\alpha; 2n)] = \dots = \\ &= -\sum_{m=0}^{n-1} \frac{\zeta(2n-2m+1)}{\alpha^{2m+2}} + \alpha^{-2n} S_0(\alpha; 2), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

откуда и из (2.189) получаем асимптотические формулы (2.192). Теорема доказана.

**2.5.4** Формулы (2.178), (2.180) и (2.188), (2.191), (2.192) полностью описывают асимптотическое при  $\alpha \rightarrow \infty$  поведение рядов  $S^{(+)}(\alpha; \nu)$  и  $S_0(\alpha; \nu)$ . Тогда соответствующие асимптотические формулы для  $S^{(-)}(\alpha; \nu)$  получаем на основании равенства (2.160). При этом для не целого значения параметра  $\nu$  имеем при  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \in \Sigma_0$  соотношение

$$\begin{aligned} S^{(-)}(\alpha; \nu) &\asymp -\frac{\pi}{\sin(\pi\nu)} \alpha^\nu - \frac{1}{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \zeta(\nu-m)}{\alpha^m} - \\ &- \frac{\pi[\cot(\pi\alpha) - \cot(\pi\nu/2)]}{\alpha^\nu} - \frac{2}{\alpha^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta(\nu-2m-1)}{\alpha^{2m}}. \end{aligned} \quad (2.193)$$

Значит, используя равенства

$$-\frac{1}{\sin(\pi\nu)} + \cot(\pi\nu/2) = \cot(\pi\nu)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{2n} \frac{(-1)^m \zeta(\nu-m)}{\alpha^m} + \frac{2}{\alpha} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\zeta(\nu-2m-1)}{\alpha^{2m}} &= \sum_{m=0}^n \frac{\zeta(\nu-2m)}{\alpha^{2m}} - \\ - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\zeta(\nu-2m-1)}{\alpha^{2m+1}} + \frac{2}{\alpha} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\zeta(\nu-2m-1)}{\alpha^{2m}} &= \\ = \sum_{m=0}^n \frac{\zeta(\nu-m)}{\alpha^m}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

получаем из (2.178) асимптотическое равенство

$$S^{(-)}(\alpha; \nu) \asymp \frac{\pi[\cot(\pi\nu) - \cot(\pi\alpha)]}{\alpha^\nu} - \frac{1}{\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta(\nu - m)}{\alpha^m}, \quad (2.194)$$

$$\alpha \rightarrow \infty, \quad \alpha \in \Sigma_0, \quad \nu \neq 1, 2, \dots$$

Далее, для целых значений  $\nu = 2n + 1$  имеем из (2.160), (2.180) и (2.191) при  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \in \Sigma_0$  и  $n = 0, 1, \dots$  соотношение

$$\begin{aligned} S^{(-)}(\alpha; 2n + 1) &\asymp -\frac{\gamma + \ln \alpha + \pi \cot(\pi\alpha)}{\alpha^{2n+1}} + \frac{1}{2\alpha^{2n+2}} - \\ &- \frac{1}{\alpha} \sum_{m=0}^{2n-1} (-1)^m \frac{\zeta(2n + 1 - m)}{\alpha^m} - \frac{2}{\alpha^2} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\zeta(2n - 2m)}{\alpha^{2m}} + \\ &+ \frac{1}{2\alpha^{2n+1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m \alpha^{2m}}. \end{aligned}$$

При этом сумма

$$\sum_{m=0}^{2n-1} (-1)^m \frac{\zeta(2n + 1 - m)}{\alpha^m} + \frac{2}{\alpha} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\zeta(2n - 2m)}{\alpha^{2m}} = \sum_{m=0}^{2n-1} \frac{\zeta(2n + 1 - m)}{\alpha^m},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} S^{(-)}(\alpha; 2n + 1) &\asymp \\ &\asymp -\frac{\gamma + \ln \alpha + \pi \cot(\pi\alpha)}{\alpha^{2n+1}} + \frac{1}{2\alpha^{2n+2}} - \frac{1}{\alpha} \sum_{m=0}^{2n-1} \frac{\zeta(2n + 1 - m)}{\alpha^m} + \\ &+ \frac{1}{2\alpha^{2n+1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m \alpha^{2m}}, \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad \alpha \in \Sigma_0. \end{aligned} \quad (2.195)$$

Отметим, что формула (2.195) для значения  $n = 0$  может быть получена из равенства

$$\psi(\alpha) = -\gamma - \pi \cot(\pi\alpha) - \alpha S^{(-)}(\alpha; 1), \quad \alpha \neq 0, 1, \dots,$$

и асимптотического соотношения (2.181).

Аналогичным образом, используя (2.160), (2.180) и (2.192), для четного значения  $\nu = 2n + 2$  получаем

$$\begin{aligned} S^{(-)}(\alpha; 2n + 2) &\asymp -\frac{\gamma + \ln \alpha + \pi \cot(\pi\alpha)}{\alpha^{2n+2}} + \frac{1}{2\alpha^{2n+3}} - \\ &- \frac{1}{\alpha} \sum_{m=0}^{2n} (-1)^m \frac{\zeta(2n + 2 - m)}{\alpha^m} - \frac{2}{\alpha^2} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\zeta(2n - 2m + 1)}{\alpha^{2m}} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2\alpha^{2n+2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m\alpha^{2m}}.$$

Здесь конечная сумма

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{2n} (-1)^m \frac{\zeta(2n+2-m)}{\alpha^m} + \frac{2}{\alpha} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\zeta(2n-2m+1)}{\alpha^{2m}} = \\ = \sum_{m=0}^{2n} \frac{\zeta(2n+2-m)}{\alpha^m}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} S^{(-)}(\alpha; 2n+2) \asymp \\ \asymp -\frac{\gamma + \ln \alpha + \pi \cot(\pi\alpha)}{\alpha^{2n+2}} + \frac{1}{2\alpha^{2n+3}} - \frac{1}{\alpha} \sum_{m=0}^{2n} \frac{\zeta(2n+2-m)}{\alpha^m} + \\ + \frac{1}{2\alpha^{2n+2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m\alpha^{2m}}, \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad \alpha \in \Sigma_0. \end{aligned} \quad (2.196)$$

Отметим, что формулы (2.195), (2.196) можно записать в виде одного соотношения

$$\begin{aligned} S^{(-)}(\alpha; n) \asymp -\frac{\ln \alpha + \gamma + \pi \cot(\pi\alpha)}{\alpha^n} + \frac{1}{2\alpha^{n+1}} - \\ - \frac{1}{\alpha} \sum_{m=0}^{n-2} \frac{\zeta(n-m)}{\alpha^m} + \frac{1}{2\alpha^n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m\alpha^{2m}}, \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad \alpha \in \Sigma_0, \end{aligned} \quad (2.197)$$

где  $n = 1, 2, \dots$  и конечная сумма считается отсутствующей при  $n = 1$ .

Таким образом, справедлива следующая теорема, представляющая собой основной результат данного параграфа.

**Теорема 3.** Для суммы  $S^{(-)}(\alpha; \nu)$  при  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \in \Sigma_\epsilon$  справедливы асимптотические представления (2.194) (при не целом значении  $\nu > 0$ ) и (2.197) (для  $\nu = 1, 2, \dots$ ).

## ГЛАВА 3

### МЕТОД СУПЕРПОЗИЦИИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Бигармоническое уравнение является одним из важнейших уравнений математической физики. В частности, к этому уравнению приводят различные задачи теории упругости [40, 196, 197] и гидродинамики [154, 280, 369, 376, 377]. В § 3.1 и § 3.2 рассматривается плоская задача Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе и прямоугольнике. Основные результаты этих параграфов состоят в конструктивном построении решений рассмотренных граничных задач. Нахождение коэффициентов рядов и плотностей интегралов, представляющих решение граничной задачи, сведено к решению интегроалгебраической системы уравнений, для которой устанавливается однозначная разрешимость и исследуются асимптотические свойства решений. В результате указываются свойства гладкости граничных данных, при которых возможно построение решения граничной задачи по методу суперпозиции. В этом плане задача Дирихле для бигармонического уравнения рассмотрена при наиболее широких предположениях. Отметим, что обзор различных результатов по исследованию эллиптических граничных задач в областях с кусочно-гладкой границей, к которым относится как полуполоса так и прямоугольник, имеется в [138, 182].

В § 3.3, на примере задачи Дирихле для бигармонического уравнения, устанавливается аналитическая связь между методами суперпозиции и собственных функций. Идеи и результаты этого параграфа существенным образом используются в главе 5 для исследования сходимости рядов по собственным функциям, возникающих при рассмотрении построения решений различных граничных задач по методу собственных функций.

В § 3.4 и § 3.5 рассмотрена задача Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе с криволинейным торцом. На основании метода суперпозиции проведено сведение этой граничной задачи к системе интегральных уравнений на отрезке и установлена ее однозначная разрешимость.

Основные результаты главы содержатся в публикациях [52, 59, 73, 78, 357].

### 3.1 Задача Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе

**3.1.1** В полуполосе  $S = \{(x, y) : x > 0, |y| < 1\}$  рассматривается задача Дирихле для однородного бигармонического уравнения

$$\begin{aligned} \Delta^2 u(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in S, \\ u(x, \pm 1) &= u'_y(x, \pm 1) = 0, \quad x > 0, \\ u(0, y) &= f(y), \quad u'_x(0, y) = g(y), \quad |y| < 1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для простоты дальнейших выкладок исследуется симметричный случай, т. е. когда

$$f(y) = f(-y), \quad g(y) = g(-y), \quad |y| < 1.$$

Прежде чем перейти к построению и исследованию решения граничной задачи (3.1) по методу суперпозиции, приведем необходимые в дальнейшем определения и обозначения. Всюду далее в этом параграфе (в том числе в формулировках утверждений), если не оговорено противное, на комплекснозначные функции  $f, g$  накладываются условия

$$\begin{aligned} f \in W_p^1 &= W_p^1[-1, 1], \quad g \in L_p = L_p^1[-1, 1], \\ p &\in (1, \infty), \quad f(\pm 1) = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Кроме того, предполагаем выполненным условие

$$\int_{-1}^1 g(y) dy = 0, \quad (3.3)$$

которое не уменьшает общности рассмотрений. По числу  $p \in (1, \infty)$  определим числа

$$p' = p(p-1)^{-1}, \quad p_0 = \min\{p, 2\},$$

и пусть величина (норма)

$$N_p^k(f, g) = \|f\|_{W_p^k} + \|g\|_{W_p^{k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

При построении решения граничной задачи (3.1) по методу суперпозиции используем разложения в ряды Фурье четных функций  $f$  и  $g$ :

$$f(y) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos(\alpha_n y), \quad g(y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos(\alpha_n y), \quad (3.4)$$

где последовательность

$$\alpha_n = \pi n, \quad n = 1, 2, \dots$$

В силу условий (3.2) и неравенства Хаусдорфа–Юнга [303, с. 172] имеем включения

$$\{-\alpha_n f_n\}_{n=1}^{\infty} = \{f_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty} \in l_{p'_0}, \quad \{g_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_{p'_0}, \quad (3.5)$$

где  $f_n^{(1)}$  – коэффициенты Фурье разложения нечетной функции  $f'(y) \in L_p$  по ортонормированной системе  $\{\sin(\alpha_n y)\}_{n=1}^{\infty}$ .

По коэффициентам Фурье (3.4) функций  $f, g$  определим мероморфные функции переменного  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

$$T_0(\lambda) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2\alpha_n^3 f_n + (\alpha_n^2 - \lambda^2) g_n)}{(\lambda^2 + \alpha_n^2)^2}, \quad (3.6)$$

$$F_1(\lambda) = 4\lambda^3 T_0(\lambda)$$

с полюсами второго порядка в точках  $\pm i\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ . Пусть сектор комплексной плоскости

$$\Sigma_{\epsilon} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| < \epsilon \operatorname{Re} \lambda\}, \quad \epsilon > 0.$$

Тогда из (3.5), (3.6) для любого  $\epsilon > 0$  получаем оценки

$$|T_0(\lambda)| \leq c_{\epsilon} N_p^1(f, g) (1 + |\lambda|)^{-2+1/p_0}, \quad \lambda \in \Sigma_{\epsilon}. \quad (3.7)$$

Далее систематически будем использовать равенства [207, с. 298, с. 687]

$$\int_0^{\infty} \frac{s^{\gamma+2} ds}{(s^2 + 1)^2} = \frac{\pi(\gamma + 1)}{4 \cos(\pi\gamma/2)}, \quad \operatorname{Re} \gamma \in (-3, 1), \quad (3.8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda^2 + \alpha_n^2)^2} = \frac{1}{2\lambda^3} \left( \frac{\sinh \lambda \cosh \lambda + \lambda}{2 \sinh^2 \lambda} - \frac{1}{\lambda} \right), \quad (3.9)$$

$$\frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(isx) ds}{s^2 + \alpha^2} = \exp(-\alpha x), \quad \alpha > 0, \quad x > 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{U(s, y)}{\sinh^2 s} = \frac{2}{s} + 4s^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(\alpha_n y)}{(s^2 + \alpha_n^2)^2}, \quad |y| \leq 1, \quad (3.11)$$

где функция

$$U(s, y) = (s \cosh s + \sinh s) \cosh sy - sy \sinh s \sinh sy. \quad (3.12)$$



**3.1.2** Согласно общей схеме метода суперпозиции решение граничной задачи (3.1) ищем в виде (промежуточные выкладки, аналогичные [87, § 8], опускаем)

$$u = u_1 + u_2, \quad (3.13)$$

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{U(s, y)}{s^3 \sinh^2 s} \cos(xs) ds, \quad (3.14)$$

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{(-1)^{n+1} X_n}{2\alpha_n^3} + f_n \right] (1 + \alpha_n x) + g_n x \right\} \times \\ \times \exp(-\alpha_n x) \cos(\alpha_n y), \quad (3.15)$$

с функцией  $U(s, y)$ , определенной выражением (3.12) и неизвестными  $X(s)$  и  $X_n$ . При этом, если, например, выполнены условия

$$s^{-4} X(s) \in L_1(\mathbb{R}_+), \quad \{\alpha_n^{-3} X_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_1, \quad (3.16)$$

то четная по переменной  $y$  функция  $u(x, y)$  бесконечно дифференцируема и удовлетворяет в  $S$  однородному бигармоническому уравнению. Кроме того, эта функция удовлетворяет условию

$$u(x, y) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \forall y \in (-1, 1)$$

и (формально) граничным условиям из (3.1) для нормальной производной. Выполнение граничных условий для значений  $u$  на границе полуполосы  $S$ , на основании равенств (3.10), (3.12), приводит к следующей системе линейных интегроалгебраических уравнений:

$$X(s) - \frac{4s^3 \sinh^2 s}{\Delta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{(s^2 + \alpha_n^2)^2} = F(s), \quad s > 0, \quad (3.17)$$

$$X_n = \frac{4\alpha_n^3}{\pi} \int_0^\infty \frac{X(s) ds}{(s^2 + \alpha_n^2)^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty s^{-4} X(s) ds = f_0, \quad (3.19)$$

где функции

$$\Delta(s) = \sinh s \cosh s + s, \quad F(s) = \frac{\sinh s^2}{\Delta(s)} F_1(s). \quad (3.20)$$

Система уравнений (3.17), (3.18) очевидным образом сводится к интегральному уравнению относительно функции  $X(s)$ :

$$X(s) - \int_0^\infty Q(s, t) X(t) dt = F(s), \quad s > 0, \quad (3.21)$$

с ядром

$$Q(s, t) = \frac{16 s^3 \sinh^2 s}{\pi \Delta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^3}{(s^2 + \alpha_n^2)^2 (t^2 + \alpha_n^2)^2}.$$

Что касается условий (3.16), (3.19), то далее будет показано (см. лемму 1), что они автоматически выполняются, если  $X(s)$  – решение уравнения (3.21) из пространства  $H_\sigma = L_2(\mathbb{R}_+; t^{2\sigma-1})$ ,  $\sigma \in (-2, -1 - 1/p_0)$ .

Пусть  $\lambda_k$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ) – корни функции  $\Delta(\lambda)$ , расположенные в полуплоскости  $\text{Im } \lambda > 0$ . Согласно [111] справедливо асимптотическое равенство

$$\lambda_k = (-1)^k \pi k + \frac{i}{2} \ln k + O(1), \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.22)$$

Из (3.22) следует существование такого  $\epsilon_0 > 0$ , для которого мероморфная функция  $\sinh^2 \lambda / \Delta(\lambda)$  не имеет полюсов и является ограниченной в секторе  $\Sigma_{\epsilon_0}$ , причем найдется такое  $\delta > 0$ , что выполняется оценка

$$|1 - \sinh^2 \lambda / \Delta(\lambda)| \leq c \exp(-\delta|\lambda|), \quad \lambda \in \Sigma_{\epsilon_0}. \quad (3.23)$$

**Лемма 1.** Пусть  $X(s) \in H_\sigma$ ,  $\sigma \in (-2, -1 - 1/p_0)$  – решение интегрального уравнения (3.21) с правой частью, определяемой выражением (3.20). Тогда функция  $X(s)$  продолжается мероморфным образом на всю комплексную плоскость с полюсами в точках  $\pm \lambda_k$ . При этом для  $X(s)$  и последовательности  $X_n$ , определяемой равенствами (3.18), выполняются условия (3.16), (3.19) и справедлива оценка

$$|X(\lambda)| \leq c \{ \|X\|_{H_\sigma} + N_p^1(f, g) \} \cdot |\lambda|^4 (1 + |\lambda|)^{-4-\sigma}, \quad \lambda \in \Sigma_{\epsilon_0}, \quad (3.24)$$

с постоянной  $c > 0$ , не зависящей от  $X(s)$ , и  $f, g$ .

*Доказательство.* Используя неравенство Коши-Буняковского, для последовательности  $X_n$ , определяемой по  $X(s)$  равенствами (3.18), получаем оценку

$$|X_n| \leq c \|X(s)\|_{H_\sigma} \cdot n^{|\sigma|}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

Тогда из (3.21) и (3.20) вытекает, что  $X(s)$  продолжается мероморфным образом на всю комплексную плоскость согласно выражению

$$X(\lambda) = \frac{4\lambda^3 \sinh^2 \lambda}{\Delta(\lambda)} T(\lambda), \quad T(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{(\lambda^2 + \alpha_n^2)^2} + T_0(\lambda), \quad (3.26)$$

где функция  $T_0(\lambda)$  определена в (3.6). Из (3.26) следует, что полюсами  $X(\lambda)$  являются точки  $\pm \lambda_k$ . При этом на основании (3.26), (3.25) и (3.7) выводим оценку (3.24). Условие (3.16) есть простое следствие оценок (3.24), (3.25). Для доказательства выполнимости равенства (3.19) разделим интегральное уравнение (3.21) на функцию  $2\pi s^3 \sinh^2 s / \Delta(s)$  и проинтегрируем полученное соотношение по  $s \in (0, \infty)$ . Тогда, учитывая определение функции  $F_1(s)$  (см.

(3.6)) и равенства (3.8), (3.9), получим

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} s^{-4} X(s) ds = - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n = f_0.$$

Лемма доказана.

Таким образом, построение решения граничной задачи (3.1) по методу суперпозиции приводит к необходимости исследования свойств интегрального уравнения (3.21) с правой частью из (3.20).

Ядро  $Q(s, t)$  можно представить в виде

$$Q(s, t) = Q_0(s, t) + \left( \frac{\sinh^2 s}{\Delta(s)} - 1 \right) Q_0(s, t),$$

где "главная" часть

$$\begin{aligned} Q_0(s, t) &= \frac{16s^3}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^3}{(s^2 + \alpha_n^2)^2 (t^2 + \alpha_n^2)^2} = \\ &= t^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \phi_1(sn^{-1}) \phi_2(nt^{-1}) \end{aligned} \quad (3.27)$$

и функции

$$\phi_1(\lambda) = \frac{4\pi\lambda^3}{(\lambda^2 + \pi^2)^2}, \quad \phi_2(\lambda) = \frac{4\pi\lambda^3}{(\pi^2\lambda^2 + 1)^2}.$$

Такое представление ядра  $Q(s, t)$  показывает, что при исследовании интегрального уравнения (3.21) можно использовать результаты § 2.1 Для преобразований Меллина функций  $\phi_j$ :

$$\Phi_j(\gamma) := \int_0^{\infty} \phi_j(s) s^{\gamma-1} ds, \quad \operatorname{Re} \gamma \in (-3, 1),$$

согласно (3.8) имеем равенства

$$\Phi_1(\gamma) = \pi^{\gamma+1} \frac{(\gamma+1)}{\cos \pi\gamma/2}, \quad \Phi_2(\gamma) = \pi^{-2(\gamma+1)} \Phi_1(\gamma),$$

и, значит, функция

$$D(\gamma) := \Phi_1(\gamma) \Phi_2(\gamma) = \frac{D_0(\gamma)}{\cos^2 \pi\gamma/2},$$

$$D_0(\gamma) = \cos^2 \pi\gamma/2 - (\gamma+1)^2, \quad \operatorname{Re} \gamma \in (-3, 1). \quad (3.28)$$

Важным моментом для дальнейших рассмотрений является то обстоятельство, что найдется такое  $\sigma_0 \in (1, 2)$ , для которого

$$D(\gamma) \neq 0, \quad \gamma \neq 0, \quad \operatorname{Re} \gamma \in (-2, \sigma_0) \quad (3.29)$$

(см. [134]). При этом, если  $\gamma_k, k = 1, 2, \dots$  – корни функции  $D(\gamma)$  из полуплоскости  $\operatorname{Re} \gamma > 0$ , то

$$\operatorname{Re} \gamma_k \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow \infty.$$

Так как  $D(1 + is)$  – вещественная функция переменного  $s \in \mathbb{R}$ , то из свойства (3.29) функции  $D(\gamma)$  вытекает, что индекс

$$\kappa_\sigma = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{D'(\gamma)}{D(\gamma)} d\gamma = 0, \quad \forall \sigma \in (-2, 0).$$

Тогда согласно теореме 3 из § 2.2 получаем следующее утверждение.

**Теорема 1.** Уравнение (3.21) однозначно разрешимо в пространстве  $H_\sigma$  для любого  $\sigma \in (-2, 0)$ .

**Следствие 1.** Пусть  $\sigma \in (-2, -1 - 1/p_0)$ . Тогда для любых  $f, g$  уравнение (3.21) с правой частью из (3.20) имеет единственное решение  $X(s) \in H_\sigma$ .

**Замечание 1.** Если  $X_j(s) \in H_{\sigma_j}, j = 1, 2$  – решения уравнения (3.21) с одной и той же правой частью (3.20), причем  $\sigma_j \in (-2, -1 - 1/p_0)$ , то из теоремы 1 и (3.24) следует, что  $X_1(s) = X_2(s)$ .

**3.1.3** Далее, согласно следствию 1 для краткости под решением уравнения (3.21) понимаем функцию  $X(s) \in H_\sigma$  при некотором фиксированном  $\sigma \in (-2, -1 - 1/p_0)$ , являющуюся решением интегрального уравнения (3.21) с правой частью (3.20).

Для исследования свойств решения  $X(s)$  согласно § 2.1 требуется рассмотреть аналитические свойства преобразования Меллина функции  $F(s)$ , определенной выражениями (3.20) и (3.6). Из оценки (3.7) следует, что определено преобразование Меллина

$$G_1(\gamma) = \int_0^\infty F_1(s) s^{\gamma-1} ds, \quad \operatorname{Re} \gamma \in (-3, -1 - 1/p_0).$$

Далее понадобится следующее простое утверждение (см. также [19, § 1.11]).

**Предложение 1.** Для любого  $y \in (-1, 1)$  функции

$$S(\gamma, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n^\gamma \sin(\alpha_n y),$$

$$C(\gamma, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n^\gamma \cos(\alpha_n y), \quad \operatorname{Re} \gamma < -1$$

продолжаются аналитическим образом на всю комплексную  $\gamma$ -плоскость, причем для любых  $\mu \geq 0$ ,  $\delta > 0$  верны оценки

$$|S(\gamma, y)| + |C(\gamma, y)| \leq c_{\mu, \delta} \cdot \exp[\delta |\operatorname{Im} \gamma| (1 - |y|)^{-(1+\mu)}], \quad \operatorname{Re} \gamma \leq \mu.$$

Кроме того, при  $\operatorname{Re} \gamma > -1$ ,  $|y| < 1$  имеют место соотношения

$$\begin{aligned} S(\gamma, y) &= -\Gamma(\gamma + 1) \cos(\pi\gamma/2) \cdot \frac{(1+y)^{\gamma+1} - (1-y)^{\gamma+1}}{\pi(1-y^2)^{\gamma+1}} + S_1(\gamma, y), \\ C(\gamma, y) - C(\gamma, 0) &= -\Gamma(\gamma + 1) \sin(\pi\gamma/2) \times \\ &\times \frac{(1+y)^{\gamma+1} + (1-y)^{\gamma+1}}{\pi(1-y^2)^{\gamma+1}} + C_1(\gamma, y), \end{aligned} \quad (3.30)$$

где для любых  $\mu > 0$ ,  $\delta > 0$  выполняется оценка

$$|S_1(\gamma, y)| + |C_1(\gamma, y)| \leq c_{\mu, \delta} \cdot \exp(\delta |\operatorname{Im} \gamma|), \quad \operatorname{Re} \gamma \in (-1 + 1/\mu, \mu).$$

*Доказательство.* Для определенности проведем доказательство для функции  $S(\gamma, y)$ . Согласно теореме Коши имеем интегральное представление

$$S(\gamma, y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L(\epsilon, \delta)} \frac{z^\gamma \sin zy}{\sin z} dz, \quad \operatorname{Re} \gamma < -1, \quad |y| < 1, \quad (3.31)$$

где  $z^\gamma = \exp(\gamma \ln z)$ ,  $\ln 1 = 0$  и контур интегрирования

$$L(\epsilon, \delta) = \{z : z = \epsilon + |t| \exp(i\delta \operatorname{sign} t), \quad t \in (-\infty, \infty)\},$$

с произвольными числами  $\epsilon \in (0, \pi)$  и  $\delta \in (0, \pi/2)$ . Из (3.31) непосредственно вытекает аналитичность  $S(\gamma, y)$  при любом  $y \in (-1, 1)$  и оценка для  $\mu \geq 0$ :

$$\begin{aligned} |S(\gamma, y)| &\leq c \exp(\delta |\operatorname{Im} \gamma|) \int_0^\infty (1+t)^\mu \exp[-(1-|y|)t \sin \delta] dt \leq \\ &\leq c \exp(\delta |\operatorname{Im} \gamma|) (1-|y|)^{-(1+\mu)}, \quad \operatorname{Re} \gamma \leq \mu \end{aligned}$$

с постоянной  $c > 0$ , не зависящей от  $y \in (-1, 1)$ . Далее, при  $\operatorname{Re} \gamma > -1$  контур  $L(\epsilon, \delta)$  из (3.31) можно преобразовать в контур  $L(0, \delta)$  и тогда

$$\begin{aligned} S(\gamma, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} z^\gamma (\operatorname{sign} \operatorname{Im} z) \exp[iz(\operatorname{sign} \operatorname{Im} z)] \sin(zy) dz - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{L(0, \delta)} z^\gamma \exp[2iz(\operatorname{sign} \operatorname{Im} z)] \frac{\sin(zy)}{\sin z} dz. \end{aligned} \quad (3.32)$$

При этом справедливо равенство [207, с. 362]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} z^\gamma (\operatorname{sign} \operatorname{Im} z) \exp [iz(\operatorname{sign} \operatorname{Im} z)] \sin(zy) dz = \\ & = -\frac{2}{\pi} \cos(\pi\gamma/2) \int_0^\infty s^\gamma \exp(-s) \sinh sy ds = \\ & = -\Gamma(\gamma + 1) \cos(\pi\gamma/2) \cdot \frac{(1+y)^{\gamma+1} - (1-y)^{\gamma+1}}{\pi(1-y^2)^{\gamma+1}} \end{aligned}$$

и верна оценка

$$\begin{aligned} |z^\gamma \exp [2iz(\operatorname{sign} \operatorname{Im} z)]| & \leq c|z|^{\operatorname{Re} \gamma} \exp(\delta|\operatorname{Im} \gamma|) \times \\ & \times \exp(-2|z| \sin \delta), \quad z \in L(0, \delta), \end{aligned}$$

откуда и из (3.32) вытекает справедливость утверждения (3.30).

Предложение доказано.

**Лемма 2.** Функция  $G_1(\gamma)$  аналитична в полосе  $\operatorname{Re} \gamma \in (-3, -1 - 1/p)$ , причем

$$|G_1(\gamma)| \leq c \exp[-(\pi/2 - \delta)|\operatorname{Im} \gamma|], \quad \operatorname{Re} \gamma \in [\sigma_1, \sigma_2] \quad (3.33)$$

для любых  $\delta \in (0, \pi/2)$  и  $[\sigma_1, \sigma_2] \subset (-3, -1 - 1/p)$ , а при  $\operatorname{Re} \gamma > -2$  справедливо представление

$$\begin{aligned} & G_1(\gamma) = \\ & = 2\Gamma(\gamma + 2) \left\{ (\gamma + 1) \operatorname{tg} \pi\gamma/2 \int_{-1}^1 f'(y) \frac{(1+y)^{\gamma+1} - (1-y)^{\gamma+1}}{\pi(1-y^2)^{\gamma+1}} dy + \right. \\ & \left. + (\gamma + 2) \int_{-1}^1 g(y) \frac{(1+y)^{\gamma+1} + (1-y)^{\gamma+1}}{\pi(1-y^2)^{\gamma+1}} dy \right\} + G_2(\gamma), \quad (3.34) \end{aligned}$$

где  $G_2(\gamma)$  – мероморфная в полуплоскости  $\operatorname{Re} \gamma > -2$  функция с простыми полюсами в точках  $\gamma = 2k - 1, k = 1, 2, \dots$  и оценками вида (3.33) вне кружков  $|\gamma - 2k + 1| \leq 1$ .

*Доказательство.* Учитывая (3.5) и равенство (3.8), получаем при значениях  $\operatorname{Re} \gamma \in (-3, 2)$  для функции  $G_1(\gamma)$  выражение

$$\begin{aligned} G_1(\gamma) & = \frac{2\pi}{\cos \pi\gamma/2} \left\{ (\gamma + 1) \int_{-1}^1 f'(y) S(\gamma + 1, y) dy - \right. \\ & \left. - (\gamma + 2) \int_{-1}^1 g(y) C(\gamma + 1, y) dy \right\}. \quad (3.35) \end{aligned}$$

При этом, по неравенству Гельдера выполняется неравенство

$$\|l(y)(1 - |y|)^{-\mu}\|_{L_1} \leq c_\mu \|l(y)\|_{L_p}, \quad \forall \mu < 1/p',$$

и тогда, используя предложение 1.1 (условие (3.3) обеспечивает отсутствие полюса у функции  $G_1(\gamma)$  в точке  $\gamma = -1$ ), получаем утверждение об аналитичности  $G_1(\gamma)$  в полосе  $\operatorname{Re} \gamma \in (-3, -1 - 1/p)$  и оценки (3.33) с постоянной  $c$ , зависящей от  $N_p^1(f, g)$ . Тогда представление (3.34) для  $G_1(\gamma)$  вытекает из (3.35) и (3.30), (3.3).

Лемма доказана.

Из (3.33) и [256, с. 64] получаем при  $p > 2$  следующее уточнение оценки (3.7), примененной к функции  $F_1(\lambda)$ :

$$|F_1(\lambda)| \leq c_{\epsilon, \delta} N_p^1(f, g) |\lambda|^3 (1 + |\lambda|)^{-2+1/p+\delta}, \quad \lambda \in \Sigma_\epsilon, \quad \forall \delta > 0. \quad (3.36)$$

**Теорема 2.** Преобразование Меллина

$$M(\gamma) = M[X](\gamma) = \int_0^\infty X(s) s^{\gamma-1} ds$$

решения интегрального уравнения (3.21) является аналитической в полосе  $\operatorname{Re} \gamma \in (-4, -1 - 1/p)$  функцией, причем для любого  $\mu > 0$  выполняется оценка

$$|M(\gamma)| \leq c_\mu N_p^1(f, g) \exp(-\delta_1 |\operatorname{Im} \gamma|), \quad \operatorname{Re} \gamma \in (-4 + \mu, -1 - 1/p - \mu), \quad (3.37)$$

с некоторой постоянной  $\delta_1 > 0$ . При  $\operatorname{Re} \gamma > \sigma_1$  справедливо равенство

$$M(\gamma) = M_0(\gamma) + M_1(\gamma), \quad (3.38)$$

где

$$\begin{aligned} M_0(\gamma) = & \frac{2\Gamma(\gamma + 2) \cos(\pi\gamma/2)}{D_0(\gamma)} \times \\ & \times \left\{ (\gamma + 1) \sin(\pi\gamma/2) \int_{-1}^1 f'(y) \frac{(1+y)^{\gamma+1} - (1-y)^{\gamma+1}}{\pi(1-y^2)^{\gamma+1}} dy + \right. \\ & \left. + (\gamma + 2) \cos(\pi\gamma/2) \int_{-1}^1 g(y) \frac{(1+y)^{\gamma+1} + (1-y)^{\gamma+1}}{\pi(1-y^2)^{\gamma+1}} dy \right\} + G_2(\gamma), \end{aligned}$$

а  $M_1(\gamma)$  – мероморфная в полуплоскости  $\operatorname{Re} \gamma > \sigma_1$  функция с полюсами в корнях  $\gamma_0 = 0, \gamma_k, k = 1, 2, \dots$  функции  $D_0(\gamma)$  из полуплоскости  $\operatorname{Re} \gamma \geq 0$  и оценками

$$|M_1(\gamma)| \leq c_\mu N_p^1(f, g) \exp(-\delta_1 |\operatorname{Im} \gamma|), \quad \operatorname{Re} \gamma \in (\sigma_1 + 1/\mu, \mu).$$

*Доказательство.* Из леммы 1 и следствия 1, используя [256, с. 64], получаем утверждение об аналитичности  $M(\gamma)$  в полосе  $\operatorname{Re} \gamma \in (-4, -1 - 1/p_0)$ , вместе с оценками (3.37). Далее, из (3.20), (3.21) получаем, что функция  $X(s)$

удовлетворяет уравнению (см. (3.27))

$$X(s) - \int_0^\infty Q_0(s, t)X(t)dt = F_1(s) + F_2(s), \quad s > 0,$$

где функция

$$F_2(s) = \left(1 - \frac{\sinh^2 s}{\Delta(s)}\right) \cdot \left(\int_0^\infty Q_0(s, t)X(t)dt - F_1(s)\right).$$

При этом, из (3.7), (3.23), (3.24) и [256, с. 64] заключаем, что преобразование Меллина  $M[F_2](\gamma)$  является аналитической при  $\operatorname{Re} \gamma > -3$  функцией с оценками

$$|M[F_2](\gamma)| \leq c_\mu N_p^1(f, g) \exp(-\delta_1 |\operatorname{Im} \gamma|), \quad \operatorname{Re} \gamma \in (-2, \mu), \quad \forall \mu > 0.$$

Тогда из рассмотрений § 2 главы 2, леммы 2 и (3.28), (3.29) получаем для функции  $M(\gamma)$  представление

$$M(\gamma) \frac{D_0(\gamma)}{\cos^2 \pi\gamma/2} = \frac{\pi^\gamma(\gamma+1)}{2\pi i \cos \pi\gamma/2} \times \\ \times \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{\pi^{-\xi}(\xi+1)}{\cos \pi\xi/2} \zeta(\xi - \gamma + 1)M(\xi) + G_1(\gamma) + M[F_2](\gamma),$$

где  $\operatorname{Re} \gamma \in (\sigma_1, -1 - 1/p)$  и  $\zeta(z)$  – дзета-функция Римана. Анализ последнего выражения, вместе с (3.34), и завершает доказательство теоремы.

Непосредственно из доказанной теоремы вытекает следующее утверждение.

**Следствие 2.** Для решения  $X(s)$  уравнения (3.21) и соответствующей ему последовательности  $X_n$  справедливы представления

$$X(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} M(\gamma)s^{-\gamma}d\gamma, \quad s > 0, \quad \sigma \in (-4, -1 - 1/p), \\ X_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} M(\gamma) \frac{(\gamma+1)}{\cos \pi\gamma/2} a_n^{-\gamma}d\gamma, \\ n = 1, 2, \dots, \quad \sigma \in (-3, -1 - 1/p). \quad (3.39)$$

При этом верны асимптотики

$$X(s) = O(s^\sigma), \quad s \rightarrow \infty, \quad X_n = O(n^\sigma), \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \sigma > 1 + 1/p. \quad (3.40)$$

Пусть  $X(s)$  – решение уравнения (3.21) и  $X_n$  – соответствующая последовательность из (3.18). Тогда, в частности, выполняются условия (3.16) и, значит, функция  $u$  из (3.14) является бесконечно дифференцируемой при  $(x, y) \in S$



и удовлетворяет в полуполосе  $S$  однородному бигармоническому уравнению. Покажем, что  $u$  удовлетворяет также граничным условиям из (3.1) на боковых сторонах полуполосы и на бесконечности.

Используя равенство

$$U(\lambda, y) = \lambda \cosh \lambda(1 - |y|) + \lambda(1 - |y|) \sinh \lambda \sinh \lambda|y| + \sinh \lambda \cosh \lambda y,$$

получаем оценки для производных

$$\left| \frac{d^n}{dy^n} U(\lambda, y) \right| \leq \quad (3.41)$$

$$\leq c_n(1 + |\lambda|)^n(1 + |\lambda|(1 - |y|) \exp[\operatorname{Re} \lambda(1 - |y|)]), \quad |y| \leq 1,$$

где  $n = 1, 2, \dots$ . Для функции  $T(\lambda)$ , определенной согласно (3.26), имеем на основании (3.7), (3.24) соотношение

$$T(\lambda) = o(|\lambda|^{-1}), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \Sigma_{\epsilon_0}. \quad (3.42)$$

Тогда для функции  $u_1$  из (3.14), на основании (3.26), (3.41), (3.42) и леммы Жордана получаем представление

$$u_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{i\delta - \exp(-i\theta)\infty}^{i\delta} + \int_{i\delta}^{i\delta + \exp(-i\theta)\infty} \right\} \frac{T(\lambda)U(\lambda, y)}{\Delta(\lambda)} \times$$

$$\times \exp(i\lambda x) d\lambda, \quad x > 0, \quad |y| < 1, \quad (3.43)$$

для некоторых значений

$$\delta \in (0, \min(\alpha_1, \operatorname{Im} \lambda_k)), \quad \theta \in (0, \pi/2).$$

Из (3.41), (3.43), в свою очередь, вытекает бесконечная дифференцируемость функции  $u(x, y)$  при  $x > 0$ ,  $|y| \leq 1$ , а также, с учетом следствия 1 и (3.24), оценка

$$|u(x, y)| \leq cN_p^1(f, g) \exp(-\delta x), \quad x \geq 1, \quad |y| \leq 1. \quad (3.44)$$

Далее, из (3.43), равенств

$$U(\lambda, 1) = \Delta(\lambda), \quad U'_y(\lambda, 1) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

и (3.10) получаем равенства

$$u(x, \pm 1) = u'_y(x, \pm 1) = 0, \quad x > 0,$$

т. е. имеем выполнение граничных условий из (3.1) на боковых сторонах полуполосы.

Отметим, что оценка (3.44) на самом деле справедлива с заменой постоянной  $\delta \in (0, \min(\alpha_1, \operatorname{Im} \lambda_k))$  на точную постоянную  $\delta = \min \operatorname{Im} \lambda_k$ .

**3.1.4** Рассмотрим вопрос о выполнении граничных условий из (3.1) на торце полуполосы. Основным результатом данного пункта, при установлении которого важное место занимают соотношения (3.38)–(3.40), заключается в следующем утверждении.

**Теорема 3.** Для функции  $u(x, y)$ , определенной выражениями (3.14), справедливо соотношение

$$\|u(x, y) - f(y)\|_{W_p^1} + \|u'_x(x, y) - g(y)\|_{L_p} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0. \quad (3.45)$$

Для доказательства (3.45) проведем некоторые предварительные построения, связанные с преобразованием выражений (3.14). Введем в рассмотрение функцию

$$v(x, y) = -f_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty X(s) \frac{U(s, y)}{s^3 \sinh^2 s} \cos(xs) ds - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{\alpha_n^3} X_n(1 + \alpha_n x) \exp(-\alpha_n x) \cos(\alpha_n y), \quad x > 0, \quad |y| < 1, \quad (3.46)$$

так что справедливо равенство (см. (3.14))

$$u(x, y) = v(x, y) + f_0 + \sum_{n=1}^\infty \{f_n(1 + \alpha_n x) + g_n x\} \exp(-\alpha_n x) \cos(\alpha_n y). \quad (3.47)$$

При  $x > 0, |y| < 1$  имеем равенства (ср. с (3.31))

$$C(\gamma; x, y) \equiv \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \alpha_n^\gamma \exp(-\alpha_n x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^\gamma \cosh sy}{\sinh s} \sin(xs - \pi\gamma/2) ds, \quad \operatorname{Re} \gamma > 0. \quad (3.48)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$R(\gamma, t) = \gamma t \sin t + (\gamma + 1) \operatorname{tg}(\pi\gamma/2)(t \cos t - \sin t). \quad (3.49)$$

**Лемма 3.** Для функции  $v(x, y)$  при значениях  $\sigma \in (-2, -1 - 1/p)$  справедливо представление

$$v(x, y) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M(\gamma) \left\{ \int_0^\infty \frac{s^{-\gamma-3} \cosh sy}{\sinh s} R(\gamma, xs) ds \right\} d\gamma. \quad (3.50)$$

*Доказательство.* Для простоты выкладок доказательство леммы проведем в случае выполнения условия  $f_0 = 0$ . Тогда из уравнения (3.19) получаем, что  $M(-3) = 0$  и соотношение (3.39) для последовательности  $X_n$  справедливо при всех  $\sigma \in (-4, -1 - 1/p)$ . В этом случае, подставляя в (3.46) равенства (3.39) для некоторого значения  $\sigma \in (-4, -3)$  и используя теорему Фубини, получаем при  $x > 0$ ,  $|y| < 1$  равенство

$$v(x, y) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M(\gamma) \left\{ \int_0^\infty s^{-\gamma-3} \frac{U(s, y)}{\sinh^2 s} \cos(xs) ds - \right. \\ \left. - \frac{\pi(\gamma+1)}{\cos\pi\gamma/2} [C(-\gamma-3; x, y) + x C(-\gamma-2; x, y)] \right\} d\gamma. \quad (3.51)$$

При этом, интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^\infty s^{-\gamma-3} \frac{U(s, y)}{\sinh^2 s} \cos(xs) ds = \\ = - \int_0^\infty s^{-\gamma-2} \frac{\cosh chsy}{\sinh s} [xs \sin(xs) + (\gamma+1) \cos(xs)] ds.$$

Используя в (3.51) это соотношение и выражение (3.48), получаем равенство (3.50) для значений  $\sigma \in (-4, -3)$ . Тогда, так как функция  $M(\gamma)R(\gamma, t)$  является аналитической в полосе  $\operatorname{Re} \gamma \in (-4, -1 - 1/p)$  и  $R(\gamma, t)$  имеет нуль второго порядка в точке  $t = 0$ , то по теореме Коши (с учетом теоремы 2) заключаем, что равенство (3.50) имеет место при всех  $\sigma \in (-2, -1 - 1/p)$ .

Лемма доказана.

Используя соотношение

$$\frac{1}{\sinh s} = 2 \exp(-s) + \frac{\exp(-2s)}{\sinh s}$$

и [207, с. 446], получаем при  $\operatorname{Re} \gamma \in (-2, -1)$ ,  $y \in (0, 1)$  выражение

$$\int_0^\infty \frac{s^{-\gamma-3} \cosh sy \sinh s}{R}(\gamma, xs) ds = \\ = \gamma \Gamma(-\gamma-1) r_1^{\gamma+2}(x, y) P_0(\gamma; x(1-y)^{-1}) + \\ + P_1(\gamma; x, y), \quad r_1(x, y) = [x^2 + (1-y)^2]^{1/2}, \quad (3.52)$$

где функция

$$P_0(\gamma; t) = - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \sin[(\gamma+1) \arctan t] + \\ + \gamma^{-1} (\gamma+1) \tan \pi\gamma/2 \times \\ \times \left\{ \frac{t \cos[(\gamma+1) \arctan t]}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{\sin[(\gamma+2) \arctan t]}{\gamma+2} \right\}, \quad t > 0,$$

и  $P_1(\gamma; x, y)$  – бесконечно дифференцируемая по  $x \geq 0, y \in [0, 1]$  функция с оценками

$$\|P_1(\gamma; x, y)\|_{C^k[0,1]} + \|\partial/\partial x P_1(\gamma; x, y)\|_{C^k[0,1]} \leq c_{k,\mu} x|\gamma|,$$

справедливыми при  $\operatorname{Re} \gamma \in (-2, -1 - \mu)$  и всех  $\mu > 0$ .

**Лемма 4.** Справедливо соотношение

$$\|v(x, y)\|_{W_p^1} + \|v'_x(x, y)\|_{L_p} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0. \quad (3.53)$$

*Доказательство.* В силу четности функции  $v(x, y)$  по  $y$  и (3.50), (3.52), (3.38) утверждение (3.53) достаточно доказать для функций

$$v_j(x, y) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M_j(\gamma) \gamma \Gamma(-\gamma - 1) r_1^{\gamma+2}(x, y) P_0(\gamma; x(1-y)^{-1}) d\gamma,$$

$$\sigma \in (-2, -1 - 1/p).$$

Из свойств функций  $M_0(\gamma), M_1(\gamma)$  (см. теорему 2) и равенств

$$P_0(-1; t) = 0, \quad P_0(0; t) = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} (\gamma - 1) P_0(\gamma, t) = -\frac{4}{\pi} \left( \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right)^3$$

получаем при  $\sigma_2 \in (1, \sigma_0)$  равенства

$$\begin{aligned} v_0(x, y) = & -\pi \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma-i\infty} \frac{\gamma}{D_0(\gamma)} \left\{ (\gamma + 1) \times \right. \\ & \times \int_{-1}^1 f'(t) \frac{(1+t)^{\gamma+2} - (1-t)^{\gamma+2}}{(1-t^2)^{\gamma+2}} dt + (\gamma + 2) \cot \pi \gamma / 2 \times \\ & \left. \times \int_{-1}^1 g'(t) \frac{(1+t)^{\gamma+2} + (1-t)^{\gamma+2}}{(1-t^2)^{\gamma+2}} dt \right\} r_1^{\gamma+2}(x, y) P_0(\gamma; x(1-y)) d\gamma, \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$v_1(x, y) = c_0 x^2 + c_1 x^3 +$$

$$+ \int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2-i\infty} M_1(\gamma) \gamma \Gamma(-\gamma - 1) r_1^{\gamma+2}(x, y) P_0(\gamma; x(1-y)) d\gamma$$

(см. (3.25)). Тогда из (3.54), оценок

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} P_0(\gamma; t) \right| \leq c \frac{t^{2-k}}{(1+t^2)^{2+k}} (1 + |\gamma|^2) \exp(\pi/2 |\operatorname{Im} \gamma|), \quad (3.55)$$

$$\operatorname{Re} \gamma \leq 2, \quad |\gamma - 1| \geq 1, \quad k = 0, 1,$$

с учетом оценок  $M_1(\gamma)$  из теоремы 2 и оценки гамма-функции

$$|\Gamma(-\gamma - 1)| \leq c \exp(-\pi/2|\operatorname{Im} \gamma|), \quad \operatorname{Re} \gamma = \sigma_2$$

(см. [155, с. 28]), получаем

$$\|v_1(x, y)\|_{C^3[0,1]} + \|\partial/\partial x v_1(x, y)\|_{C^2[0,1]} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0,$$

т. е., в частности, утверждение (3.53) для функции  $v_1(x, y)$ .

Далее, используя (3.54) и оценки (3.55), нетрудно заключить, что справедливость утверждения (3.53) для функции  $v_0(x, y)$  эквивалентно тому, что

$$\sum_{j=0}^2 \|K_j(x)l\|_{L_p[0,1]} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0, \quad l \in L_p[0, 1], \quad (3.56)$$

где интегральные операторы

$$(K_j(x)l)(y) = \int_0^1 K_j(x; y, t)l(t)dt$$

с ядрами

$$K_0(x; y, t) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathcal{K}(\gamma)(x^2 + y^2)^{\gamma/2+1} P_0(\gamma; xy^{-1})t^{-\gamma-2} d\gamma, \quad (3.57)$$

$$K_1(x; y, t) = \frac{\partial}{\partial y} K_0(x; y, t), \quad K_2(x; y, t) = \frac{\partial}{\partial x} K_0(x; y, t),$$

причем  $\mathcal{K}(\gamma)$  – аналитическая в полосе  $\operatorname{Re} \gamma \in (-2, -1)$  функция с оценками

$$|\mathcal{K}(\gamma)| \leq c_\mu |\gamma|^2 \exp(-\pi|\operatorname{Im} \gamma|), \quad \operatorname{Re} \gamma \in (-2 + \mu, -1 - \mu), \quad \forall \mu > 0.$$

Если функция  $l(t) \in C_0^1[0, 1]$ , то интегрируя по частям по  $t$  в выражениях для  $(K_j(x)l)(y)$ , получаем, с учетом (3.55), (3.57), при значениях  $x \in (0, 1]$ ,  $\sigma \in (-1 - 1/p, -1)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^2 \|K_j(x)l\|_{L_p[0,1]} &\leq c \|l'(t)\|_{L_p[0,1]} \cdot x \left( \int_0^1 (x+y)^{\sigma p} dy \right)^{1/p} \leq \\ &\leq cx^{\sigma+1+1/p} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для завершения доказательства леммы, в силу плотности множества  $C_0^1[0, 1]$  в пространстве  $L_p[0, 1]$  и теоремы Банаха-Штейнгауза, осталось показать равномерную по  $x \in (0, 1]$  ограниченность в пространстве  $L_p[0, 1]$  семейства интегральных операторов  $K_j(x)$ ,  $j = 0, 1, 2$ . Используя

(3.55), (3.57), имеем при  $x \in (0, 1]$ ,  $0 < y, t < 1$  оценки ядер

$$\sum_{j=0}^2 |K_j(x; y, t)| \leq c_\sigma \frac{y^{\sigma+1}}{t^{\sigma+2}}, \quad \sigma \in (-2, -1). \quad (3.58)$$

Тогда, выбирая при  $0 < t < y$  в (3.58) значение параметра  $\sigma$  из интервала  $(-2, -1 - 1/p)$ , а при  $0 < y < t$  — значение  $\sigma$  из интервала  $(-1 - 1/p, -1)$ , получаем на основании [246, с. 318] оценку

$$\sum_{j=0}^2 \|K_j(x)\|_{L_p [0,1]} \leq c, \quad x \in (0, 1].$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. В силу (3.47), леммы 4 и (3.5) утверждение теоремы будет доказано, если установить соотношения

$$\begin{aligned} & \|f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \exp(-\alpha_n) \cos(\alpha_n y) - f(y)\|_{W_p^1} + \\ & + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} g_n \exp(-\alpha_n) \cos(\alpha_n y) - g(y) \right\|_{L_p} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0, \\ & x \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(1)} \alpha_n^j \exp(-\alpha_n) \exp(i\alpha_n y) \right\|_{L_p} + \\ & + x \left\| \sum_{n=1}^{\infty} g_n \alpha_n^j \exp(-\alpha_n) \exp(i\alpha_n y) \right\|_{L_p} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0, \quad j = 0, 1. \end{aligned}$$

Отметим, что требуемые соотношения вытекают из (3.2)–(3.4) и свойств ядра Пуассона: [17, § 60]

$$P_r(\exp(it)) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2}, \quad r \in [0, 1), \quad |t| < \pi$$

и ограниченности в пространстве  $L_p$ ,  $1 < p < \infty$  преобразования Гильберта [48, с. 117].

Теорема доказана.

Сделаем одно замечание, основанное на анализе доказательства леммы 4. В локальных полярных координатах

$$x = r_1 \sin \theta, \quad y = 1 - r_1 \sin \theta, \quad r_1 \in (0, 1), \quad \theta \in (0, \pi/2),$$

введенных в окрестности угловой точки  $x = -0$ ,  $y = 1$  полуполосы, имеем выражение

$$\begin{aligned} \psi(\gamma, \theta) &:= P_0(\gamma; x(1-y)) = \\ &= -\sin \theta \sin((\gamma+1)\theta) + \gamma^{-1}(\gamma+1) \tan(\pi\gamma/2) \times \\ &\times \left\{ \sin \theta \cos[(\gamma+1)\theta] - \frac{\sin[(\gamma+2)\theta]}{\gamma+2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Из (3.50), (3.52), (3.54) и теоремы 2 следует, что в окрестности точки  $x = 0$ ,  $y = 1$  для функции  $v(x, y)$  справедливо представление

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \sum_{k=1}^{n-1} b_k r_1^{\gamma_k+2} \psi(\gamma_k, \theta) + \\ &+ v_0(x, y) + w(x, y) + O\left(r_1^{\operatorname{Re} \gamma_{N+2}}\right), \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$r_1 \rightarrow 0, \quad (r_1, \theta) \in V := \{r_1 \in (0, 1), \theta \in (0, \pi/2)\},$$

причем  $w \in C^\infty(\bar{V})$ , а функция  $v_0 \in C^\infty(V)$  была определена при доказательстве леммы 4. При этом функции  $r_1^{\gamma_k+2} \psi(\gamma_k, \theta)$ , где  $\gamma_k$  – корни  $D_0(\gamma)$  с  $\operatorname{Re} \gamma_k > 0$ , являются решениями однородной задачи Дирихле в клине  $r_1 > 0$ ,  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Таким образом, формулы (3.47), (3.54), (3.60) полностью описывают локальное поведение решения граничной задачи (3.1) в окрестности угловой точки  $x = 0$ ,  $y = 1$  (см. также [138]).

**3.1.5** Заметим, что условие (3.3) не ограничивает общности рассмотрений, так как это ограничение может быть снято с помощью частного решения вида  $u_0(x, y) = U(\lambda_k, y) \exp(i\lambda_k x)$  бигармонического уравнения, удовлетворяющего однородным условиям Дирихле на боковых сторонах полуполосы. Анализируя и обобщая рассуждения предыдущих пунктов, можно установить следующую теорему.

**Теорема 4.** Пусть для четных функций  $f, g$  выполнены условия

$$f \in W_p^k, \quad g \in W_p^{k-1}, \quad 1 < p < \infty,$$

для некоторого  $k = 1, 2, 3$ , причем

$$f(\pm 1) = 0, \quad k = 1; \quad f(\pm 1) = f'(\pm 1) = g(\pm 1) = 0, \quad k = 2;$$

$$f(\pm 1) = f'(\pm 1) = g(\pm 1) = g'(\pm 1) = 0, \quad k = 3.$$

Тогда существует бесконечно дифференцируемое при  $x > 0$ ,  $|y| \leq 1$  решение  $u$  граничной задачи (3.1), допускающее оценку (3.44) и удовлетворяющее соотношению

$$\|u(x, y) - f(y)\|_{W_p^k} + \|u'_x(x, y) - g(y)\|_{W_p^{k-1}} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0.$$

Такое решение является единственным, и найдется такая постоянная  $c > 0$ , не зависящая от  $f, g$ , что верна оценка

$$\|u(x, y)\|_{W_p^k} + \|u'_x(x, y)\|_{W_p^{k-1}} \leq cN_p^k(f, g), \quad \forall x > 0. \quad (3.61)$$

Если для  $g$  выполнено условие (3.3), то решение  $u$  задается выражением (3.14), где функция  $X(s)$  и последовательность  $X_n$  определены согласно следствию 1 и (3.18).

Отметим, что при доказательстве единственности решения используется оценка (3.61), установленная первоначально для решений вида (3.13)–(3.15), и прием из работы [407].

**3.1.6** Отметим, что ядро интегрального уравнения (3.21) является неотрицательным и удовлетворяет условию регулярности

$$1 - \int_0^\infty Q(s, t) dt = \frac{2 \sinh^2 s}{s \Delta(s)} > 0, \quad s > 0,$$

вытекающему из равенств (3.8) и (3.9). Отсюда, как отмечалось в § 2.2, следует, что если непрерывная при  $s \geq 0$  функция  $F(s)$  допускает оценку

$$|F(s)| \leq cs^{-1}, \quad s \geq 1, \quad (3.62)$$

то интегральное уравнение (3.21) имеет непрерывное ограниченное при  $s \geq 0$  решение  $X(s)$ , которое представимо рядом Неймана. В случае, когда функция  $F(s)$  имеет вид (3.20) и выполнено (3.62), это решение единственно на основании утверждения следствия 1.

Можно показать, что для функции  $F(s)$  вида (3.20) условие (3.62) выполняется, если  $f, g$  удовлетворяют условиям теоремы 4 со значением  $k = 4$ , причем  $f^{(3)}(1) = 0$ . Условие (3.62) будет выполнено также, если  $f, g$  удовлетворяют условиям теоремы 4 с  $k = 1$  при дополнительном требовании  $f(y) = g(y) = 0, |y| \in (y_0, 1]$  для некоторого  $y_0 \in (0, 1)$ . В обоих этих случаях из (3.39) получаем усиление асимптотических формул (3.40), а именно для любого  $\sigma < \sigma_0 \in (1, 2)$ :

$$X(s) = a + O(s^{-\sigma}), \quad s \rightarrow \infty, X_n = a + O(n^{-\sigma}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.63)$$

где  $a$  – некоторая постоянная, а значение  $\sigma_0$  определено согласно (3.26). На основе утверждения (3.63) можно использовать метод улучшенной редукции при численном решении системы (3.17), (3.18) [87].

**3.1.7** Аналогичным образом на основании метода суперпозиции исследуется и антисимметричная граничная задача (3.1), когда функции  $f, g$  являются



нечетными. Здесь решение  $u$  ищем в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty X(s) \frac{(\cosh s \sinh sy - y \sinh s \cosh sy)}{s^2 \sinh^2 s} \sin(xs) ds + \\ + \sum_{n=1}^\infty \left[ \frac{(-1)^n X_n}{2\alpha_n^2} x + (1 + \alpha_n x) f_n + g_n x \right] \exp(-\alpha_n x) \sin(\alpha_n y),$$

где разложения

$$f(y) = \sum_{n=1}^\infty f_n \sin(\alpha_n y), \quad g(y) = \sum_{n=1}^\infty g_n \sin(\alpha_n y).$$

При этом функция  $X(s)$  должна удовлетворять интегральному уравнению (3.21) с ядром

$$Q(s, t) = \frac{16s^3 \sinh^2 s}{\pi(\sinh s \cosh s - s)} \sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha_n^3}{(s^2 + \alpha_n^2)^2 (t^2 + \alpha_n^2)^2}$$

и правой частью

$$F(s) = \frac{4s^3 \sinh^2 s}{(\sinh s \cosh s - s)} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \alpha_n [(3\alpha_n^2 + s^2) f_n + 2\alpha_n g_n]}{(s^2 + \alpha_n^2)^2}.$$

Для последовательности  $X_n$  остаются справедливыми выражения (3.18). Неотрицательное ядро  $Q(s, t)$  удовлетворяет условию регулярности

$$1 - \int_0^\infty Q(s, t) dt = \frac{2(\sinh^2 - s^2)}{s(\sinh s \cosh s - s)} > 0, \quad s \geq 0,$$

а его "главная" часть имеет вид (3.27).

## 3.2 Бигармоническая задача в прямоугольнике

**3.2.1** В прямоугольнике  $P = \{(x, y) : |x| < h, |y| < 1\}$  рассматривается симметричная по переменным  $x$  и  $y$  задача Дирихле для однородного бигармонического уравнения:

$$\Delta^2 u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in P, \\ u(\pm h, y) = f(y), \quad u'_x(\pm h, y) = \pm g(y), \quad |y| < 1, \\ u(x, \pm 1) = 0, \quad u'_y(x, \pm 1) = 0, \quad |x| < h,$$

где  $f(y), g(y)$  – заданные четные функции и использованы обозначения  $u'_x = \partial u / \partial x, u'_y = \partial u / \partial y$ .

Приведем построение решения задачи (3.64) по методу суперпозиции. Поскольку в предыдущем параграфе при таком построении промежуточные выкладки были опущены, то здесь, для полноты изложения, сделаем это более подробным образом. Согласно общей схеме метода суперпозиции, с учетом четности искомой функции  $u$  по обоим переменным, решение задачи (3.64) ищем в виде

$$u(x, y) = A + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh \beta_n y + C_n y \sinh \beta_n y) \cos \beta_n x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cosh \alpha_n x + D_n x \sinh \alpha_n x) \cos \alpha_n y, \quad (3.65)$$

где последовательности  $\alpha_n = \pi n$ ,  $\beta_n = \pi n/h$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Каждое из функциональных слагаемых в рядах (3.65) удовлетворяет однородному бигармоническому уравнению и, значит, при определенных оценках на последовательности  $A_n, B_n, C_n, D_n$  (обеспечивающих сходимость рядов при  $(x, y) \in P$ ) функция  $u$  является бигармонической в прямоугольнике  $P$ . При этом неизвестные последовательности  $A_n, B_n, C_n, D_n$  с необходимыми оценками и число  $A$  должны определяться исходя из выполнения граничных условий задачи (3.64).

Далее будем использовать разложения в ряды Фурье:

$$f(y) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos \alpha_n y, \\ g(y) = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos \alpha_n y, \quad |y| < 1, \quad (3.66)$$

так что

$$f_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(y) dy, \quad f_n = \int_{-1}^1 f(y) \cos(\alpha_n y) dy, \quad n \geq 1, \\ g_n = \int_{-1}^1 g(y) \cos(\alpha_n y) dy, \quad n \geq 0.$$

Формальные выражения для частных производных функции  $u$  согласно (3.65) имеют вид

$$u'_x(x, y) = - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (A_n \cosh \beta_n y + C_n y \sinh \beta_n y) \sin \beta_n x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [(B_n \alpha_n + D_n) \sinh \alpha_n y + D_n x \cosh \alpha_n x] \cos \alpha_n y, \\ u'_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n \beta_n + C_n) \sinh \beta_n y + C_n \beta_n y \cosh \beta_n y] \cos \beta_n x -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (B_n \cosh \alpha_n x + D_n x \sinh \alpha_n x) \sin \alpha_n y.$$

Подставляя значения  $u(x, y)$  и ее производных на сторонах прямоугольника  $x = h$ ,  $|y| < 1$  и  $|x| < h$ ,  $y = 1$  в граничные условия из (3.64), получаем четыре функциональные уравнения:

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (A_n \cosh \beta_n y + C_n y \sinh \beta_n y) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cosh \alpha_n h + D_n h \sinh \alpha_n h) \cos \alpha_n y = f(y), \quad |y| < 1, \quad (3.67)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (B_n \alpha_n \sinh \alpha_n h + \\ + D_n (\sinh \alpha_n h + \alpha_n h \cosh \alpha_n h)) \cos \alpha_n y = g(y), \quad |y| < 1, \quad (3.68)$$

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh \beta_n + C_n \sinh \beta_n) \cos \beta_n x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (B_n \cosh \alpha_n x + D_n x \sinh \alpha_n x) = 0, \quad |x| < h, \quad (3.69)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [A_n \beta_n \sinh \beta_n + C_n (\sinh \beta_n + \\ + \beta_n \cosh \beta_n)] \cos \beta_n x = 0, \quad |x| < h. \quad (3.70)$$

Из (3.68), (3.70), приравнявая соответствующие коэффициенты Фурье, с использованием (3.66) получаем алгебраические соотношения

$$B_n \alpha_n \sinh \alpha_n h + D_n (\sinh \alpha_n h + \alpha_n h \cosh \alpha_n h) = g_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$A_n \beta_n \sinh \beta_n + C_n (\sinh \beta_n + \beta_n \cosh \beta_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

откуда имеем следующие равенства:

$$B_n = - \frac{\sinh \alpha_n h + \alpha_n h \cosh \alpha_n h}{\alpha_n \sinh \alpha_n h} D_n + \\ + \frac{g_n}{\alpha_n \sinh \alpha_n h}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.71)$$

$$A_n = - \frac{\sinh \beta_n + \beta_n \cosh \beta_n}{\beta_n \sinh \beta_n} C_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.72)$$

связывающие между собой коэффициенты  $B_n$ ,  $D_n$  и  $A_n$ ,  $C_n$ .

Для алгебраизации функциональных соотношений (3.67) и (3.69) используем разложения в ряды Фурье:

$$\begin{aligned} \cosh \beta_n y &= \frac{\sinh \beta_n}{\beta_n} + 2\beta_n \sinh \beta_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos \alpha_k y}{(\alpha_k^2 + \beta_n^2)}, \\ y \sinh \beta_n y &= \frac{\cosh \beta_n}{\beta_n} - \frac{\sinh \beta_n}{\beta_n^2} + \\ &+ 2\beta_n \cosh \beta_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos \alpha_k y}{(\alpha_k^2 + \beta_n^2)} + \\ &+ 2 \sinh \beta_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha_k^2 - \beta_n^2) \cos \alpha_k y}{(\alpha_k^2 + \beta_n^2)^2}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

и

$$\begin{aligned} \cosh \alpha_n x &= \frac{\sinh \alpha_n h}{\alpha_n h} + 2\alpha_n \sinh \alpha_n h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos \beta_k x}{h(\beta_k^2 + \alpha_n^2)}, \\ x \sinh \alpha_n x &= \frac{\cosh \alpha_n h}{\alpha_n} - \frac{\sinh \alpha_n h}{\alpha_n^2 h} + \\ &+ 2\alpha_n \cosh \alpha_n h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos \beta_k x}{(\beta_k^2 + \alpha_n^2)} + \\ &+ 2 \sinh \alpha_n h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta_k^2 - \alpha_n^2) \cos \beta_k x}{h(\beta_k^2 + \alpha_n^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Тогда, подставляя выражения (3.73), (3.74) в уравнениях (3.67) и (3.69), соответственно, а затем приравнивая соответствующие коэффициенты Фурье, получаем следующую бесконечную систему линейных алгебраических соотношений:

$$\begin{aligned} &A + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sinh \beta_k}{\beta_k} A_k + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{\cosh \beta_k}{\beta_k} - \frac{\sinh \beta_k}{\beta_k^2} \right) C_k = f_0, \quad (3.75) \\ &2(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta_k \sinh \beta_k}{\alpha_n^2 + \beta_k^2} A_k + 2(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta_k \cosh \beta_k}{\alpha_n^2 + \beta_k^2} C_k + \\ &+ 2(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha_n^2 - \beta_k^2) \sinh \beta_k}{(\alpha_n^2 + \beta_k^2)^2} = \\ &= f_n - B_n \cosh \alpha_n h - D_n h \sinh \alpha_n h, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.76) \end{aligned}$$

$$A + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sinh \alpha_k h}{\alpha_k h} B_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{\cosh \alpha_k h}{\alpha_k} - \frac{\sinh \alpha_k h}{\alpha_k^2 h} \right) D_k = 0, \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} 2(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha_k \sinh \alpha_k h}{h(\beta_n^2 + \alpha_k^2)} B_k + 2(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta_k \cosh \beta_k}{\alpha_n^2 + \beta_k^2} D_k + \\ + 2(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\beta_n^2 - \alpha_k^2) \sinh \alpha_k h}{h(\beta_n^2 + \alpha_k^2)^2} = \\ = -A_n \cosh \beta_n - C_n \sinh \beta_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.78)$$

Далее, подставляя в (3.76), (3.78) выражения для неизвестных  $B_n$  и  $A_n$  из равенств (3.71) и (3.72), после простых преобразований получаем уравнения

$$\begin{aligned} -4(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\beta_k^2 \sinh \beta_k}{(\alpha_n^2 + \beta_k^2)^2} C_k = \frac{\Delta(\alpha_n h)}{\alpha_n \sinh \alpha_n h} D_n + \\ + f_n - \frac{\cosh \alpha_n h}{\alpha_n \sinh \alpha_n h} g_n, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} -4(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha_k^2 \sinh \alpha_k h}{h(\beta_n^2 + \alpha_k^2)^2} D_k + 2(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{h(\beta_n^2 + \alpha_k^2)} = \\ = \frac{\Delta(\beta_n)}{\beta_n \sinh \beta_n} C_n, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.80)$$

где введено обозначение  $\Delta(s) = \sinh s \cosh s + s$ . Уравнения (3.79), (3.80) можно записать в виде следующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(\alpha_n h)}{\alpha_n \sinh \alpha_n h} D_n = -4(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta_k^2 \sinh \beta_k}{(\alpha_n^2 + \beta_k^2)^2} C_k - \\ - f_n + \frac{\cosh \alpha_n h}{\alpha_n \sinh \alpha_n h}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(\beta_n)}{\beta_n \sinh \beta_n} C_n = -4(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha_k^2 \sinh \alpha_k h}{h(\beta_n^2 + \alpha_k^2)^2} D_k + \\ + 2(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k g_k}{h(\beta_n^2 + \alpha_k^2)}, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.82)$$

а используя (3.71), (3.71) в равенствах (3.75), (3.77), имеем два дополнительных уравнения

$$A - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sinh \beta_k}{\beta_k^2} C_k = f_0, \quad (3.83)$$

$$A - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sinh \alpha_k h}{h \alpha_k^2} D_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{h \alpha_k^2} g_k = 0. \quad (3.84)$$

Понятно, что на данном этапе вывод полученной системы алгебраических уравнений является пока чисто формальным. Дальнейшее исследование возможности представления решения граничной задачи (3.64) в виде (3.65) связано с рассмотрением вопросов разрешимости и оценками решений системы (3.81)–(3.84).

### 3.2.2 Прежде всего, проведем нормировку неизвестных

$$\begin{aligned} h x_n &= (-1)^n \alpha_n^2 \sinh \alpha_n h D_n, \\ y_n &= -(-1)^n \beta_n^2 \sinh \beta_n C_n, \end{aligned} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.85)$$

Такая нормировка позволяет далее рассматривать ограниченные последовательности  $x_n$ ,  $y_n$  и, на самом деле, диктуется видом рядов в (3.65), а множитель  $(-1)^n$  введен для удобства дальнейших вычислений. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{4\alpha_n^3 \sinh^2 \alpha_n h}{h \Delta(\alpha_n h)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{(\alpha_n^2 + \beta_k^2)^2} - \\ &\quad - \frac{(-1)^n \alpha_n^3 \sinh^2 \alpha_n h}{h \Delta(\alpha_n h)} f_n + \\ &+ \frac{(-1)^n \alpha_n^2 \sinh \alpha_n h \cosh \alpha_n h}{h \Delta(\alpha_n h)} g_n, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{4\beta_n^3 \sinh^2 \beta_n}{\Delta(\beta_n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{(\beta_n^2 + \alpha_k^2)^2} - \\ &- \frac{2\beta_n^3 \sinh^2 \beta_n}{h \Delta(\beta_n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k g_k}{\beta_n^2 + \alpha_k^2}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.87)$$

При этом уравнения (3.83), (3.84) принимают вид

$$A = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{\beta_k^4} + f_0, \quad (3.88)$$

$$A = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{\alpha_k^4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{h \alpha_k^2} g_k = 0. \quad (3.89)$$

Покажем, что если  $x_k, y_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) – ограниченное решение системы (3.86), (3.87) и справедливы оценки

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k| < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} n^{-1} |g_n| < \infty, \quad (3.90)$$

то система уравнений (3.88), (3.89) относительно одного неизвестного коэффициента  $A$  сводится к одному уравнению, если только выполнено условие

$$f(\pm 1) = 0. \quad (3.91)$$

Далее используем равенства

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} &= \frac{\Delta(\beta)}{4\beta^3 \sinh^2 \beta} - \frac{1}{2\beta^4}, \quad \beta > 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta_n^2 + \alpha^2)^2} &= \frac{h\Delta(\alpha h)}{4\alpha^3 \sinh^2 \alpha h} - \frac{1}{2\alpha^4}, \quad \alpha > 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2 + \alpha^2} &= -\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{h \coth \alpha h}{2\alpha}, \quad \alpha > 0. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Итак, пусть  $x_k, y_k$  – решение системы (3.86), (3.87) с оценкой (3.90). Домножим уравнения (3.86) на  $h\Delta(\alpha_n h)/(\alpha_n^3 \sinh^2 \alpha_n h)$  и просуммируем полученные соотношения по  $n = 1, 2, \dots$ . Тогда, используя (3.92), получим равенство

$$\begin{aligned} h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta(\alpha_n h)}{\alpha_n^3 \sinh^2 \alpha_n h} x_n &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{(\beta_k + \alpha_n^2)^2} - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \coth \alpha_n h}{\alpha_n} g_n = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} y_k \left[ \frac{\Delta(\beta_k)}{\beta_k^3 \sinh^2 \beta_k} - \frac{2}{\beta_k^4} \right] - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \coth \alpha_n h}{\alpha_n} g_n. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Аналогичным образом, домножая уравнения (3.87) на  $\Delta(\beta_n)/(\beta_n^3 \sinh^2 \beta_n)$ , и суммируя по  $n = 1, 2, \dots$ , получаем, используя (3.92), следующее равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta(\beta_n)}{\beta_n^3 \sinh^2 \beta_n} y_n = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{(\alpha_k^2 + \beta_n^2)^2} - \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k g_k}{\beta_n^2 + \alpha_k^2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \left\{ \frac{h\Delta(\alpha_k h)}{\alpha_k^3 \sinh^2 \alpha_k h} - \frac{2}{\alpha_k^4} \right\} - \\
 &- \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k g_k \left\{ -\frac{1}{h\alpha_k^2} + \frac{\coth \alpha_k h}{\alpha_k} \right\}. \tag{3.94}
 \end{aligned}$$

Отметим, что возможность перестановки суммирования в двойных рядах из (3.93), (3.94) обеспечивается наложенными условиями ограниченности неизвестных  $x_n$ ,  $y_n$  и оценкой (3.90) на коэффициенты Фурье  $g_n$ . Сравнивая равенства (3.93) и (3.94), получим соотношение

$$- \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f_k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{\beta_k^4} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{\alpha_k^4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k g_k}{h\alpha_k^2}. \tag{3.95}$$

Таким образом, для совместимости двух равенств (3.88), (3.89) требуется выполнение равенства

$$- \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f_k = f_0,$$

что с учетом первого из разложений (3.66) приводит к условию (3.91).

Далее будем считать выполненными условия (3.90), (3.91), так что можно ограничиться рассмотрением системы уравнений (3.81), (3.82).

Отметим, что система уравнений (3.86), (3.87) рассматривалась в качестве примера в п. 5, §3 второй главы, где в (2.74) следует положить  $\mu_1 = h$ ,  $\mu_2 = 1/h$ . Эта система согласно равенствам (2.75) является регулярной. При этом, так как

$$1 - \frac{2 \sinh^2 s}{s\Delta(s)} > 0, \quad s > 0, \quad \text{и} \quad \frac{2 \sinh^2 s}{s\Delta(s)} = O(s^{-1}), \quad s \rightarrow \infty,$$

то это означает, что при выполнении оценки (см. (3.86), (3.87))

$$n^4 |f_n| + n^3 |g_n| + n^3 \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k g_k}{(\beta_n^2 + \alpha_k)} \right| \leq c < \infty, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{3.96}$$

система уравнений (3.86), (3.87) имеет ограниченное решение.

Кроме того, используя разложение (3.66) для функции  $g$ , имеем равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k g_k}{(\beta_n^2 + \alpha_k)} = \int_{-1}^1 \left[ \frac{(-1)^k \cos \alpha_k y}{\alpha_k^2 + \beta_n^2} \right] g(y) dy.$$

При этом [207, п. 5.4.5]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos \alpha_k y}{(\beta_n^2 + \alpha_k)} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(k\pi y)}{k^2 + (n/h)^2} =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi^2} \left[ \frac{\cosh(\pi n y/h)}{n/h \sinh(\pi n/h)} + \frac{1}{(n/h)^2} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{\cosh(\beta_n y)}{\pi \beta_n \sinh \beta_n} + \frac{1}{\beta_n^2} \right],
\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k g_k}{(\beta_n^2 + \alpha_k)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{\cosh(\beta_n y)}{\pi \beta_n \sinh \beta_n} + \frac{1}{\beta_n^2} \right] g(y) dy.$$

Таким образом, оценка (3.96) эквивалентна выполнению условий

$$n^4 |f_n| + n^3 |g_n| = O(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad \int_{-1}^1 g(y) dy = 0. \quad (3.97)$$

Более общее утверждение о разрешимости системы уравнений (3.86), (3.87) содержится в теореме 5 из § 2.3.

**3.2.3** Рассмотрим вопрос об асимптотическом поведении ограниченного решения  $x_n, y_n$  системы алгебраических уравнений (3.86), (3.87). Здесь можно использовать общие формулы из § 2.3, однако для полноты изложения и исходя из методических соображений проведем соответствующие рассуждения применительно прямо к системе (3.86), (3.87). При этом полное обоснование проводимых ниже рассмотрений можно найти в § 2.3.

Пусть  $\{x_n\}, \{y_n\}$  – ограниченное решение системы уравнений (3.86), (3.87). Положим последовательности

$$\begin{aligned}
F_n &= -\frac{(-1)^n \alpha_n^3 \sinh^2 \alpha_n h}{h \Delta(\alpha_n h)} f_n + \\
&+ \frac{(-1)^n \alpha_n^2 \sinh \alpha_n h \cosh \alpha_n h}{h \Delta(\alpha_n h)} g_n, \quad n = 1, 2, \dots, \\
G_n &= -\frac{2\beta_n^3 \sinh^2 \beta_n}{h \Delta(\beta_n)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k g_k}{\beta_n^2 + \alpha_k^2}, \quad n = 1, 2, \dots,
\end{aligned}$$

и введем в рассмотрение функции

$$X(s) = \frac{4s^3 \sinh^2(sh)}{h \Delta(sh)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{(s^2 + \beta_k^2)^2}, \quad s \geq 0, \quad (3.98)$$

$$Y(s) = \frac{4s^3 \sinh^2 s}{\Delta(s)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{(s^2 + \alpha_k^2)^2}, \quad s \geq 0, \quad (3.99)$$

так что в силу (3.86), (3.87) справедливы равенства

$$x_n = X(\alpha_n) + F_n, \quad y_n = Y(\beta_n) + G_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.100)$$

В силу ограниченности последовательностей  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  непосредственно из определений (3.98), (3.99) вытекает, что для непрерывных при  $s \geq 0$  функций  $X(s)$ ,  $Y(s)$  выполняются оценки

$$|F(s)| + |G(s)| = O(s^4), \quad s \rightarrow 0, \quad |F(s)| + |G(s)| = O(1), \quad s \rightarrow \infty.$$

В соответствии с этими оценками корректно определены преобразования Меллина функций  $X(s)$ ,  $Y(s)$ :

$$\begin{aligned} M(\gamma) &= \int_0^\infty X(s)s^{\gamma-1} ds, \\ N(\gamma) &= \int_0^\infty Y(s)s^{\gamma-1} ds, \quad \operatorname{Re} \gamma \in (-4, 0). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Далее, введем в рассмотрение функцию

$$\phi(s) = \frac{\sinh^2 s}{\Delta s} - 1$$

и представим функции  $X(s)$ ,  $Y(s)$  в виде

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{4s^3}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{(s^2 + \beta_k^2)^2} + X_0(s), \quad X_0(s) = \frac{4s^3 \phi(sh)}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{(s^2 + \beta_k^2)^2}, \\ Y(s) &= 4s^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{(s^2 + \alpha_k^2)^2} + Y_0(s), \quad Y_0(s) = 4s^3 \phi(s) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{(s^2 + \alpha_k^2)^2}. \end{aligned}$$

Тогда, используя значение интеграла

$$\int_0^\infty \frac{s^{\gamma+2}}{(s^2 + 1)^2} ds = \frac{\pi}{4} r(\gamma), \quad r(\gamma) = \frac{\gamma + 1}{\cos(\pi\gamma/2)}, \quad \operatorname{Re} \gamma \in (-3, 1),$$

получаем, что при  $\operatorname{Re} \gamma \in (-3, 0)$  справедливы равенства

$$\begin{aligned} M(\gamma) &= \frac{\pi r(\gamma)}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{\gamma-1} y_k + M_0(\gamma), \\ N(\gamma) &= \pi r(\gamma) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\gamma-1} y_k + N_0(\gamma), \end{aligned} \quad (3.102)$$

где функции

$$\begin{aligned} M_0(\gamma) &= \frac{4}{h} \sum_{k=1}^{\infty} y_k \int_0^\infty \frac{s^{\gamma+2} \phi(sh)}{(s^2 + \beta_k^2)^2} ds, \\ N_0(\gamma) &= 4 \sum_{k=1}^{\infty} x_k \int_0^\infty \frac{s^{\gamma+2} \phi(s)}{(s^2 + \alpha_k^2)^2} ds. \end{aligned}$$

В силу экспоненциального убывания  $\phi(s)$  при  $s \rightarrow \infty$  функции  $M_0(\gamma)$ ,  $N_0(\gamma)$  являются аналитическими в полуплоскости  $\text{Re } \gamma > -3$ .

Из формулы обращения Меллина и равенств (3.100) получаем при  $n = 1, 2, \dots$  соотношения

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M(\xi) \alpha_n^{-\xi} d\xi + F_n, \\ y_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} N(\xi) \beta_n^{-\xi} d\xi + G_n, \end{aligned} \quad (3.103)$$

где параметр  $\sigma \in (-4, 0)$  (см. (3.101)). Тогда, подставляя выражения (3.103) в (3.102), имеем при  $\text{Re } \gamma \in (-3, 0)$  равенства

$$\begin{aligned} M(\gamma) &= \frac{r(\gamma)}{2ih} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{\gamma-1} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} N(\xi) \beta_k^{-\xi} d\xi + \\ &+ \frac{\pi r(\gamma)}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{\gamma-1} G_k + M_0(\gamma), \\ N(\gamma) &= \frac{r(\gamma)}{2i} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\gamma-1} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M(\xi) \alpha_k^{-\xi} d\xi + \\ &+ \pi r(\gamma) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\gamma-1} F_k + N_0(\gamma). \end{aligned} \quad (3.104)$$

Отметим, что при выполнении условия  $-3 < \text{Re } \gamma < \text{Re } \xi = \sigma < 0$  в (3.104) можно изменить порядки интегрирования и суммирования. Тогда, используя равенства

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{\gamma-\xi-1} &= \left(\frac{\pi}{h}\right)^{\gamma-\xi-1} \zeta(\xi - \gamma + 1), \\ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\gamma-\xi-1} &= (\pi)^{\gamma-\xi-1} \zeta(\xi - \gamma + 1), \end{aligned}$$

где  $\text{Re } \xi > \text{Re } \gamma$  и  $\zeta(z)$  — дзета-функция Римана, получаем при  $-3 < \text{Re } \gamma < \text{Re } \xi = \sigma < 0$  равенства

$$\begin{aligned} M(\gamma) &= \frac{r(\gamma)}{2ih} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} N(\xi) \zeta(\xi - \gamma - 1) \left(\frac{\pi}{h}\right)^{\gamma-\xi-1} d\xi + \\ &+ \frac{\pi r(\gamma)}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{\gamma-1} G_k + M_0(\gamma), \\ N(\gamma) &= \frac{r(\gamma)}{2i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M(\xi) \zeta(\xi - \gamma - 1) (\pi)^{\gamma-\xi-1} d\xi + \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$+ \pi r(\gamma) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\gamma-1} F_k + N_0(\gamma). \quad (3.106)$$

Тогда, по теореме Коши о вычетах (простой полюс при  $\xi = \gamma$ ), имеем из (3.105), (3.106) равенства

$$M(\gamma) = r(\gamma)N(\gamma) + L_1(\gamma), \quad N(\gamma) = r(\gamma)M(\gamma) + L_2(\gamma), \quad (3.107)$$

причем

$$L_1(\gamma) = \frac{\pi r(\gamma)}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{\gamma-1} G_k + M_0(\gamma) + M_1(\gamma), \quad (3.108)$$

$$L_2(\gamma) = \pi r(\gamma) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\gamma-1} F_k + N_0(\gamma) + N_1(\gamma), \quad (3.109)$$

где функции

$$M_1(\gamma) = \frac{r(\gamma)}{2ih} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} N(\xi)\zeta(\xi-\gamma-1) \left(\frac{\pi}{h}\right)^{\gamma-\xi-1} d\xi,$$

$$N_1(\gamma) = \frac{r(\gamma)}{2i} \int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} M(\xi)\zeta(\xi-\gamma-1) (\pi)^{\gamma-\xi-1} d\xi,$$

и уже  $-3 < \sigma_1 < \operatorname{Re} \gamma < 0$ . Решая систему (3.107) относительно функций  $M(\gamma)$ ,  $N(\gamma)$ , получаем равенства

$$D(\gamma)M(\gamma) = L_1(\gamma) + r(\gamma)L_2(\gamma), \quad D(\gamma)N(\gamma) = L_2(\gamma) + r(\gamma)L_1(\gamma),$$

где функция

$$D(\gamma) = 1 - r^2(\gamma) = \frac{D_0(\gamma)}{\cos^2(\pi\gamma/2)}, \quad D_0(\gamma) = \cos^2(\pi\gamma/2) - (\gamma+1)^2.$$

Отсюда, используя формулу обращения Меллина, получаем соотношения

$$\begin{aligned} X(s) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) \frac{L_1(\gamma) + (\gamma+1)L_2(\gamma)}{D_0(\gamma)} \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) s^{-\gamma} d\gamma, \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) \frac{L_2(\gamma) + (\gamma+1)L_1(\gamma)}{D_0(\gamma)} \cos\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) s^{-\gamma} d\gamma, \end{aligned} \quad (3.111)$$

где  $-3 < \sigma_1 < \sigma < 0$ .

Формулы (3.110), (3.111) имеют определяющее значение при получении асимптотических выражений для функций  $X(s)$ ,  $Y(s)$  при  $s \rightarrow \infty$ . Кроме того, выражения (3.100) позволяют по асимптотическому поведению функций  $X(s)$ ,  $Y(s)$  определить поведение последовательностей  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Как следует из формул (3.110), (3.111), асимптотика функций  $X(s)$ ,  $Y(s)$  определяется корнями аналитической функции  $D_0(\gamma)$ , расположенными в полуплоскости  $\operatorname{Re} \gamma \geq 0$  и аналитическими свойствами функций  $L_1(\gamma)$ ,  $L_2(\gamma)$ , определенными выражениями (3.108), (3.109).

### 3.3 Связь методов суперпозиции и собственных функций

**3.3.1** Рассмотрение симметричной граничной задачи (3.1) по методу собственных функций приводит к следующему выражению для решения:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k(y) \exp(i\lambda_k x), \quad x > 0, \quad |y| \leq 1, \quad \operatorname{Im} \lambda_k > 0, \quad (3.112)$$

где  $z_k(y)$  – собственные функции пучка дифференциальных операторов

$$\mathcal{L}(\lambda)z(y) := \left( \frac{d^2}{dy^2} - \lambda^2 \right)^2 z(y), \quad |y| \leq 1, \quad z(\pm 1) = z'(\pm 1) = 0, \quad (3.113)$$

соответствующие собственным значениям  $\lambda_k$  с  $\operatorname{Im} \lambda_k > 0$ . При этом  $a_k$  – неизвестные комплекснозначные коэффициенты, а  $\lambda_k$  определяются как корни целой функции:

$$\Delta(\lambda) = \sinh \lambda \cosh \lambda + \lambda.$$

Соответствующие собственные функции, являющиеся решениями краевой задачи (3.113) с  $\lambda = \lambda_k$ , задаются выражениями

$$\begin{aligned} z_k(y) &= U(\lambda_k, y) = \\ &= (\lambda_k \cosh \lambda_k + \sinh \lambda_k) \cosh \lambda_k y - \lambda_k y \sinh \lambda_k \sinh \lambda_k y = \\ &= -\sinh^2 \lambda_k (\sinh \lambda_k \cosh \lambda_k y - y \cosh \lambda_k \sinh \lambda_k y). \end{aligned}$$

Если коэффициенты  $a_k$  образуют ограниченную последовательность, то (см. (3.16)) функция  $u(x, y)$  из выражения (3.112) является бесконечно дифференцируемой при  $x > 0$ ,  $|y| \leq 1$ , экспоненциальным образом убывает при  $x \rightarrow \infty$  и удовлетворяет, на основании (3.113), бигармоническому уравнению в полуполосе  $S$  и однородным условиям Дирихле на боковых сторонах  $x > 0$ ,  $y = \pm 1$ . При этом, удовлетворение граничным условиям (3.1) на торце полуполосы  $x = 0$  и, в частности, вопрос об определении коэффициентов  $a_k$  приводят к необходимости исследования вопроса о справедливости двукратного разло-

жения

$$\begin{pmatrix} f(y) \\ g(y) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \begin{pmatrix} z_k(y) \\ i\lambda_k z_k(y) \end{pmatrix}, \quad |y| < 1, \quad \text{Im } \lambda_k > 0. \quad (3.114)$$

Отметим, что вопрос о возможности и характере сходимости разложения (3.114) по части собственных функций пучка дифференциальных операторов  $\mathcal{L}(\lambda)$  не является тривиальным и имеет самостоятельный интерес в рамках спектральной теории несамосопряженных операторов. В данном пункте на основании рассмотрений § 3.1 излагается конструктивный подход к получению разложения решения граничной задачи (3.1) в виде ряда Фурье (3.112). Этот подход основан на использовании представления решения задачи (3.1) в виде (3.13)–(3.15) и аналитических свойствах функции  $T(\lambda)$  из выражения (3.26).

В п. 2 аналогичные построения приведены для получения разложения по собственным функциям решения граничной задачи (3.64) в прямоугольнике.

Основной результат данного пункта заключен в следующей теореме.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (3.2), (3.3). Тогда решение  $u$  граничной задачи (3.1), определенное согласно (3.14), допускает разложение (3.112) с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{iT(\lambda_k)}{\cosh^2 \lambda_k} \equiv \\ &\equiv \frac{i}{\cosh^2 \lambda_k^2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{(\lambda_k^2 + \alpha_n^2)^2} + T_0(\lambda_k) \right], \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.115)$$

*Доказательство.* Введем в рассмотрение контуры в комплексной плоскости

$$\Gamma_m = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = R_m, \text{Im } \lambda \geq 0\},$$

$$R_m = \pi(m + 1/4), \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.116)$$

Тогда, следуя рассмотрению [349], можно доказать на этих контурах оценку снизу

$$|\Delta(\lambda)| \geq c(|\lambda| + \exp(2|\text{Re } \lambda|)), \quad \lambda \in \Gamma_m, \quad (3.117)$$

справедливую при всех  $m \geq m_0$  для некоторого  $m_0 \geq 1$ .

Определим мероморфную по  $\lambda$  функцию (см. (3.26))

$$\Phi(\lambda, y) = 2T(\lambda) \frac{U(\lambda, y)}{\Delta(y)},$$

зависящую от параметра  $y \in [-1, 1]$ . Согласно рассмотрению § 3.1 функция  $\Phi(\lambda, y)$  при каждом  $y \in [-1, 1]$  в полуплоскости  $\text{Im } \lambda \geq 0$  имеет простые полюсы в точках  $\lambda = \lambda_k$  и полюсы второго порядка в точках  $\lambda = i\alpha_n$  (отметим, что  $\lambda_k \neq i\alpha_n$  при всех  $k, n = 1, 2, \dots$ ).

Используя теорему Коши о вычетах, для  $m \geq m_0$  с учетом четности функции  $\Phi(\lambda, y)$  по переменной  $\lambda$  имеем из (3.14), (3.26) для функции  $u_1$  представление

$$\begin{aligned} u_1(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \Phi(\lambda, y) \exp(i\lambda x) d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_{R_m} \Phi(s, y) \cos(sx) ds + \\ & + \sum_{|\lambda_k| < R_m} a_k z_k(y) \exp(i\lambda_k x) + \\ & + i \sum_{\alpha_n < R_m} \operatorname{Res}_{\lambda=i\alpha_n} \{ \Phi(\lambda, y) \exp(i\lambda x) \} \end{aligned} \quad (3.118)$$

с коэффициентами

$$a_k = \frac{2iT(\lambda_k)}{\Delta'(\lambda_k)} = \frac{iT(\lambda_k)}{\cosh^2(\lambda_k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Далее, с целью упрощения выражения (3.118), покажем, что справедливы равенства для вычетов

$$\begin{aligned} & i \operatorname{Res}_{\lambda=i\alpha_n} \{ \Phi(\lambda, y) \exp(i\lambda x) \} = \\ & = - \left[ \frac{(-1)^{n+1} X_n}{2\alpha_n^3} (1 + \alpha_n x) + g_n x \right] \exp(-\alpha_n x) \cos(\alpha_n y). \end{aligned} \quad (3.119)$$

Действительно, проводя необходимые вычисления, имеем

$$\begin{aligned} U(i\alpha_n, y) &= i(-1)^n \alpha_n \cos(\alpha_n y), \quad U'_\lambda(i\alpha_n, y) = 2(-1)^n \cos(\alpha_n y), \\ \Delta(i\alpha_n) &= i\alpha_n, \quad \Delta'(i\alpha_n) = 2 \end{aligned}$$

и тогда получаем значения вычетов

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\lambda=i\alpha_n} \frac{U(\lambda, y) \exp(i\lambda x)}{\Delta(\lambda)(\lambda^2 + \alpha_n^2)} &= \frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{U(\lambda, y) \exp(i\lambda x)}{\Delta(\lambda)(\lambda^2 + \alpha_n^2)} \right\} \Big|_{\lambda=i\alpha_n} = \\ &= - \frac{(-1)^n i}{4\alpha_n^3} (1 + \alpha_n x) \exp(-\alpha_n x) \cos(\alpha_n y). \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом (3.6), (3.26) имеем равенство

$$\begin{aligned} & \operatorname{Res}_{\lambda=i\alpha_n} \{ \Phi(\lambda, y) \exp(i\lambda x) \} = \\ & = 2i \{ X_n - 2(-1)^n \alpha_n^3 f_n - 2(-1)^n \alpha_n^2 g_n \} \times \\ & \quad \times \operatorname{Res}_{\lambda=i\alpha_n} \left\{ \frac{U(\lambda, y) \exp(i\lambda x)}{\Delta(\lambda)(\lambda^2 + \alpha_n^2)^2} \right\} + \\ & + 2(-1)^n i g_n \operatorname{Res}_{\lambda=i\alpha_n} \left\{ \frac{U(\lambda, y) \exp(i\lambda x)}{\Delta(\lambda)(\lambda^2 + \alpha_n^2)} \right\} = \end{aligned}$$

$$= \left\{ \left[ X_n - 2(-1)^n \alpha_n^3 f_n - 2(-1)^n \alpha_n^2 g_n \right] \frac{(-1)^n (1 + \alpha_n x)}{2\alpha_n^3} + g_n \alpha_n^{-1} \right\} \exp(-\alpha_n x) \cos(\alpha_n y),$$

откуда и следует справедливость равенств (3.119).

Таким образом, из (3.6), (3.14), (3.26) и (3.118), (3.119) получаем, что для функции  $u$  справедливо представление

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{|\lambda_k| < R_m} a_k z_k(y) \exp(i\lambda_k x) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \Phi(\lambda, y) \exp(i\lambda x) d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_{R_m}^{\infty} \Phi(s, y) \cos(sx) ds + \\ &+ \sum_{\alpha_n > R_m} \left\{ \left[ \frac{(-1)^{n+1} X_n}{2\alpha_n^3} + f_n \right] (1 + \alpha_n x) + g_n \right\} \exp(-\alpha_n x) \cos(\alpha_n y). \end{aligned} \quad (3.120)$$

Отметим, что из оценок (3.42) и оценки

$$|T(\lambda)| \leq c, \quad \lambda \in \Gamma_m, \quad (3.121)$$

устанавливаемой на основании (3.5), (3.40), следует, что для любых значений  $y \in (-1, 1)$  и  $x > 0$  правая часть в выражении (3.120) стремится к нулю при  $m \rightarrow \infty$  (см. (3.117)). Таким образом, справедливо равенство

$$u(x, y) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda_k| < R_m} a_k z_k(y) \exp(i\lambda_k x), \quad x > 0, \quad |y| \leq 1. \quad (3.122)$$

При этом, из (3.16) имеем оценки

$$|a_k z_k(y) \exp(i\lambda_k x)| \leq ck^\nu \exp(-\pi kx), \quad x > 0, \quad |y| \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и тогда из (3.122) получаем для функции  $u(x, y)$  разложение по собственным функциям (однородным решениям) (3.122) с коэффициентами  $a_k$ , определяемыми соотношениями (3.115). Теорема доказана.

Отметим, что при выполнении для заданных функций  $f(y)$ ,  $g(y)$  условий из п. 6 § 3.1 коэффициенты  $a_k$  разложения (3.112) определяются явным образом, согласно выражениям (3.115), (3.18), и (3.20), (3.6). Кроме того, из теоремы 1 вытекает, что в оценке (3.44) можно положить  $\delta = \min \operatorname{Im} \lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$



Разложение (3.112) было получено исходя из представления (3.118) на основании равенств (3.119). Покажем, каким образом можно установить справедливость формул (3.112), (3.115), (3.119), исходя из общих соображений.

Так как  $\lambda = i\alpha_n$  является полюсом второго порядка функции  $\Phi(\lambda, y)$ , то тогда

$$\begin{aligned} & i \operatorname{Res}_{\lambda=i\alpha_n} \Phi(\lambda, y) \exp(i\lambda x) = \\ & = [a_n^{(1)} v_{1,n}(y) + a_n^{(2)} x v_{2,n}(y)] \exp(-\alpha_n x) \end{aligned} \quad (3.123)$$

с некоторыми постоянными  $a_n^{(1)}$ ,  $a_n^{(2)}$ . При этом, так как четная по  $y$  функция  $U(\lambda, y) \exp(i\lambda x)$  является бигармонической и  $U'_y(\lambda, 1) = 0$ ,  $\lambda \in C$ , то с точностью до нормировки имеем

$$v_{1,n}(y) = v_{2,n}(y) = \cos(\alpha_n y), \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда, если следовать доказательству теоремы 1 без использования равенств (3.119), то вместо (3.112) получаем для  $u(x, y)$  при  $x > 0$ ,  $|y| \leq 1$  представление

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k(y) \exp(i\lambda_k x) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n^{(1)} + b_n) + (a_n^{(2)} + d_n) x] \exp(-\alpha_n x) \cos(\alpha_n y), \end{aligned} \quad (3.124)$$

с коэффициентами

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1} X_n}{2\alpha_n^3} + f_n, \quad d_n = \frac{(-1)^{n+1} X_n}{2\alpha_n^2} + \alpha f_n + g_n. \quad (3.125)$$

При этом, так как  $u(x, 1) = 0$ ,  $x > 0$  и  $z_k(1) = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то из (3.124) заключаем, что  $a_n^{(1)} + b_n = a_n^{(2)} + d_n = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , т. е. справедливы равенства (3.119) (см. (3.123), (3.125)) и (3.112), (3.115).

С помощью рассмотренного в данном пункте подхода к получению разложения по однородным решениям (3.112) можно исследовать вопрос о справедливости и свойствах сходимости двукратного разложения (3.114) (см. далее § 5.1, § 5.1).

**3.3.2** Рассмотрим вопрос о разложении по собственным функциям решения граничной задачи (3.64) в прямоугольнике.

В терминах неизвестных  $x_n$ ,  $y_n$  решение задачи (3.64) допускает представление

$$\begin{aligned} & u(x, y) = \\ & = A - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n y_n}{\beta_n^3 \sinh \beta_n} \{ \beta_n y \sinh \beta_n y - (1 + \beta_n \coth \beta_n) \cosh \beta_n y \} \cos \beta_n x + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n h x_n}{\alpha_n^3 \sinh \alpha_n h} [\alpha_n x \sinh \alpha_n x - (1 + \alpha_n h \coth \alpha_n h) \cosh \alpha_n x] \cos \alpha_n y + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n \cosh \alpha_n x}{\alpha_n \sinh \alpha_n h} \cos \alpha_n y. \tag{3.126}
\end{aligned}$$

Тогда в соответствии с (3.126) решение задачи (3.64) можно представить в виде суммы

$$u = u_1 + u_2, \tag{3.127}$$

где функции

$$\begin{aligned}
u_1 &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n y_n}{\beta_n^3 \sinh \beta_n} [\beta_n y \sinh \beta_n y - (1 + \beta_n \coth \beta_n) \cosh \beta_n y] \cos \beta_n x, \\
u_2 &= A + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n h x_n}{\alpha_n^3 \sinh \alpha_n h} [\alpha_n x \sinh \alpha_n x - (1 + \alpha_n h \coth \alpha_n h) \cosh \alpha_n x] \cos \alpha_n y + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n \cosh \alpha_n x}{\alpha_n \sinh \alpha_n h} \cos \alpha_n y.
\end{aligned}$$

При этом, используя в выражении для  $u_1$  равенства (3.87) для неизвестных  $y_n$ , получаем соотношение

$$\begin{aligned}
u_1(x, y) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\Delta(\beta_n)} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{(\beta_n^2 + \alpha_k^2)^2} - \frac{1}{2h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k g_k}{\beta_n^2 + \alpha_k^2} \right] \times \\
& \times \{ \beta_n y \sinh \beta_n \sinh \beta_n y - (\sinh \beta_n + \beta_n \cosh \beta_n) \cosh \beta_n y \} \cos \beta_n x.
\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение мероморфную функцию

$$F(z) = \frac{4}{\Delta(z)} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{(z^2 + \alpha_k^2)^2} - \frac{1}{2h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k g_k}{z^2 + \alpha_k^2} \right],$$

и пусть

$$a(z; y) = zy \sinh z \sinh zy - (\sinh z + z \cosh z) \cosh zy.$$

Функция  $F(z)$  имеет полюсы второго порядка в точках  $z = \pm i\alpha_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и полюсы первого порядка в точках  $z = \pm \lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , где  $\lambda_k$  – корни функции  $\Delta(z) = \sinh z \cosh z + z$ ,  $\text{Im } z > 0$ . При этом найдется такое  $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ , что в углах  $|\tan z| \leq \tan \theta_0$ ,  $z \neq 0$ , функция  $F(z)$  является ограниченной.

Рассмотрим интеграл

$$J(x, y) = \frac{h}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(z)a(z; y)}{\sin hz} \cos xz dz,$$

где отрицательно ориентированный контур

$$\gamma = \{z = |z| \exp(-i\theta_0)\} \cup \{z = |z| \exp i\theta_0\}.$$

По теореме Коши о вычетах имеем равенство

$$u_1(x, y) = J, \quad (3.128)$$

при выводе которого используются условия (3.97) и ограниченность последовательности  $x_k$ .

Используя четность функции  $F(z)a(z; y)$  по  $z$ , получаем, что интеграл  $J$  можно записать в виде

$$J(x, y) = \frac{h}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{F(z)a(z; y)}{\sin hz} \cos xz dz, \quad |x| \leq h, \quad (3.129)$$

где контур

$$\gamma_0 = \{z = |z| \exp [i(\pi - \theta_0)]\} \cup \{z = |z| \exp (i\theta_0)\}.$$

Здесь при  $|x| < h$  используем лемму Жордана вместе с соотношением

$$F(z)a(z; y) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty,$$

справедливым в углах, примыкающих к вещественной оси. Для справедливости (3.129) при  $x = \pm h$  требуется выполнение условия  $F(z)a(z; y) = o(|z|^{-1})$ ,  $z \rightarrow \infty$ , в тех же углах.

Для применения теоремы о вычетах к интегралу  $J$ , представленному выражением (3.129), требуется указать последовательность контуров  $\gamma_j$ ,  $j \rightarrow \infty$ , на которых функция  $G(z; y) = F(z)a(z; y)$  допускает оценки:

а) при  $|x| < h$  функция  $G(x, y, z)$  возрастает не быстрее полинома при  $z \rightarrow \infty$ ;

б) при  $x = \pm h$  функция  $G(x, y, \pm h) = o(|z|^{-1})$ ,  $z \rightarrow \infty$ , когда  $z$  находится в углах  $\Theta = \{\arg z \in (\theta_0, \pi - \theta_0)\}$ .

При этом справедливо равенство

$$\begin{aligned} R_k(x, y) &:= \operatorname{Res}_{z=i\alpha_k} \frac{F(z)a(z; y)}{\sin hz} \cos xz = \\ &= -2 \frac{(-1)^k}{h} g_k R_{k,1} + 4x_k R_{k,0}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где вычеты

$$R_{k,1} = \left\{ \frac{a(z; y) \cos xz}{(z + i\alpha_k)\Delta(z) \sin hz} \right\} \Big|_{z=i\alpha_k},$$

$$R_{k,0} = \frac{d}{dz} \left\{ \frac{a(z; y) \cos xz}{(z + i\alpha_k)^2 \Delta(z) \sin hz} \right\} \Bigg|_{z=i\alpha_k}.$$

Тогда, используя равенства

$$\begin{aligned} \sin(i\alpha_k h) &= i \sinh \alpha_k h, \quad \cos(i\alpha_k h) = \cosh \alpha_k h, \\ a(i\alpha_k, y) &= -i(-1)^k \alpha_k \cos \alpha_k y, \quad a_z(i\alpha_k, y) = -2(-1)^k \cos \alpha_k y, \\ \Delta(i\alpha_k) &= i\alpha_k, \quad \Delta'(i\alpha_k) = 2, \end{aligned}$$

получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} R_{k,1} &= \left\{ \frac{-i(-1)^k \alpha_k}{2i^3 \alpha_k^2 \sinh \alpha_k h} \right\} \cosh \alpha_k x \cos \alpha_k y = \frac{(-1)^k \cosh \alpha_k x \cos \alpha_k y}{2\alpha_k \sinh \alpha_k h}, \\ R_{k,0} &= a_z(i\alpha_k; y) \left\{ \frac{\cos xz}{(z + i\alpha_k)^2 \Delta(z) \sin hz} \right\} \Bigg|_{z=i\alpha_k} + \\ &+ a(i\alpha_k y) \left\{ \frac{-x \sin xz}{(z + i\alpha_k)^2 \Delta(z) \sin hz} \right\} \Bigg|_{z=i\alpha_k} - a(i\alpha_k; y) \cos(i\alpha_k x) \times \\ &\times \left\{ \frac{[2\Delta(z) + (z + i\alpha_k) \Delta'(z)] \sin hz + (z + i\alpha_k) \Delta(z) h \cos hz}{(z + i\alpha_k)^3 \Delta^2(z) \sin^2 hz} \right\} \Bigg|_{z=i\alpha_k} = \\ &= -2(-1)^k \cos \alpha_k y \left[ \frac{\cos xz}{(z + i\alpha_k)^2 \Delta(z) \sin hz} \right] \Bigg|_{z=i\alpha_k} - \\ &- i(-1)^k \alpha_k \cos \alpha_k y \left[ \frac{-x \sin xz}{(z + i\alpha_k)^2 \Delta(z) \sin hz} \right] \Bigg|_{z=i\alpha_k} + \\ &+ i(-1)^k \alpha_k \cos \alpha_k y \cosh \alpha_k x \times \\ &\times \left\{ \frac{[2\Delta(z) + (z + i\alpha_k) \Delta'(z)] \sin hz + (z + i\alpha_k) \Delta(z) h \cos hz}{(z + i\alpha_k)^3 \Delta^2(z) \sin^2 hz} \right\} \Bigg|_{z=i\alpha_k} = \\ &= -\frac{(-1)^k \cos \alpha_k y \cosh \alpha_k x}{2\alpha_k^3 \sinh \alpha_k h} - \frac{(-1)^k \cos \alpha_k y x \sinh \alpha_k x}{4\alpha_k^2 \sinh \alpha_k h} + \\ &+ (-1)^k \cos \alpha_k y \cosh \alpha_k x \frac{4 \sinh \alpha_k h + h \alpha_k \cosh \alpha_k h}{4\alpha_k^3 \sinh^2 \alpha_k h} = \\ &= \frac{(-1)^k \cos \alpha_k y}{4\alpha_k^3 \sinh^2 \alpha_k h} [-3 \sinh \alpha_k h \cosh \alpha_k x + x \alpha_k \sinh \alpha_k h \sinh \alpha_k x + \\ &+ (4 \sinh \alpha_k h + h \alpha_k \cosh \alpha_k h) \cosh \alpha_k x] = \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^k \cos \alpha_k y}{4\alpha_k^3 \sinh^2 \alpha_k h} [(\sinh \alpha_k h + h\alpha_k \cosh \alpha_k h) \cosh \alpha_k x - x\alpha_k \sinh \alpha_k h \sinh \alpha_k x].$$

Таким образом, имеем значение вычета

$$R_k(x, y) = -\frac{g_k \cosh \alpha_k x \cos \alpha_k y}{h \alpha_k \sinh \alpha_k h} + x_k \frac{(-1)^k \cos \alpha_k y}{\alpha_k^3 \sinh^2 \alpha_k h} [(\sinh \alpha_k h + h\alpha_k \cosh \alpha_k h) \cosh \alpha_k x - x\alpha_k \sinh \alpha_k h \sinh \alpha_k x]. \quad (3.130)$$

Далее, вычеты

$$\begin{aligned} \tilde{R}_k &:= \operatorname{Res}_{z=\lambda_k} \frac{F(z)a(z; y)}{\sin hz} \cos xz = \\ &= \frac{a(\lambda_k; y)}{\Delta'(\lambda_k)} \left\{ 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{(\lambda_k^2 + \alpha_k^2)^2} - \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k g_k}{\lambda_k^2 + \alpha_k^2} \right\} \frac{\cos(\lambda_k x)}{\sin \lambda_k h}. \end{aligned}$$

При этом с помощью непосредственных вычислений получаем выражение

$$\begin{aligned} \frac{a(\lambda_k y)}{\Delta'(\lambda_k)} &= \frac{\lambda_k y \sinh \lambda_k \sinh \lambda_k y - (\sinh \lambda_k + \lambda_k \cosh \lambda_k) \cosh \lambda_k y}{\cosh^2 \lambda_k + \sinh^2 \lambda_k + 1} = \\ &= \frac{\tanh^2 \lambda_k}{2} [\sinh \lambda_k \cosh \lambda_k y - y \cosh \lambda_k \sinh \lambda_k y]. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно (3.128) имеем равенство

$$u_1(x, y) = h \sum_{k=1}^{\infty} R_k(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(y) \cos \lambda_k x, \quad (3.131)$$

где функция

$$v_k(y) = \sinh \lambda_k \cosh \lambda_k y - y \cosh \lambda_k \sinh \lambda_k y$$

и коэффициенты

$$c_k = \frac{h \tanh^2 \lambda_k}{\sinh \lambda_k h} \left[ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{(\lambda_k^2 + \alpha_k^2)^2} - \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k g_k}{\lambda_k^2 + \alpha_k^2} \right]. \quad (3.132)$$

Отметим, что функция  $u_2$  из представления (3.127) может быть записана в виде (см. (3.130))

$$u_2 = A - h \sum_{k=1}^{\infty} R_k(x, y),$$

и тогда из (3.127), (3.131) для решения  $u(x, y)$  получаем разложение в ряд по однородным решениям (собственным функциям)

$$u(x, y) = A + \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(y) \cos \lambda_k x \quad (3.133)$$

с коэффициентами  $c_k$ , заданными выражениями (3.132).

### 3.4 Задача Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе с криволинейным торцом. Сведение к системе интегральных уравнений

**3.4.1** Пусть вещественная функция  $l(y) \in C^2[-1, 1]$ , причем выполнены условия  $l(\pm 1) = l'(\pm 1) = 0$ . В полуполосе

$$\Pi_+ = \{(x, y) : x > l(y), |y| < 1\}$$

с криволинейным торцом  $\Gamma = \{x = l(y), |y| < 1\}$  рассматривается в классической постановке [279, с. 357] задача Дирихле для однородного бигармонического уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \Pi_+, \quad u \in C^4(\Pi_+) \cap C^1(\bar{\Pi}_+), \\ u|_{\Gamma} &\equiv u(l(y), y) = f(y), \quad |y| < 1, \end{aligned} \quad (3.134)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} \equiv [u'_x(l(y), y) - l(y)u'_y(l(y), y)]/[1 + l'(y)]^{1/2} = g(y), \quad |y| < 1,$$

$$u(x, \pm 1) = u'_y(x, \pm 1) = 0, \quad x > 0.$$

Таким образом, искомое решение  $u$ , в отличие от обобщенной постановки задачи Дирихле (см. [138, 193]), считается принадлежащим банахову пространству  $C^1(\bar{\Pi}_+)$ :

$$\|u\|_{C^1(\bar{\Pi}_+)} = \sup_{(x, y) \in \bar{\Pi}_+} \{|u(x, y)| + |\nabla u(x, y)|\} < \infty.$$

На функции  $f(y)$ ,  $g(y)$  накладываются естественные условия

$$\begin{aligned} f &\in C^1 = C^1[-1, 1], \quad g \in C = C[-1, 1], \\ f(\pm 1) &= f'(\pm 1) = g(\pm 1) = 0. \end{aligned} \quad (3.135)$$

В данном параграфе показано сведение граничной задачи (3.134) к системе интегральных уравнений на отрезке  $[-1, 1]$ . Эта система является фредголь-

мовой в банаховом пространстве

$$\mathcal{B} = \left\{ (q_1, q_2) \in C_0 \oplus C_0 : \int_{-1}^1 (q_1(t) + l'(t) q_2(t)) dt = 0 \right\}, \quad (3.136)$$

$$C_0 = C_0[-1, 1] = \{p \in C : p(\pm 1) = 0\}.$$

Предложенный здесь способ сведения задачи (3.134) к системе интегральных уравнений на отрезке (или на кривой  $\Gamma$ ) возник на основе анализа метода Шермана–Лауричелла (см. [181, § 101], [197, гл. 4]), используемого при исследовании плоских задач теории упругости в ограниченных областях. В данном параграфе для избавления от необходимости удовлетворения однородным граничным условиям из (3.134) на бесконечных боковых сторонах полуполосы, следуя [364], используется функция Грина для бигармонического уравнения в полосе  $|y| < 1$  с однородными граничными условиями Дирихле при  $y = \pm 1$ .

**3.4.2** Определим пучок дифференциальных операторов  $\mathcal{L}(\lambda)$  (см. (3.113)):

$$\mathcal{L}(\lambda)z(y) = z^{(4)}(y) - 2\lambda^2 z^{(2)}(y) + \lambda^4 z(y),$$

$$|y| \leq 1, \quad z(\pm 1) = z'(\pm 1) = 0.$$

Введем в рассмотрение функции

$$\Delta_1(\lambda) = \sinh \lambda \cosh \lambda + \lambda, \quad \Delta_2(\lambda) = \sinh \lambda \cosh \lambda - \lambda,$$

$$\Delta(\lambda) = \Delta_1(\lambda)\Delta_2(\lambda).$$

Для функции Грина  $G(y, t; \lambda)$ ,  $-1 \leq y, t \leq 1$  обыкновенного дифференциального оператора  $\mathcal{L}(\lambda)$ , согласно [183, § 3], после простых, но довольно громоздких выкладок, получаем выражение

$$\begin{aligned} 4\lambda^3 G(y, t; \lambda) &= \lambda|y - t| \cosh \lambda(y - t) - \sinh \lambda|y - t| + \\ &+ [\cosh \lambda y ((\sinh^2 \lambda - \lambda^2) \cosh \lambda t - \lambda t \sinh^2 \lambda \sinh \lambda t) - \\ &- \lambda y \sinh \lambda y (\sinh^2 \lambda \cosh \lambda t + \lambda t \sinh \lambda t)] / \Delta_1(\lambda) + \\ &+ [\sinh \lambda y (-\cosh^2 \lambda + \lambda^2) \sinh \lambda t + \lambda t \cosh^2 \lambda \cosh \lambda t) + \\ &+ \lambda y \cosh \lambda y (\cosh^2 \lambda \sinh \lambda t - \lambda t \cosh \lambda t)] / \Delta_2(\lambda). \end{aligned} \quad (3.137)$$

При фиксированных  $y, t$  функция  $G(y, t; \lambda)$  является четной мероморфной по  $\lambda \in \mathbb{C}$  функцией с простыми полюсами в точках  $\pm \lambda_k$ , где  $\lambda_k$  – корни  $\Delta(\lambda)$  с  $\text{Im } \lambda_k > 0$ . Для функции  $\Delta(\lambda)$  справедливо асимптотическое соотношение

$$\Delta(\lambda) = \frac{\exp(4\lambda)}{16} + O(|\lambda|^2), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad \lambda \in S_\epsilon = \{\lambda : |\text{Im } \lambda| < \epsilon \text{Re } \lambda\}.$$

Тогда, анализируя выражение (3.137), получаем следующие равномерные по переменным  $y, t \in [-1, 1]$ ,  $y \neq t$  асимптотические при  $\lambda \rightarrow +\infty$  выражения для функции Грина и ее производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k+n}}{\partial y^k \partial t^n} G(y, t; \lambda) &= \frac{1}{4\lambda^3} \frac{\partial^{k+n}}{\partial y^k \partial t^n} \{ (1 + \lambda|y - t|) \exp(-\lambda|y - t|) - \\ &\quad - (1 + \lambda(2 - y - t) + 2\lambda^2(1 - y)(1 - t)) \exp[-\lambda(2 - y - t)] - \\ &\quad - [1 + \lambda(2 + y + t) + 2\lambda^2(1 + y)(1 + t)] \exp[-\lambda(2 + y + t)] \} + \\ &\quad + O[\lambda^{k+n} \exp(-2\lambda)], \quad k, n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.138)$$

Непосредственные вычисления приводят к следующим выражениям для вычетов:

$$\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_k} G(y, t; \lambda) = a_k^0 z_k(y) z_k(t), \quad (3.139)$$

где коэффициенты

$$a_k^0 = -\frac{\tanh^2 \lambda_k}{8\lambda_k^3}, \quad z_k(y) = \sinh \lambda_k \cosh \lambda_k y - y \cosh \lambda_k \sinh \lambda_k y,$$

$$\Delta_1(\lambda_k) = 0,$$

$$a_k^0 = -\frac{\coth^2 \lambda_k}{8\lambda_k^3}, \quad z_k(y) = \cosh \lambda_k \sinh \lambda_k y - y \sinh \lambda_k \cosh \lambda_k y,$$

$$\Delta_2(\lambda_k) = 0$$

и  $z_k(y)$  – собственная функция пучка операторов  $\mathcal{L}(\lambda)$ , соответствующая собственному значению  $\lambda_k$  (здесь, для удобства, принята отличная от § 3 нормировка собственных функций пучка операторов  $\mathcal{L}(\lambda)$ ). Напомним соотношения

$$|\operatorname{Re} \lambda_k| = \frac{1}{\ln k} + O(1), \quad \operatorname{Im} \lambda_k = \pi k/2 + O(1), \quad k \rightarrow \infty, \quad (3.140)$$

так что для коэффициентов  $a_k^0$  из (3.139) справедлива оценка

$$|a_k^0| \leq \frac{c}{k^3}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Определим функцию

$$F(x, y; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(y, t; s) \exp(isx) ds, \quad (x, y) \neq (0, t), \quad (3.141)$$

являющуюся функцией Грина для бигармонического уравнения в полосе  $|y| < 1$  с условиями Дирихле при  $y = \pm 1$ . Тогда, замыкая контур интегрирования в (3.141) через верхнюю полуплоскость, с использованием (3.139), (3.140) и



оценки [298]

$$|G(y, t; \lambda)| \leq c(|\lambda| + 1)^{-1}, \quad -1 \leq y, t \leq 1, \quad |\lambda \pm \lambda_k| \geq \epsilon > 0, \quad (3.142)$$

получаем для  $F(x, y; t)$  разложение в ряд (см. также [362]):

$$F(x, y; t) = i \sum_{k=1}^{\infty} a_k^0 z_k(t) z_k(y)^{i\lambda_k x}, \quad x > 0, \quad |y| \leq 1, \quad |t| \leq 1. \quad (3.143)$$

Из (3.140) следует, что ряд (3.143) абсолютно сходится и допускает почленное дифференцирование по всем переменным любое число раз.

По функции Грина  $G$  введем при  $y \neq t$  вспомогательные функции

$$\begin{aligned} H_1(y, t; \lambda) &= 2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \lambda^2 \right) G(y, t; \lambda), \\ H_2(y, t; \lambda) &= -2 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \lambda^2 \right) G(y, t; \lambda), \\ H_3(y, t; \lambda) &= 2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 3\lambda^2 \right) G(y, t; \lambda). \end{aligned} \quad (3.144)$$

Отметим равенства

$$H_j(y, t; 0) = y(3 - y^2)/2 - \text{sign}(y - t), \quad j = 1, 3.$$

Пусть функции

$$\begin{aligned} Q_1(x, y; t) &= -\frac{1}{2} \text{sign}(x - l(y)) H_1(y, t; 0) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} H_1(y, t; s) \frac{\sin[s(x - l(t))]}{s} ds + \\ &+ \frac{l'(t)}{\pi} \int_0^{\infty} H_2(y, t; s) \cos[s(x - l(t))] ds, \end{aligned} \quad (3.145)$$

$$\begin{aligned} Q_2(x, y; t) &= -\frac{l'(t)}{2} \text{sign}(x - l(y)) H_3(y, t; 0) + \\ &+ \frac{l'(t)}{\pi} \int_0^{\infty} H_3(y, t; s) \frac{\sin[s(x - l(t))]}{s} ds + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} H_2(y, t; s) \cos[s(x - l(t))] ds, \end{aligned}$$

где

$$(x, y) \in \Pi_{\pm} = \{(x, y) : \pm x > l(y), |y| < 1\}.$$

**Лемма 1.** При  $x \geq l(t)$ ,  $x > l(y)$  и  $y, t \in [-1, 1]$  справедливы разложения

$$Q_1(x, y; t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^0 \lambda_k^{-1} \left\{ z_k^{(3)}(t) + \lambda_k^2 z_k'(t) - i l'(t) \lambda_k (z_k^{(2)}(t) + \lambda_k^2 z_k(t)) \right\} z_k(y)^{i \lambda_k (x - l(t))}, \quad (3.146)$$

$$Q_2(x, y; t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^0 \lambda_k^{-1} [l'(t)(z_k^{(3)}(t) - 3 \lambda_k^2 z_k'(t)) - i \lambda_k (z_k^{(2)}(t) + \lambda_k^2 z_k(t))] z_k(y)^{i \lambda_k (x - l(t))}.$$

Доказательство леммы основано на оценках (3.138), (3.142), теореме Коши и определениях (3.144), (3.145).

На основании (3.138), (3.144) получаем следующие, равномерные по  $y, t \in [-1, 1]$ ,  $y \neq t$ , асимптотические при  $\lambda \rightarrow +\infty$  выражения:

$$\begin{aligned} H_1(y, t; \lambda) &= [\lambda(y - t) - \text{sign}(y - t)] \exp(-\lambda|y - t|) + \\ &+ [1 - \lambda(3y - t - 2) - 2\lambda^2(1 - y)(1 - t)] \exp[-\lambda(2 - y - t)] - \\ &- [1 + \lambda(3y - t + 2) - 2\lambda^2(1 + y)(1 + t)] \exp[-\lambda(2 + y + t)] + H_1^0(y, t; \lambda), \\ H_2(y, t; \lambda) &= -|y - t| \exp(-\lambda|y - t|) + \\ &+ [y - t + 2\lambda(1 - y)(1 - t)] \exp[-\lambda(2 - y - t)] + \\ &+ [-y + t + 2\lambda(1 + y)(1 + t)] \exp[-\lambda(2 + y + t)] + H_2^0(y, t; \lambda), \\ H_3(y, t; \lambda) &= -[\lambda(y - t) + \text{sign}(y - t)] \exp(-\lambda|y - t|) + \\ &+ [1 + \lambda(2 - y - t) + 2\lambda^2(1 - y)(1 - t)] \exp[-\lambda(2 - y - t)] - \\ &- [1 + \lambda(2 + y + t) + 2\lambda^2(1 + y)(1 + t)] \exp[-\lambda(2 + y + t)] + H_3^0(y, t; \lambda), \end{aligned} \quad (3.147)$$

где функции  $H_j^0$  допускают оценки

$$H_j^0(y, t; \lambda) = O[\lambda^3 \exp(-2\lambda)], \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad j = 1, 2, 3.$$

Тогда использование асимптотических выражений (3.147) вместе с известными выражениями для преобразования Лапласа от функций вида  $s^k \sin s$ ,  $s^k \cos s$  (см. [207, с. 446]) приводит к следующим, альтернативным (3.146) при  $(x, y) \in \Pi_+$ , представлениям для функций  $Q_1$ ,  $Q_2$ :

$$\begin{aligned} Q_1(x, y; t) &= \\ &= -\frac{1}{4}y(3-y^2) \operatorname{sign}(x-l(y)) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^2 Q_{1,j}(x, y; t), \\ Q_2(x, y; t) &= \\ &= -\frac{l'(t)}{4}y(3-y^2) \operatorname{sign}(x-l(y)) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^2 Q_{2,j}(x, y; t) \end{aligned} \quad (3.148)$$

с функциями

$$\begin{aligned} Q_{1,0}(x, y; t) &= \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(y-t) \operatorname{sign}(x-l(y)) - \\ &\quad - \operatorname{arctg} \frac{x-l(t)}{y-t} + \frac{(y-t)S(x, y; t)}{r^2(x, y; t)}, \\ Q_{2,0}(x, y; t) &= \frac{\pi}{2} l'(t) \operatorname{sign}(y-t) \operatorname{sign}(x-l(y)) - \\ &\quad - l'(t) \operatorname{arctg} \frac{x-l(t)}{y-t} - 1 + \frac{[x-l(t)]S(x, y; t)}{r^2(x, y; t)}, \end{aligned} \quad (3.149)$$

где

$$r^2(x, y; t) = (x-l(t))^2 + (y-t)^2, \quad S(x, y; t) = x-l(t) - l'(t)(y-t).$$

При этом, из (3.149) получаем выражения для частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{1,0}}{\partial x} &= \frac{\partial Q_{2,0}}{\partial y} = -2 \frac{(x-l(t))(y-t)S(x, y; t)}{r^4(x, y; t)}, \\ \frac{\partial Q_{1,0}}{\partial y} &= 2 \frac{(x-l(t))^2 S(x, y; t)}{r^4(x, y; t)}, \\ \frac{\partial Q_{2,0}}{\partial x} &= 2 \frac{(y-t)^2 S(x, y; t)}{r^4(x, y; t)}. \end{aligned} \quad (3.150)$$

Функции  $Q_{1,j}(x, y; t)$ ,  $Q_{2,j}(x, y; t)$  со значениями индекса  $j = 1, 2$  имеют вид

$$Q_{1,1}(x, y; t) = \operatorname{arctg} \frac{x-l(t)}{2-y-t} - \operatorname{arctg} \frac{x-l(t)}{2+y+t} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r_1^2(x, y; t)} \{ (x - l(t))(2 - 3y - t) + l'(t)(y - t)(2 - y - t) \} - \\
& - \frac{1}{r_2^2(x, y; t)} \{ (x - l(t))(2 + 3y - t) + l'(t)(y - t)(2 + y - t) \} + \\
& + 2 \frac{(1 - y)(1 - t)}{r_1^4(x, y; t)} \{ 2(x - l(t))(2 - y - t) + l'(t)[(2 - y - t)^2 - (x - l(t))^2] \} + \\
& \quad + 2 \frac{(1 + y)(1 + t)}{r_2^4(x, y; t)} \times \\
& \times \{ 2(x - l(t))(2 + y + t) + l'(t)[(2 + y + t)^2 - (x - l(t))^2] \}, \quad (3.151)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{2,1}(x, y; t) &= l'(t) \operatorname{arctg} \frac{x - l(t)}{2 - y - t} - l'(t) \operatorname{arctg} \frac{x - l(t)}{2 + y + t} + \\
& + \frac{(2 - y - t)}{r_1^2(x, y; t)} (l'(t)(x - l(t)) + (y - t)) - \\
& - \frac{(2 + y + t)}{r_2^2(x, y; t)} (l'(t)(x - l(t)) + (y - t)) + \\
& + 2 \frac{(1 - y)(1 - t)}{r_1^4(x, y; t)} (2l'(t)(x - l(t))(2 - y - t) + (2 - y - t)^2 - (x - l(t))^2) + \\
& + 2 \frac{(1 + y)(1 + t)}{r_2^4(x, y; t)} (-2l'(t)(x - l(t))(2 + y + t) + (2 + y + t)^2 - (x - l(t))^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{1,2}(x, y; t) &= \int_0^\infty \left\{ H_1^0(y, t; s) \frac{\sin s(x - l(t))}{s} + \right. \\
& \left. + l'(t) H_2^0(y, t; s) \cos s(x - l(t)) \right\} ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{2,2}(x, y; t) &= \int_0^\infty \left\{ l'(t) H_3^0(y, t; s) \frac{\sin[s(x - l(t))]}{s} + \right. \\
& \left. + H_2^0(y, t; s) \cos[s(x - l(t))] \right\} ds,
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$r_1^2(x, y; t) = (x - l(t))^2 + (2 - y - t)^2,$$

$$r_2^2(x, y; t) = (x - l(t))^2 + (2 + y + t)^2.$$

**Лемма 2.** Для любого  $t \in (-1, 1)$  функции  $Q_k(x, y; t)$  бигармоничны в области  $\Pi_+$ , причем

$$Q_k(x, \pm 1; t) = \frac{\partial Q_k}{\partial y}(x, \pm 1; t) = 0, \quad |x| > 0, \quad k = 1, 2. \quad (3.152)$$

При этом справедливы равномерные по  $(x, y) \in \Pi_+$  оценки

$$\sup_{(x, y) \in \Pi_+, |t| < 1} |Q_{k,j}(x, y; t)| \leq c, \quad k = 1, 2; j = 0, 1, \quad (3.153)$$

$$\sup_{(x, y) \in \Pi_+, |t| < 1} \left| \frac{\partial^{n+m} Q_{k,2}(x, y; t)}{\partial x^n \partial y^m} \right| \leq c, \quad (3.154)$$

$$k = 1, 2; n, m = 0, 1, \dots,$$

$$\int_{-1}^1 \left[ \left| \frac{\partial}{\partial x} Q_{k,j}(x, y; t) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y} Q_{k,j}(x, y; t) \right| \right] dt \leq c, \quad (3.155)$$

$$k = 1, 2; j = 0, 1.$$

*Доказательство.* Утверждение о бигармоничности функций  $Q_k$  и соотношения (3.152) следуют из свойств функции Грина  $G(y, t; \lambda)$ , определений функций  $H_j(y, t; \lambda)$  и (3.148), с учетом равенства

$$\arctg x + \arctg x^{-1} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} x, \quad x \neq 0$$

(см. также лемму 1). Справедливость оценок (3.153), (3.154) вытекает из выражений (3.149), (3.151), с учетом оценок

$$0 \leq 1 \pm t \leq 2 \pm (y + t), \quad |y| \leq 1, \quad |t| \leq 1. \quad (3.156)$$

Докажем оценки (3.155) для индекса  $j = 0$ . Отметим равенство

$$\frac{S(x, y; t)}{r^2(x, y; t)} dt = - \frac{\partial}{\partial n_\xi} \ln |z - \xi| d\Gamma_\xi, \quad (3.157)$$

где  $z = (x, y)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (l(t), t) \in \Gamma$ . Тогда согласно (3.150) на основании известной оценки для потенциала двойного слоя [34, с. 450] получаем неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial x} Q_{k,0}(x, y; t) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y} Q_{k,0}(x, y; t) \right| \right\} dt \leq \\ & \leq 3 \int_\Gamma \left| \frac{\partial}{\partial n_\xi} \ln |z - \xi| \right| d\Gamma_\xi \leq c, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Оценки (3.155) для  $j = 1$  вытекают из соответствующих выражений для производных от функций  $Q_{1,1}$ ,  $Q_{2,1}$ , получаемых из (3.151), неравенств (3.156)

и оценок

$$|l^{(k)}(t)| \leq c(1-t^2)^{2-k}, \quad |t| \leq 1, \quad k = 0, 1. \quad (3.158)$$

Лемма доказана.

**3.4.3** Рассмотрим вопрос о сведении граничной задачи (3.134) к системе интегральных уравнений на отрезке. Решение граничной задачи (3.134) будем искать в виде

$$u = \Phi[q](x, y) := \int_{-1}^1 Q_1(x, y; t)q_1(t)dt + \int_{-1}^1 Q_2(x, y; t)q_2(t)dt, \quad q = \{q_1, q_2\} \in \mathcal{B}, \quad (3.159)$$

где банахово пространство  $\mathcal{B}$  определено согласно (3.136).

На основании леммы 1 для функции  $u = \Phi[q]$  справедливо разложение

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k(y) \exp(i\lambda_k x), \\ x > L = \max l(y), \quad |y| \leq 1, \quad \text{Im } \lambda_k > 0, \quad (3.160)$$

с коэффициентами

$$a_k = \frac{2a_k^0}{\lambda_k} \int_{-1}^1 \left\{ q_1(t) \left[ z_k^{(3)}(t) + \lambda_k^2 z_k'(t) - il'(t)\lambda_k(z_k^{(2)}(t) + \lambda_k^2 z_k(t)) \right] + \right. \\ \left. + q_2(t) \left[ l'(t)(z_k^{(3)}(t) - 3\lambda_k^2 z_k'(t)) - \right. \right. \\ \left. \left. - i\lambda_k(z_k^{(2)}(t) + \lambda_k^2 z_k(t)) \right] \right\} \exp[-i\lambda_k l(t)] dt. \quad (3.161)$$

При этом, использование соотношений (3.140) дает оценку

$$|a_k| \leq c(\ln k + 1)^{-1} \exp(\pi Lk/2) \|q\|_{\mathcal{B}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.162)$$

Из лемм 1 и 2 и плотности вложения многообразия

$$C_0^\infty = C_0^\infty[-1, 1] = \{p(t) \in C^\infty[-1, 1], \text{ supp } p(t) \in (-1, 1)\}$$

в банахово пространство  $C_0$  вытекает, что функция  $\Phi[q](x, y)$  бесконечно дифференцируема при  $x > l(y)$ ,  $|y| \leq 1$ , является бигармонической в  $\Pi_+$ , удовлетворяет однородным граничным условиям из (3.134) на боковых сторонах полуполосы, причем выполняется оценка

$$\sup_{(x,y) \in \Pi_+} \{ |\Phi[q](x, y)| + |\nabla \Phi[q](x, y)| \} \leq c \|q\|_{\mathcal{B}} \quad (3.163)$$

с постоянной  $c > 0$ , не зависящей от  $q \in \mathcal{B}$ .

Таким образом, для определения неизвестной вектор-функции  $q \in \mathcal{B}$  из (3.159) требуется исследовать гладкость вплоть до граничной кривой  $\Gamma$  функции  $\Phi[q]$ . В соответствии с (3.148), (3.159) положим функции

$$\Phi_j[q](x, y) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^2 \int_{-1}^1 Q_{k,j}(x, y; t) q_k(t) dt, \quad j = 0, 1, 2,$$

так что с учетом  $q \in \mathcal{B}$  выполняется равенство

$$\Phi[q] = \Phi_0[q] + \Phi_1[q] + \Phi_2[q]. \quad (3.164)$$

**Лемма 3.** Справедливы включения

$$\Phi_j[q](x, y) \in C^1(\bar{\Pi}_+), \quad j = 0, 1, 2,$$

причем выполняются следующие предельные при

$$(x, y) \rightarrow (l(s), s) \in \Gamma, \quad (x, y) \in \Pi_+$$

равенства:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi_j[q]}{\partial x}(l(s), s) = \\ & = \delta_{0j} q_2(s) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^2 \int_{-1}^1 \frac{\partial Q_{k,j}}{\partial x}(l(s), s; t) q_k(t) dt, \end{aligned} \quad (3.165)$$

$$\frac{\partial \Phi_j[q]}{\partial y}(l(s), s) = \delta_{0j} q_1(s) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^2 \int_{-1}^1 \frac{\partial Q_{k,j}}{\partial y}(l(s), s; t) q_k(t) dt, \quad (3.166)$$

где  $\delta_{0j}$  – символ Кронекера и при  $j = 0$  интегралы в (3.166) понимаются в смысле прямого значения на кривой  $\Gamma$ , аналогично прямому значению потенциала двойного слоя [34, § 31].

*Доказательство.* Утверждение  $\Phi_2[q](x, y) \in C^n(\bar{\Pi}_+)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  и (3.166) для  $j = 2$  непосредственно вытекают из (3.151) и (3.147). Если функции  $q_k \in C_0^\infty$ ,  $k = 1, 2$ , то (см. (3.151)) функция  $\Phi_1[q]$  является бесконечно дифференцируемой в  $\bar{\Pi}_+$  и справедливы равенства (3.166) для  $j = 1$ . Так как  $C_0^\infty$  плотно вложено в  $C_0$ , то отсюда и из оценок леммы 2 получаем, что для любых  $q_k \in C_0$ ,  $k = 1, 2$  функция  $\Phi_1[q] \in C^1(\bar{\Pi}_+)$ , и для нее справедливы равенства (3.166). Таким образом, для доказательства леммы осталось рассмотреть граничные свойства функции  $\Phi_0[q]$ .

Используя соотношение (3.157) и равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \arctg \frac{x - l(t)}{y - t} = \frac{S(x, y; t)}{r^2(x, y; t)}, \quad y \neq t, \quad (3.167)$$

после интегрирования по частям имеем для функции  $\Phi_0$  при  $(x, y) \in \Pi_+$  выражение:

$$\begin{aligned} & \Phi_0[q](x, y) = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{S(x, y; t)}{r^2(x, y; t)} [(y-t)q_1(t) + (x-l(t))q_2(t) + q_0(t)] dt - c_0, \end{aligned} \quad (3.168)$$

где функция  $q_0$  и постоянная  $c_0$  имеют вид

$$q_0(t) = \int_{-1}^t (q_1(s) + l'(s)q_2(s)) ds, \quad c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 q_2(s) ds.$$

Отсюда и из известных свойств потенциала двойного слоя (см. [34, с. 452]), с учетом включений  $q_k \in C_0$ ,  $k = 0, 1, 2$ , заключаем, что функция  $\Phi_0[q]$  непрерывна в  $\bar{\Pi}_+$ , причем граничное значение

$$\Phi_0[q](l(s), s) = q_0(s) - c_0, \quad |s| \leq 1. \quad (3.169)$$

Далее, согласно (3.150) имеем следующие выражения для производных при  $(x, y) \in \Pi_+$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_0[q]}{\partial x}(x, y) &= -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{S(x, y; t)(y-t)}{r^4(x, y; t)} [(x-l(t))q_1(t) - (y-t)q_2(t)] dt, \\ \frac{\partial \Phi_0[q]}{\partial y}(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{S(x, y; t)(x-l(t))}{r^4(x, y; t)} [(x-l(t))q_1(t) - (y-t)q_2(t)] dt. \end{aligned}$$

Тогда, если предположить, что функции  $q_k \in C_0^\infty$ ,  $k = 1, 2$ , то используя равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{(y-t)^2}{r^2(x, y; t)} &= -2(x-l(t))(y-t) \frac{S(x, y; t)}{r^4(x, y; t)}, \quad (3.170) \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{(y-t)(x-l(t))}{r^2(x, y; t)} &= \left[ 1 - 2 \frac{(x-l(t))^2}{r^2(x, y; t)} \right] \frac{S(x, y; t)}{r^2(x, y; t)} = \\ &= - \left[ 1 - 2 \frac{(y-t)^2}{r^2(x, y; t)} \right] \frac{S(x, y; t)}{r^2(x, y; t)}, \end{aligned}$$

получаем, после интегрирования по частям, следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_0[q]}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{S(x, y; t)}{r^2(x, y; t)} q_2(t) dt - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(y-t)}{r^2(x, y; t)} [(y-t)q_1'(t) + (x-l(t))q_2(t)] dt, \quad (3.171) \\ \frac{\partial \Phi_0[q]}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{S(x, y; t)}{r^2(x, y; t)} q_1(t) dt + \end{aligned}$$



$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(x-l(t))}{r^2(x,y;t)} [(y-t)q_1'(t) + (x-l(t))q_2(t)] dt.$$

Отметим ограниченность ядер

$$\frac{|(y-t)^k(x-l(t))^{2-k}|}{r^2(x,y;t)} \leq 2, \quad (l(t), t) \neq (x, y) \in \bar{\Pi}_+, \quad k = 0, 1, 2,$$

и их непрерывность при  $(x, y) \in \Gamma$ ,  $|t| \leq 1$ . Тогда из (3.171), используя равенства (3.167) и (3.157), на основании свойств потенциала двойного слоя получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_0[q]}{\partial x}(l(s), s) &= q_2(s) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{S(l(s), s; t)}{r^2(l(s), s; t)} q_2(t) dt - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(s-t)}{r^2(l(s), s; t)} [(s-t)q_1'(t) + (l(s)-l(t))q_2(t)] dt, \\ \frac{\partial \Phi_0[q]}{\partial y}(l(s), s) &= q_1(s) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{S(l(s), s; t)}{r^2(l(s), s; t)} q_1(t) dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(l(s)-l(t))}{r^2(l(s), s; t)} [(s-t)q_1'(t) + (l(s)-l(t))q_2(t)] dt. \end{aligned}$$

Используя снова соотношения (3.170), приходим, после интегрирования по частям, к формулам (3.166) для индекса  $j = 0$  в случае, когда функции  $q_k \in C_0^\infty$ . Отсюда и из оценок (3.91) с учетом плотности вложения  $C_0^\infty$  в  $C_0$  получаем, вместе с установленным утверждением  $\Phi_0[q] \in C(\bar{\Pi}_+)$ , что при любой вектор-функции  $q \in \mathcal{B}$  функция  $\Phi_0[q]$  принадлежит пространству  $C^1(\bar{\Pi}_+)$  и справедливо равенство (3.166).

Лемма доказана.

Введем в рассмотрение ядра (см. равенства (3.150), (3.151))

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1k}^j(s, t) &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial Q_{k,j}}{\partial y}(l(s), s; t), \quad \mathcal{A}_{2k}^j(s, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial Q_{k,j}}{\partial x}(l(s), s; t), \\ \mathcal{A}_{nk}^j(s, t) &= \sum_{j=0}^2 \mathcal{A}_{nk}^j(s, t), \quad n, k = 1, 2, \end{aligned}$$

и соответствующие интегральные операторы

$$A_j = \begin{pmatrix} A_{11}^j & A_{12}^j \\ A_{21}^j & A_{22}^j \end{pmatrix}, \quad (A_{nk}^j p)(s) = \int_{-1}^1 \mathcal{A}_{nk}^j(s, t) p(t) dt, \quad j = 0, 1, 2.$$

Введем в рассмотрение линейные операторы

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad (A_{nk} p)(s) = \int_{-1}^1 \mathcal{A}_{nk}(s, t) p(t) dt.$$

При этом на основании леммы 3 заключаем, что верна следующая теорема.

**Теорема 1.** Функция  $u = \Phi[q]$ ,  $q \in \mathcal{B}$  является решением граничной задачи (3.134) в том и только том случае, когда вектор-функция  $q = \{q_1, q_2\}$  является решением системы интегральных уравнений

$$q + Aq = h \quad (3.172)$$

с правой частью  $h = \{h_1, h_2\} \in \mathcal{B}$ :

$$\begin{aligned} h_1(s) &= [f'(s) - l'(s)(1 + l'^2(s))^{1/2}g(s)](1 + l'^2(s))^{-1}, \\ h_2(s) &= [l'(s)f'(s) + (1 + l'^2(s))^{1/2}g(s)](1 + l'^2(s))^{-1}. \end{aligned} \quad (3.173)$$

При этом линейный оператор  $A$  непрерывно действует в пространстве  $\mathcal{B}$ .

Дальнейшие свойства оператора  $A$  приведены в следующем утверждении.

**Лемма 4.** Оператор  $A$  имеет вид  $A = T + K$ , где линейный интегральный оператор  $K$  непрерывно действует из пространства  $C \oplus C$  в пространство  $C^1 \oplus C^1$  и, в частности, является вполне непрерывным оператором в  $C \oplus C$ , а оператор  $T = \{T_{nk}\}_{n,k=1}^1$ , причем  $T_{11} = T_{22} = 0$  и

$$\begin{aligned} (T_{12}p)(s) &= \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-s)(1-t)(2-s-t)}{(l(s)-l(t))^2 + (2-s-t)^2} dt - \\ &\quad - \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1+s)(1+t)(2+s+t)}{(l(s)-l(t))^2 + (2+s+t)^2} dt, \\ (T_{21}p)(s) &= \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-s)^2(2-s-t)}{(l(s)-l(t))^2 + (2-s-t)^2} dt - \\ &\quad - \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1+s)^2(2+s+t)}{(l(s)-l(t))^2 + (2+s+t)^2} dt. \end{aligned}$$

Операторы  $T_{12}$ ,  $T_{21}$  непрерывно действуют в пространстве  $C$ , а уравнение (3.172) является фредгольмовым в пространстве  $\mathcal{B}$ .

*Доказательство.* Доказательство леммы основано на анализе выражений (3.150), (3.151) и их частных производных при  $x = l(s)$ ,  $y = s$  и результатах Радона [216, п. 90] об операторах в пространстве непрерывных функций. При этом используется непрерывность ядер

$$\frac{(s-t)^k(l(s)-l(t))^{2-k}}{r^4(l(s), s; t)} S(l(s), s; t), \quad -1 \leq s, t \leq 1, \quad k = 0, 1, 2,$$

и оценки

$$|l'(t)| \leq c(1 - |t|), \quad |l(s) - l(t)| \leq c|t - s|(2 \pm (s + t)), \quad -1 \leq s, t \leq 1.$$

Далее, так как оператор  $K$  вполне непрерывно действует в пространстве  $C \oplus C$ , а  $\mathcal{B}$  – подпространство  $C \oplus C$  конечной коразмерности, то из оценок

$$\frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-s)(1-t)(2-s-t)}{((l(s)-l(t))^2 + (2-s-t)^2)^2} dt \leq \frac{2}{\pi} < 1, \quad |s| < 1,$$

$$\frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(1-s)^2(2-s-t)}{((l(s)-l(t))^2 + (2-s-t)^2)^2} dt \leq \frac{2}{\pi} < 1, \quad |s| < 1,$$

и теоремы Радона [216, с. 240] нетрудно заключить, что уравнение (3.172) является фредгольмовым в пространстве  $\mathcal{B}$ . Лемма доказана.

Таким образом, уравнение (3.172) является однозначно разрешимым в  $\mathcal{B}$  тогда и только тогда, когда соответствующее однородное уравнение не имеет нетривиальных решений в пространстве  $\mathcal{B}$ . Вопрос об однозначной разрешимости уравнений (3.172) и граничной задачи (3.134) рассматривается в следующем параграфе.

### 3.5 Разрешимость задачи Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе с криволинейным торцом

**3.5.1** В данном параграфе продолжается рассмотрение граничной задачи (3.134). На основании проведенных в § 4 рассмотрений устанавливается ее однозначная разрешимость, в частности, для функций  $u$ , удовлетворяющих (3.134), доказывается справедливость принципа максимума Миранды–Агмона [307, 395]:

$$\|u\|_{C^1(\bar{\Pi}_+)} \leq \{\|f\|_{C^1[-1,1]} + \|g\|_{C[-1,1]}\}, \quad (3.174)$$

а также его уточнение, связанное с наличием в области  $\Pi_+$  бесконечно удаленной точки. Относительно принципа максимума Миранды–Агмона и его обобщений для решений бигармонического уравнения в ограниченных областях с кусочно-гладкой границей см. [165, 166, 407].

**3.5.2** Прежде всего, рассмотрим вопрос об однозначной разрешимости в пространстве  $\mathcal{B}$  уравнения (3.172). Здесь важное значение имеет априорная информация о дифференциальных свойствах решений этого уравнения при  $s \rightarrow \pm 1$ . Для получения такой информации используем технику интегрального преобразования Меллина (см. § 2.1). Как отмечалось в [163, с. 219], аналогичный подход к вычислению асимптотики решений интегральных уравнений теории потенциала был развит в [341, 342]. В работах [113], [163, гл. 5, § 2] информация о свойствах решений интегральных уравнений на кусочно-гладких контурах выведена на основании предварительных результатов об асимптотике решений эллиптических уравнений вблизи угловых точек.

Введем в рассмотрение четную целую функцию  $\mathcal{D}(\gamma)$  переменной  $\gamma \in \mathbb{C}$ :

$$\mathcal{D}(\gamma) = \mathcal{D}_1(\gamma)\mathcal{D}_2(\gamma),$$

где функции

$$\mathcal{D}_1(\gamma) = \sin^2(\pi\gamma/2) - \gamma^2, \quad \mathcal{D}_2(\gamma) = \cos^2(\pi\gamma/2) - \gamma^2.$$

При этом функция  $\mathcal{D}_1(\gamma)$  с точностью до замены  $\gamma \rightarrow \gamma + 1$  совпадает с функцией  $\mathcal{D}_0(\gamma)$  из (3.28) и не имеет корней в полосе  $\operatorname{Re} \gamma \in (0, 1)$ . Кроме того, несложный анализ показывает, что  $\mathcal{D}_2(\gamma)$  в полосе  $\operatorname{Re} \gamma \in [0, 1]$  имеет единственный простой корень  $\gamma = \alpha \in (1/2, 1)$ .

**Лемма 1.** Пусть вектор-функция  $q = \{q_1, q_2\}$  является решением уравнения (3.172) с правой частью  $h = \{h_1, h_2\} \in \mathcal{B} \cap (C^1 \oplus C^1)$ . Тогда функции  $q_k(s) \in C^1(-1, 1)$ ,  $k = 1, 2$  и для любых значений  $\epsilon > 0$  и  $k = 1, 2$ ,  $n = 0, 1$  выполняются асимптотические соотношения

$$\frac{d^n}{ds^n} \{q_k(s) - q_k^\pm(1 \mp s)^\alpha\} = O((1 \mp s)^{1-n-\epsilon}), \quad s \rightarrow \pm 1, \quad (3.175)$$

где постоянные  $q_k^\pm$ ,  $k = 1, 2$ , связаны равенствами

$$q_1^\pm = -\frac{2\alpha(1+\alpha)}{\sin \pi\alpha} q_2^\pm.$$

*Доказательство.* Включения  $q_k(s) \in C^1(-1, 1)$  непосредственно вытекают из (3.172), с учетом определения оператора  $A$  и наложенного условия  $h = \{h_1, h_2\} \in \mathcal{B} \cap (C^1 \oplus C^1)$ . Докажем, для определенности, утверждение (3.175) для  $s \rightarrow 1$ . Пусть функция

$$\chi \in C^\infty[0, \infty), \quad \chi(s) \equiv 1, \quad \text{при } s \in [0, 1], \quad \chi(s) \equiv 0, \quad \text{при } s \geq 3/2.$$

Тогда, исходя из системы интегральных уравнений (3.172), для функций

$$p_k(s) = \chi(s) q_k(1-s), \quad s \geq 0, \quad k = 1, 2, \quad (3.176)$$

получаем при  $s \geq 0$  соотношения

$$p_1(s) = -\frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{s t p_2(t)}{(s+t)^3} dt + l_1(s), \quad (3.177)$$

$$p_2(s) = -\frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^2 p_1(t)}{(s+t)^3} dt + l_2(s)$$

с некоторыми функциями  $l_1(s)$ ,  $l_2(s)$ , которые обладают свойствами

$$l_k(s) \in C^1[0, \infty), \quad l_k(0) = 0, \quad l_k^{(n)}(0) = O(s^{-(1+n)}), \\ s \rightarrow \infty, \quad n = 0, 1. \quad (3.178)$$

Тогда для преобразований Меллина

$$M_k(\gamma) = \int_0^\infty p_k(s) s^{\gamma-1} ds, \quad \operatorname{Re} \gamma \in (0, 1),$$

$$m_k(\gamma) = \int_0^\infty l_k(s) s^{\gamma-1} ds, \quad \operatorname{Re} \gamma \in (0, 1),$$

с учетом равенства [256, с. 251]

$$\int_0^\infty \frac{s^{\gamma-1}}{(s+1)^3} ds = \pi \frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2 \sin(\pi\gamma)}, \quad \operatorname{Re} \gamma \in (0, 3),$$

получаем из (3.177) соотношения

$$M_1(\gamma) + \frac{2\gamma(1-\gamma)}{\sin(\pi\gamma)} M_2(\gamma) = m_1(\gamma),$$

$$M_2(\gamma) + \frac{2\gamma(1+\gamma)}{\sin(\pi\gamma)} M_1(\gamma) = m_2(\gamma).$$

Решая эти уравнения относительно функций  $M_1(\gamma)$ ,  $M_2(\gamma)$ , получаем при  $\operatorname{Re} \gamma \in (0, 1)$  следующие равенства:

$$M_1(\gamma) = [m_1(\gamma) \sin(\pi\gamma) - 2\gamma(1-\gamma) m_2(\gamma)] \frac{\sin(\pi\gamma)}{D(\gamma)}, \quad (3.179)$$

$$M_2(\gamma) = [m_2(\gamma) \sin(\pi\gamma) - 2\gamma(1+\gamma) m_1(\gamma)] \frac{\sin(\pi\gamma)}{D(\gamma)}.$$

Из (3.178) следует, что функции  $m_k(\gamma)$  аналитичны в полосе  $|\operatorname{Re} \gamma| < 1$ , причем для любого  $\epsilon > 0$  выполняются оценки

$$|m_k(\gamma)| \leq c_\epsilon (|\gamma| + 1)^{-1}, \quad |\operatorname{Re} \gamma| < 1 - \epsilon. \quad (3.180)$$

Функции  $M_k(\gamma)$ , по их определению, аналитичны в полуплоскости  $\operatorname{Re} \gamma > 0$ , а выражения (3.179) определяют их мероморфные продолжения в полосу  $\operatorname{Re} \gamma \in (-1, 0]$ . При этом, в полосе  $\operatorname{Re} \gamma \in (-1, 0]$  функция  $\mathcal{D}(\gamma)$  имеет простой корень в точке  $\gamma = -\alpha$  и корень второго порядка в точке  $\gamma = 0$ . Тогда утверждение (3.175) при  $s \rightarrow 1$  вытекает из (3.176), (3.179), (3.180) на основании формулы обращения Меллина [256, с. 63] и теоремы Коши.

Лемма доказана.

**Следствие 1.** В условиях леммы 1 справедливо утверждение:

$$q_k(s) \in W_{2+\epsilon}^1[-1, 1], \quad k = 1, 2, \quad \forall \epsilon \in [0, (2\alpha - 1)(1 - \alpha)^{-1}).$$

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия леммы 1, тогда

$$\Phi[q] \in W_2^2(\Pi_+). \quad (3.181)$$

*Доказательство.* Из (3.162) следует, что достаточно установить включение

$$\Phi[q] \in W_2^2(\Pi_0), \quad \Pi_0 = \Pi_+ \cap \{x < 2L\},$$

причем (см. (3.149), (3.151)) можно ограничиться рассмотрением лишь составляющих  $\Phi_0[q]$ ,  $\Phi_1[q]$ . Для ядер, определяющих по  $q \in \mathcal{B}$  функцию  $\Phi_1[q]$ , при  $k = 0, 1, 2$  и  $n = 1, 2$  справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial y^{2-k}} Q_{n,1}(x, y; t) \right| \leq c [(2 - y - t)^{-2} + (2 + y + t)^{-2}], \quad (3.182)$$

которые получаются на основании простого анализа выражений (3.151). Кроме того, для функций  $q_1, q_2$  имеем из (3.175) оценки

$$|q_k(s)| \leq c(1 - s^2)^\alpha, \quad |s| \leq 1, \quad k = 1, 2. \quad (3.183)$$

Тогда из (3.182), (3.183) получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi_0} \left| \frac{\partial^2 \Phi_1[q]}{\partial x^k \partial y^{2-k}} \right|^2 dx dy &\leq c \int_{-1}^1 \left( \int_0^1 \frac{(1-t)^\alpha}{(2-y-t)^2} dt \right)^2 dy \leq \\ &\leq c \int_0^2 y^{2(\alpha-1)} dy \cdot \left( \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{(t+1)^2} \right)^2 \leq c < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом леммы 4.3 заключаем, что справедливо включение  $\Phi_1[q] \in W_2^2(\Pi_0)$ .

Из равенств (3.170), (3.171) имеем выражения для производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_0[q] &= \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(y-t)^2}{r^4(x, y; t)} \left[ (x-l(t)) q_1'(t) - (y-l(t)) q_2'(t) \right] dt, \end{aligned} \quad (3.184)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Phi_0[q] &= \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(x-l(t))(y-t)}{r^4(x, y; t)} \left[ (x-l(t)) q_1'(t) - (y-l(t)) q_2'(t) \right] dt, \end{aligned} \quad (3.185)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi_0[q] = \\ & = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{(x-l(t))^2}{r^4(x,y;t)} [(x-l(t)) q_1'(t) - (y-l(t)) q_2'(t)] dt. \end{aligned} \quad (3.186)$$

Далее будем следовать рассуждениям из работы [308]. Пусть

$$d(x,y) = \inf_{|t| \leq 1} r(x,y;t)$$

– расстояние от точки  $(x,y) \in \Pi_0$  до граничной кривой  $\Gamma$ . Тогда

$$r(x,y;t) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} [d^2(x,y) + (y-t)^2]^{1/2}, \quad |t| \leq 1.$$

Отсюда и из (3.184), (3.185), (3.186) и следствия 1 имеем для  $(x,y) \in \Pi_0$ ,  $k = 0, 1, 2$  и  $p = 2 + \epsilon > 2$  оценки

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial y^{2-k}} \Phi_0[q] \right| \leq c \int_{-1}^1 \frac{|q_1'(t)| + |q_2'(t)|}{(d^2(x,y) + (y-t)^2)^{1/2}} dt \leq \\ & \leq c \left( \|q_1\|_{W_p^1} + \|q_2\|_{W_p^1} \right) \left[ \int_0^\infty [s + d(x,y)]^{\frac{p}{1-p}} ds \right]^{1-\frac{1}{p}} \leq c d^{-1}(x,y), \end{aligned}$$

которые вместе с леммой 4.3 показывают, что функция  $\Phi_0[q]$  принадлежит пространству  $W_2^2(\Pi_0)$ . Теорема доказана.

Далее понадобится следующее утверждение (см. [138, 192, 364]).

**Предложение 1.** Обобщенное решение граничной задачи (3.134) единственно в пространстве  $W_2^2(\Pi_+)$ .

Определяющее значение для доказательства однозначной разрешимости уравнения (3.172) имеет следующая далее теорема 2, аналогичная теореме 9.1 из [308]. Для формулировки соответствующего утверждения введем, следуя [308] (см. также [339]), билинейную форму на функциях  $u, v$ , определенных в полосе  $\Pi = \{(x,y) : -\infty < x < \infty, |y| < 1\}$ , таких, что  $u|_{\Pi_{pm}}, v|_{\Pi_{\pm}} \in W_2^2(\Pi_{pm})$ :

$$M[u, v] = \iint_{\Pi_- \cup \Pi_+} \{(u_{yy} - u_{xx})(v_{yy} - v_{xx}) + 4u_{yx}v_{yx}\} dx dy, \quad (3.187)$$

где, напомним, области  $\Pi_{\pm} = \{(x,y) : \pm x > l(y), |y| < 1\}$ . При этом имеем равенство

$$M[u, v] = M_0[u, v] + 2M_1[u, v], \quad (3.188)$$

где формы

$$M_0[u, v] = \iint_{\Pi_- \cup \Pi_+} \Delta u \cdot \Delta v dx dy,$$

$$M_1[u, v] = \iint_{\Pi_- \cup \Pi_+} \{2u_{yx}v_{yx} - u_{xx}v_{yy} - u_{yy}v_{xx}\} dx dy.$$

Отметим, что дифференциальные свойства функции  $\Phi[q](x, y)$  при  $(x, y) \in \Pi_-$  аналогичны ее свойствам при  $(x, y) \in \Pi_+$ . В частности, аналогично устанавливается (см. лемму 4.3), что

$$\Phi_j[q] \in C^1(\bar{\Pi}_-), \quad j = 0, 1, 2, \quad q \in \mathcal{B},$$

и что при  $(x, y) \in \Pi_-$ ,  $(x, y) \rightarrow (l(s), s) \in \Gamma$  верны соотношения (3.168) с заменой  $\delta_{0j}$  на  $-\delta_{0j}$ .

**Теорема 2.** Пусть функция  $q = \{q_1, q_2\} \in \mathcal{B}$ ,  $q_k \in C^1(-1, 1)$  и  $q_1, q_2$  удовлетворяют соотношениям (3.175). Тогда

$$M[\Phi[q], v] = 0, \quad \forall v \in C^\infty(\bar{\Pi}) \cap C_0^\infty(\bar{\Pi}_-) \cap C_0^\infty(\bar{\Pi}_+). \quad (3.189)$$

*Доказательство.* Так как выполняется равенство (3.164) и  $\Phi_1[q] + \Phi_2[q]$  является бигармонической в полосе  $|y| < 1$  функцией, то, применяя формулу Грина, имеем

$$\begin{aligned} M_0[\Phi_1[q] + \Phi_2[q], v] &= \\ &= \iint_{|y| < 1} \Delta^2(\Phi_1[q] + \Phi_2[q]) v dx dy = 0. \end{aligned} \quad (3.190)$$

Кроме того, для любой функции  $u \in W_{2, \text{loc}}^2(\bar{\Pi})$  имеем равенство

$$M_1[u, v] = 0, \quad v \in C_0^\infty(\bar{\Pi}). \quad (3.191)$$

В частности, (3.191) имеет место и для функции  $u = \Phi_1[q] + \Phi_2[q]$ . Из (3.188), (3.190), (3.191) заключаем, что для доказательства теоремы достаточно установить равенство

$$M_0[\Phi_0[q], v] = -2M_1[\Phi_0[q], v], \quad v \in C_0^\infty(\bar{\Pi}). \quad (3.192)$$

Рассмотрим выражение  $M_0[\Phi_0[q], v]$ ,  $v \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$ . Пусть функции

$$u^\pm = \Phi_0[q](x, y), \quad (x, y) \in \Pi_\pm.$$

Применяя формулу Грина, с учетом леммы 4.3 получаем выражение

$$\begin{aligned} M_0[\Phi_0q], v] &= - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u^+}{\partial n} - \left( \frac{\partial u^-}{\partial n} \right) \Delta v \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} (u^+ - u^-) \frac{\partial}{\partial n} \Delta v d\Gamma + \\ &+ \iint_{\Pi_-} u^- \Delta^2 v dx dy + \iint_{\Pi_+} u^+ \Delta^2 v dx dy. \end{aligned} \quad (3.193)$$



Отметим простую оценку

$$|S(x, y; t)| \leq cr(x, y; t), \quad (x, y) \in \Pi_{\pm}. \quad (3.194)$$

Далее, используя выражение (3.168) и теорему Фубини (на основании (3.194)), получаем

$$\begin{aligned} & \iint_{\Pi_-} u^- \Delta^2 v \, dx dy + \iint_{\Pi_+} u^+ \Delta^2 v \, dx dy = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \iint_{|y| \leq 1} \frac{S(x, y; t)}{r^2(x, y; t)} [(y-t) q_1(t) + \right. \\ & \left. + (x-l(t)) q_2(t) + q_0(t)] \Delta^2 v(x, y; t) \, dx dy \right\} dt. \end{aligned} \quad (3.195)$$

При этом, используя соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{S(x, y; t)}{r^2(x, y; t)} = \left( \frac{\partial}{\partial x} - l'(t) \frac{\partial}{\partial y} \right) \ln r(x, y; t), \\ & [(y-t) q_1(t) + (x-l(t)) q_2(t) + q_0(t)] \Delta^2 v(x, y; t) = \\ & = \Delta \{ [(y-t) q_1(t) + (x-l(t)) q_2(t) + q_0(t)] \Delta v - 2 q_1(t) v_y - 2 q_2(t) v_x \}, \\ & \frac{1}{\pi} \iint_{\Pi} \Delta v \ln r(x, y; t) \, dx dy = 2v(l(t), t), \end{aligned}$$

записываем следующее выражение для внутреннего интеграла в (3.195):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \iint_{|y| \leq 1} \frac{S(x, y; t)}{r^2(x, y; t)} [(y-t) q_1(t) + (x-l(t)) q_2(t) + q_0(t)] \Delta^2 v(x, y; t) \, dx dy = \\ & = \left\{ -2q_0(t) \left[ \frac{\partial}{\partial x} - l'(t) \frac{\partial}{\partial y} \right] \Delta v + 2q_1(t) + \right. \\ & \left. + 2q_2(t) \left[ -2l'(t) v_{xy} + v_{xx} - v_{yy} \right] \right\} \Big|_{(x,y)=(l(t), t)}. \end{aligned} \quad (3.196)$$

Таким образом, используя соотношения для  $(x, y) = (l(t), t) \in \Gamma$ :

$$\begin{aligned} 2q_0(t) &= (u^+ - u^-)|_{\Gamma}, \\ 2q_1(t) &= (u_y^+ - u_y^-)|_{\Gamma}, \\ 2q_2(t) &= (u_x^+ - u_x^-)|_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (3.197)$$

и подставляя выражение (3.196) в (3.195), получаем

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi_-} u^- \cdot \Delta^2 v \, dx dy + \iint_{\Pi_+} u^+ \cdot \Delta^2 v \, dx dy = & - \int_{\Gamma} (u^+ - u^-) \frac{\partial}{\partial n} \Delta v \, d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma} (u_y^+ - u_y^-) (2v_{xy} dy - v_{yy} dx + v_{xx} dx) + \\ & + \int_{\Gamma} (u_x^+ - u_x^-) (-2v_{xy} dy + v_{xx} dy - v_{yy} dy). \end{aligned} \quad (3.198)$$

Далее, справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u^+}{\partial n} - \frac{\partial u^-}{\partial n} \right) \Delta v \, d\Gamma = \\ & = \int_{\Gamma} (u_x^+ - u_x^-) \Delta v \, dy - \int_{\Gamma} (u_y^+ - u_y^-) \Delta v \, dx, \end{aligned}$$

поэтому из (3.193), (3.198) окончательно получаем соотношение

$$\begin{aligned} M_0[\Phi_0[q], v] &= 2 \int_{\Gamma} (u_y^+ - u_y^-) (v_{xx} dx + v_{xy} dy) - \\ & - 2 \int_{\Gamma} (u_x^+ - u_x^-) (v_{xy} dx + v_{yy} dy) = -2M_1[\Phi_0[q], v]. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Теорема 3.** Уравнение (3.172) является однозначно разрешимым в банаховом пространстве  $\mathcal{B}$  и для его решений верна оценка

$$\|q\|_{\mathcal{B}} \leq c \|h\|_{\mathcal{B}} \quad (3.199)$$

с постоянной  $c > 0$ , не зависящей от вектора  $h \in \mathcal{B}$ .

*Доказательство.* Согласно лемме 4.4 достаточно показать, что однородное уравнение (3.172) не имеет нетривиальных решений в пространстве  $\mathcal{B}$ . Пусть  $q + Aq = 0$  для некоторого вектора  $q \in \mathcal{B}$ . Тогда согласно лемме 4.3, теореме 1 и предложению 1 получаем, что соответствующая функция

$$u^+ = \Phi[q] \equiv 0, \quad (x, y) \in \Pi_+.$$

Положим для  $\epsilon > 0$  функцию

$$w_{\epsilon}(x, y) = \chi(\epsilon^{-1}(x - l(y)))u^-(x - \epsilon, y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad |y| < 1, \quad (3.200)$$

где  $\chi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$  – некоторая фиксированная функция такая, что

$$\chi(x) \equiv 1 \text{ при } x \leq 0, \quad \chi(x) \equiv 0 \text{ при } x \geq 1/2.$$

Тогда имеем

$$\|u^- - w_\epsilon\|_{W_2^2(\Pi_-)} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (3.201)$$

Из определения (3.200) и свойств функции  $\chi$  вытекает (см. [242, § 5.4]), что найдется такая функция  $v_\epsilon \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$ , где полоса  $\bar{\Pi} = \{x \in \mathbb{R}, |y| \leq 1\}$ , для которой верна оценка

$$\|w_\epsilon - v_\epsilon\|_{W_2^2(\bar{\Pi})} \leq \epsilon. \quad (3.202)$$

По теореме 2, примененной к сопряженной функции  $\bar{v}_\epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ , учитывая тождество  $u^+ \equiv 0$ , получаем равенство

$$\iint_{\Pi_-} \{(u_{yy}^- - (u_{xx}^-)((\bar{v}_\epsilon)_{yy} - (\bar{v}_\epsilon)_{xx}) + 4u_{xy}^-(\bar{v}_\epsilon)_{yx}\} dx dy = 0. \quad (3.203)$$

Тогда, устремляя в (3.203)  $\epsilon \rightarrow 0$  и учитывая оценки (3.201), (3.202), имеем равенство

$$\iint_{\Pi_-} \{|u_{yy}^- - u_{xx}^-|^2 + 4|u_{xy}^-|^2\} dx dy = 0.$$

Таким образом, функция  $u_{xy}^-(x, y) \equiv 0$ ,  $(x, y) \in \Pi_-$ , откуда получаем, что  $u^-(x, y) = a(x) + b(y)$ ,  $(x, y) \in \Pi_-$ . Отсюда с учетом соотношений

$$u^- \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad u^-(x, \pm 1) = 0, \quad x < 0,$$

закключаем, что  $u^- \equiv 0$ ,  $(x, y) \in \Pi_-$ . Тогда из (3.197) получаем утверждение:  $q_k(t) \equiv 0$ ,  $k = 1, 2$ . Теорема доказана.

**3.5.3** Сформулируем и докажем основной результат данного параграфа об однозначной разрешимости граничной задачи (3.134).

**Теорема 4.** Для любых функций  $f, g$ , удовлетворяющих условиям (3.135), существует и является единственным решением  $u \in C^4(\Pi_+) \cap C^1(\bar{\Pi}_+)$  граничной задачи (3.134). Это решение имеет вид  $u = \Phi[q]$  с вектор-функцией  $q \in \mathcal{B}$ , однозначно определяемой из уравнения (3.172) с правой частью (3.173), и допускает при  $x > L$ ,  $|y| \leq 1$  разложение (3.162) с коэффициентами  $a_k$  из (3.163), причем выполняется оценка

$$|a_k| \leq c_0 (\ln k + 1)^{-1} \exp(\pi Lk/2) \{\|f\|_{C^1[-1,1]} + \|g\|_{C[-1,1]}\}, \quad (3.204)$$

где постоянная  $c_0 > 0$  не зависит от  $f, g$ . Существует такая постоянная  $c > 0$ , что для решений граничной задачи (3.134) выполняется оценка (3.174).

*Доказательство.* Согласно теореме 1 из § 3.4 и теореме 3 для доказательства достаточно показать единственность решения граничной задачи (3.134). Для этого используем прием из [344, 407].

Пусть  $u$  – решение однородной граничной задачи (3.134). Тогда [362, с. 235] для любого  $\epsilon > 0$  функция  $u_\epsilon(x, y) := u(x + \epsilon, y)$  принадлежит  $C^k(\bar{\Pi}_+)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . При этом  $u_\epsilon$  является решением граничной задачи (3.134) с

граничными данными

$$f = f_\epsilon := u(l(y) + \epsilon, y), \quad g = g_\epsilon := \frac{\partial u}{\partial n}(l(y) + \epsilon, y),$$

причем  $\{f'_\epsilon, g_\epsilon\} \in \mathcal{B}$ . Тогда (см. теорему 2 и предложение 1) функции  $u_\epsilon$  должны иметь вид (3.161) и поэтому справедлива оценка

$$\|u_\epsilon\|_{C^1(\bar{\Pi}_+)} \leq c \{ \|f_\epsilon\|_{C^1[-1,1]} + \|g_\epsilon\|_{C[-1,1]} \}$$

с постоянной  $c > 0$ , которая не зависит от  $\epsilon > 0$ . Устремляя  $\epsilon \rightarrow 0$ , заключаем, что  $u \equiv 0$ ,  $(x, y) \in \Pi_+$ .

Теорема доказана.

Объединяя оценки (3.174), (3.204), с учетом (3.162) и (3.140) получаем, что для решений граничной задачи (3.134) выполняется оценка

$$|u(x, y)| + |\nabla u(x, y)| \leq c \{ \|f\|_{C^1} + \|g\|_C \} \exp(-\delta x), \quad (3.205)$$

$$x \geq 0, \quad |y| \leq 1, \quad \delta = \min_{k=1,2,\dots} \operatorname{Im} \lambda_k,$$

с постоянной  $c > 0$ , не зависящей от граничных данных  $f, g$ , удовлетворяющих условиям (3.135). Оценка (3.205) уточняет принцип максимума (3.174) с учетом наличия в области  $\Pi_+$  бесконечно удаленной точки.

Отметим, что постановка условия на бесконечности в (3.134) допускает и другие, менее ограничительные, по сравнению с требованием конечности величины  $\|u\|_{C^1(\bar{\Pi}_+)}$ , варианты (см. [192, 193]). В идейном плане основной момент проведенных рассуждений при сведении граничной задачи (3.134) к системе интегральных уравнений состоит в построении функций  $Q_j(x, y; t)$ ,  $j = 1, 2$ , а именно в перенесении конструкции Шермана–Лауричеллы на случай полуполосы. Относительно других способов сведения граничных задач для бигармонического уравнения в областях с конечной границей к граничным интегральным уравнениям см. [158, с. 203], [163, гл. 3, § 2], [195, 204].

Рассмотрения предыдущего и данного параграфов могут быть обобщены на случай функции  $l(y)$  с более общими условиями чем  $l \in C^2$ ,  $l(\pm 1) = l'(\pm 1) = 0$ . Для этого следует привлечь результаты Радона и их обобщения, связанные с теорией потенциала [15], [97, гл. 4], [210].

## ГЛАВА 4

### МЕТОД СУПЕРПОЗИЦИИ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И АКУСТИКИ

В данной главе рассмотрено использование метода суперпозиции при построении решений некоторых линейных плоских задач теории упругости и акустики.

В § 4.1 и § 4.2, аналогично рассмотрением § 3.1, изучены плоские статические задачи теории упругости для полуполосы – задача в напряжениях и смешанная граничная задача. Стационарные динамические граничные задачи теории упругости для полуполосы и четверть-плоскости рассмотрены в § 4.3 и § 4.4.

В § 4.5 приведен, в частности, сравнительно новый подход к построению решения плоской граничной задачи Неймана для уравнения Гельмгольца во внешности прямолинейно-круговой луночки. Этот подход основан на совместном использовании метода суперпозиции (метода частичных областей) и классического принципа отражения для решений уравнения Гельмгольца через прямолинейный отрезок. Задачи об акустическом волноводе и об излучении звука конечной цилиндрической оболочкой рассмотрены в § 4.6 и § 4.7.

Основные результаты главы изложены в публикациях [18, 61, 63, 65, 67, 72].

#### 4.1 Плоская задача о деформировании упругой полуполосы

4.1.1 Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для изотропной однородной полуполосы  $x > 0$ ,  $|y| < 1$ , находящейся под воздействием силовой нагрузки на торце  $x = 0$ ,  $|y| < 1$ . Поле напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  удовлетворяет системе уравнений равновесия и совместности деформаций

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (4.1)$$

и граничным условиям

$$\sigma_y(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0, \quad x > 0,$$

$$\sigma_x(0, y) = f(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = g(y), \quad |y| < 1 \quad (4.2)$$

(см. [197, § 15]). В дополнение к (4.1), (4.2) требуется выполнение условия убывания поля напряжений на бесконечности и условия конечности упругой энергии в окрестностях угловых точек полуполосы. В рамках метода суперпозиции сформулированная граничная задача рассматривалась многими авторами (см., например, [87, § 8], [336]). Однако ранее построенные выражения не получили должного математического обоснования, не были также полностью использованы потенциальные возможности метода суперпозиции. Здесь такие возможности реализуются на примере продольной деформации полуполосы, т. е. когда выполняются условия симметрии

$$f(y) = f(-y), \quad g(y) = -g(-y), \quad |y| < 1.$$

Далее в этом параграфе на функции  $f, g$  накладываются условия

$$f \in C^3[-1, 1], \quad g \in C^3[-1, 1], \quad \int_{-1}^1 f(y) dy = 0, \quad (4.3)$$

где равенство нулю интеграла от  $f(y)$  означает выполнение требования самоуравновешенности приложенной нагрузки.

Следуя общей схеме метода суперпозиции, компоненты поля напряжений, удовлетворяющие системе уравнений (4.1), представим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty X(s) \frac{U_1(s, y)}{s \cosh^2 s} \sin(sx) ds - \\ &- \sum_{n=1}^\infty (-1)^n (Y_n x - f_n) \exp(-\beta_n x) \cos(\beta_n y), \\ \sigma_y(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty X(s) \frac{U_2(s, y)}{s \cosh^2 s} \sin(sx) ds - \\ &- \sum_{n=1}^\infty (-1)^n [(2\beta_n^{-1} - x)Y_n + f_n] \exp(-\beta_n x) \cos(\beta_n y), \\ \tau_{xy}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty X(s) \frac{U_3(s, y)}{s \cosh^2 s} \cos(sx) ds + \\ &+ \sum_{n=1}^\infty (-1)^n [(\beta_n^{-1} - x)Y_n + f_n] \exp(-\beta_n x) \sin(\beta_n y), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\beta_n = \pi(n - 1/2), \quad n = 1, 2, \dots$$

и

$$f(y) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n f_n \cos(\beta_n y), \quad g(y) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n g_n \sin(\beta_n y). \quad (4.5)$$

При этом введены обозначения для функций

$$\begin{aligned} U_1(s, y) &= (s \sinh s - 2 \cosh s) \cosh(sy) - sy \cosh s \sinh(sy), \\ U_2(s, y) &= s(-\sinh s \cosh(sy) + y \cosh s \sinh(sy)), \\ U_3(s, y) &= (\cosh s - s \sinh s) \sinh(sy) + sy \cosh s \cosh(sy). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Предполагается, что в выражениях (4.4) ограниченные функция  $X(s) \in L_\infty(\mathbb{R})$  и последовательность  $\{Y_n\} \in l_\infty$  являются неизвестными. При этом, непосредственно из (4.4)–(4.6) получаем формальное выполнение требуемых равенств

$$\sigma_x(0, y) = f(y), \quad \sigma_y(x, \pm 1) = 0.$$

Тогда выполнение граничных условий из (4.2) для касательного напряжения  $\tau_{xy}$  с учетом равенства (3.10) и разложений в ряды Фурье функции  $\cosh$  в знаменателе левых частей следующих двух равенств – без аргумента

$$\begin{aligned} \frac{\sinh(sy)}{s \cosh s} &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s^2 + \beta_n^2} \sin(\beta_n y), \quad |y| \leq 1, \\ y \frac{\cosh(sy)}{\cosh s} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s^2 + \beta_n^2} \left( \frac{2s^2}{s^2 + \beta_n^2} - 1 - \tanh s \right) \sin(\beta_n y), \quad |y| \leq 1, \end{aligned}$$

приводит к следующей системе интегроалгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} X(s) \left( \tanh s + \frac{s}{\cosh^2 s} \right) &= 4s^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{(s^2 + \beta_n^2)^2} + 2s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n f_n}{s^2 + \beta_n^2}, \\ Y_n &= \frac{4\beta_n^3}{\pi} \int_0^\infty \frac{X(s)}{(s^2 + \beta_n^2)^2} ds + \beta_n (g_n - f_n), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

Линейная система интегроалгебраических уравнений (4.7) очевидным образом сводится к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} X(s) - \frac{16s^3 \cosh^2 s}{\pi \Delta(s)} \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^3 X(t)}{(s + \beta_n^2)^2 (t + \beta_n^2)^2} dt &= \\ = \frac{2s \sinh^2 s}{\Delta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\beta_n^2 - s^2) \beta_n f_n + 2s^2 \beta_n g_n}{(s^2 + \beta_n^2)^2}, \quad s > 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где функция  $\Delta(s) = \sinh s \cosh s + s$ .

В силу равенства

$$1 - \frac{16s^3 \cosh^2 s}{\pi \Delta(s)} \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^3}{(s^2 + \beta_n^2)^2 (t^2 + \beta_n^2)^2} dt = \frac{2s}{\Delta(s)}, \quad s \geq 0, \quad (4.9)$$

интегральное уравнение (4.8) является регулярным (см. (2.5)). Однако при этом экспоненциальное стремление к нулю функции  $s/\Delta(s)$  при  $s \rightarrow \infty$  из выражения (4.9) не позволяет сделать содержательных выводов относительно разрешимости и асимптотических свойств ограниченных решений уравнения (4.8), если ограничиться теорией регулярных уравнений. В работе [87] в аналогичной ситуации наряду с теорией регулярных уравнений используются рассуждения физического характера, связанные с априорными свойствами гладкости решения исходной задачи теории упругости. В данном параграфе для получения утверждений о разрешимости и асимптотических свойствах ограниченных решений интегрального уравнения (4.8) используется методика и результаты из § 2.1

Как и в случае уравнения (3.21), ядро

$$Q(s, t) = \frac{16 s^3 \cosh^2 s}{\pi \Delta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^3}{(s + \beta_n^2)^2 (t + \beta_n^2)^2}$$

интегрального уравнения (4.8) представляется в виде  $Q = Q_0 + Q_1$  (см. 3.27), так что ядра  $Q_0(s, t)$ ,  $Q_1(s, t)$  удовлетворяют условиям (2.2)–(2.4) с последовательностью чисел  $t_n = n - 1/2$ ,  $n = 1, 2, \dots$  и значениями параметров:  $\nu_0 = 2$ ,  $\nu_1 = 3$ ,  $\nu_2 = 1$ ,  $\nu_3 > 0$  – любое, а  $\nu_4$  – любое число, меньшее трех. При этом функции  $\Phi_1(\gamma)$ ,  $\Phi_2(\gamma)$  и  $\mathcal{D}(\gamma)$  имеют тот же вид, что и в § 3.1 (см. (3.28)). Тогда использование результатов § 2.2 приводит к следующему утверждению.

**Теорема 1.** Для любых начальных данных  $f$ ,  $g$ , удовлетворяющих условиям (4.3), интегральное уравнение (4.8) имеет единственное непрерывное и ограниченное при  $s \geq 0$  решение  $X(s)$ . При этом для  $X(s)$  и последовательности

$$X_n = \frac{4\beta_n^3}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{X(s) ds}{(s^2 + \beta_n^2)^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

справедливы представления для любого  $\sigma \in (1, \sigma_0)$ :

$$\begin{aligned} X(s) &= a + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} M(\gamma) s^{-\gamma} d\gamma, \quad s > 0, \\ X_n &= a + \frac{2g'(1)}{\beta_n} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} M(\gamma) \frac{(\gamma + 1)}{\cos(\pi\gamma/2)} \beta_n^{-\gamma} d\gamma, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $a$  – постоянная, число  $\sigma_0 \in (1, 2)$  определено согласно, (3.29), а  $M(\gamma)$  – аналитическая в полосе  $\text{Re } \gamma \in (1, \sigma_0)$  функция с оценками

$$|M(\gamma)| \leq c_\sigma \exp(-d|\text{Im } \gamma|), \quad \text{Re } \gamma \in (1, \sigma), \quad d > 0.$$



Из теоремы 1 в частности вытекает, что для любого значения  $\sigma \in (1, \sigma_0)$  справедливы асимптотические равенства

$$\begin{aligned} X(s) &= a + O(s^{-\sigma}), \quad s \rightarrow \infty, \\ X_n &= a + \frac{2g'(1)}{\beta_n} + O(n^{-\sigma}), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Отметим, что в рассматриваемой ситуации представляется возможным априорное определение постоянной  $a$  из выражений (4.11), (4.12). А именно, справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** Постоянная  $a$  из утверждения теоремы 1 определяется равенством

$$a = -f(1) - \frac{\pi}{2} g(1). \quad (4.13)$$

*Доказательство.* Для доказательства равенства (4.13) используем теорему 3 из § 2.1

Непосредственные вычисления показывают, что для интегрального уравнения (4.8) соответствующее союзное однородное уравнение

$$Y(s) - \int_0^\infty Q(t, s) Y(t) dt = 0, \quad s > 0,$$

(см. утверждения леммы 2 из § 2.2) имеет нетривиальное решение

$$Y(s) = \frac{\Delta(s)}{s \sinh^2 s} \in B_{0,1},$$

а соответствующая уравнению (4.8) функция  $q_0(s)$  (см. п. 4 из § 2.2 и равенство (4.9)) имеет вид

$$q_0(s) = \frac{2s}{\Delta(s)}, \quad s > 0.$$

Тогда по утверждению (2.34) получаем для постоянной  $a$  выражение

$$\begin{aligned} a &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{(\beta_n^2 - s^2)\beta_n f_n + 2s^2\beta_n g_n}{(s^2 + \beta_n^2)^2} ds = \\ &= -f(1) \int_0^\infty \frac{ds}{\cosh^2 s} + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^\infty g_n = -f(1) - \frac{\pi}{2} g(1). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Таким образом, из (4.12), (4.13) с учетом соотношений

$$f_n = -2f(1)\beta_n^{-1} + O(n^{-3}), \quad g_n = -2g'(1)\beta_n^{-2} + O(n^{-3}), \quad n \rightarrow \infty,$$

вытекает, что справедливы асимптотические представления

$$X(s) = -f(1) - \frac{\pi}{2} g(1) + O(s^{-\sigma}), \quad s \rightarrow \infty,$$

$$Y_n = X_n + \beta_n(g_n - f_n) = f(1) - \frac{\pi}{2} g(1) + O(n^{-\sigma}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.14)$$

Отметим, что знание асимптотик (4.14) позволяет существенно улучшить сходимость рядов и интегралов в выражениях (4.4) для определения напряжений в окрестности границы полуполосы и, в частности, вблизи угловых точек.

Вычисляя, на основании теоремы Коши о вычетах, значения интегралов при  $x > 0$ ,  $y \in (-1, 1)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{U_1(s, y)}{s \cosh^2 s} \sin(xs) ds &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right\} \frac{U_1(s, y)}{s \cosh^2 s} e^{ixs} ds = \\ &= -1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2\beta_n^{-1} + x) \exp(-\beta_n x) \cos(\beta_n y), \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{U_2(s, y)}{s \cosh^2 s} \sin(xs) ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_2(s, y)}{s \cosh^2 s} e^{ixs} ds = \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-\beta_n x) \cos(\beta_n y), \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{U_3(s, y)}{s \cosh^2 s} \cos(xs) ds &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_3(s, y)}{s \cosh^2 s} e^{ixs} ds = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\beta_n^{-1} + x) \exp(-\beta_n x) \sin(\beta_n y), \end{aligned}$$

и используя значения сумм [207, с. 640]

$$S_1(x, y) := -x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-\beta_n x) \cos(\beta_n y) = x \frac{\cosh\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)}{\cosh(\pi x) + \cos(\pi y)},$$

$$S_2(x, y) := -x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp(-\beta_n x) \sin(\beta_n y) = x \frac{\sinh\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)}{\cosh(\pi x) + \cos(\pi y)},$$

$$S_3(x, y) := - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \beta_n^{-1} \exp(-\beta_n x) \cos(\beta_n y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi x}{2}\right)},$$

после несложных преобразований, с учетом представлений (4.14), получаем для напряжений из (4.4) выражения

$$\sigma_x = f(1) - \pi g(1)(S_1(x, y) + S_3(x, y) - 1/2) + I_1(x, y),$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \pi g(1)(S_1(x, y) - S_3(x, y)) + I_2(x, y), \\ \tau_{xy} &= -\pi g(1)S_2(x, y) + I_3(x, y).\end{aligned}\quad (4.15)$$

Здесь использованы выражения

$$\begin{aligned}I_1(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (X(s) - a) \frac{U_1(s, y)}{s \cosh^2 s} \sin(xs) ds - \\ &\quad - \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left\{ \left[ Y_n - f(1) + \frac{\pi}{2} g(1) \right] x - \right. \\ &\quad \left. - \left[ f_n + \frac{2}{\beta_n} f(1) \right] \right\} \exp(-\beta_n x) \cos(\beta_n y), \\ I_2(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (X(s) - a) \frac{U_2(s, y)}{s \cosh^2 s} \sin(xs) ds - \\ &\quad - \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left\{ \left( \frac{2}{\beta_n} - x \right) \left[ Y_n - f(1) + \frac{\pi}{2} g(1) \right] + \left[ f_n + \frac{2}{\beta_n} f(1) \right] \right\} \times \\ &\quad \times \exp(-\beta_n x) \cos(\beta_n y), \\ I_3(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [X(s) - a] \frac{U_3(s, y)}{s \cosh^2 s} \cos(xs) ds + \\ &\quad + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left\{ \left( \frac{1}{\beta_n} - x \right) \left[ Y_n - f(1) + \frac{\pi}{2} g(1) \right] + \left[ f_n + \frac{2}{\beta_n} f(1) \right] \right\} \times \\ &\quad \times \exp(-\beta_n x) \sin(\beta_n y).\end{aligned}$$

При этом, учитывая (4.14) и (4.7), получаем, что функции  $I_j(x, y)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , являются непрерывными при  $x = 0$ ,  $y = 1$ , причем

$$\begin{aligned}I_1(x, y) &= O(\rho), \quad I_2(x, y) = O(\rho), \\ I_3(x, y) &= g(1) + O(\rho), \quad \rho \rightarrow 0,\end{aligned}\quad (4.16)$$

где полярные координаты  $(\rho, \theta)$  в окрестности точки  $x = 0$ ,  $y = 1$ :

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = 1 - \rho \sin \theta, \quad \theta \in [0, \pi/2].$$

Тогда из (4.15), (4.16) получаем следующее представление для поля напряжений в окрестности угловой точки:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= f(1) + \frac{g(1)}{2}(\pi - \sin 2\theta - 2\theta) + O(\rho), \quad \rho \rightarrow 0, \\ \sigma_y &= \frac{g(1)}{2}(\sin 2\theta - 2\theta) + O(\rho), \quad \rho \rightarrow 0,\end{aligned}\quad (4.17)$$

$$\tau_{xy} = g(1) \sin^2 \theta + O(\rho), \quad \rho \rightarrow 0.$$

Асимптотические соотношения (4.17), взятые для значений угла  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$ , показывают, что при  $g(1) \neq 0$ , т. е. при нарушении условия парности касательных напряжений в угловой точке, нормальные напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  терпят разрыв на величину  $\pi g(1)/2$ . Этот результат, как и формулы (4.17), полностью согласуются с выводом работы [325], относящемся к случаю упругой четверть-плоскости с аналогичными (4.2) условиями нагружения на границе.

Теорема 1 заключает в себе основу для исследования построенного решения граничной задачи (4.1), (4.2) в виде (4.4). Методика такого исследования изложена в § 3.1 и § 3.3 на примере бигармонической задачи. Здесь без доказательства сформулируем один из результатов, относящихся к задаче (4.1), (4.2).

**Теорема 2.** При выполнении условий (4.3) поле напряжений (4.4) при  $x > 0$ ,  $|y| \leq 1$  допускает разложение в ряд по однородным решениям

$$\begin{pmatrix} \sigma_x(x, y) \\ \tau_{xy}(x, y) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \begin{pmatrix} U_1(x, y) \\ iU_3(x, y) \end{pmatrix} \exp(i\lambda_k x), \quad (4.18)$$

$$\Delta(\lambda_k) = 0, \quad \text{Im } \lambda_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где коэффициенты  $a_k$  имеют вид

$$a_k = \frac{1}{\cosh^2 \lambda_k} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_k^2(X_n + \beta_n g_n) + \beta_n(\beta_n^2 - \lambda_k^2)f_n}{(\lambda_k^2 + \beta_n^2)^2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.19)$$

и последовательность  $X_n$  определяется посредством единственного решения  $X(s) \in L_{\infty}(R_+)$  интегрального уравнения (4.8) согласно выражению (4.10).

На основании (4.19), (4.11), (4.13) можно показать справедливость следующего утверждения.

**Следствие 1.** Для коэффициентов  $a_k$  разложения (4.18) верна асимптотика

$$a_k = \frac{\pi}{2} g(1) \lambda_k^{-2} + O(k^{-3}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.20)$$

Вопрос о справедливости разложения (4.18) на торце полуполосы и, в частности, вопрос о двукратном разложении

$$\begin{pmatrix} f(y) \\ g(y) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \begin{pmatrix} U_1(x, y) \\ iU_3(x, y) \end{pmatrix}, \quad |y| < 1, \quad (4.21)$$

будет рассмотрен в главе 5.

## 4.2 Смешанная граничная задача для полуполосы

**4.2.1** Рассматривается смешанная плоская граничная задача для упругой изотропной полуполосы  $x > 0$ ,  $|y| < 1$  со свободными от напряжений боковыми сторонами и заданными смещениями на торце. Требуется найти вектор смещений

$$\vec{u} = \{u_x(x, y), u_y(x, y)\},$$

удовлетворяющий в полуполосе однородной системе уравнений Ламе

$$\Delta \vec{u} + (1 - 2\nu)^{-1} \nabla \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (4.22)$$

( $\nu \in (0, 1/2)$  – коэффициент Пуассона материала полуполосы) и граничным условиям

$$\sigma_y(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0, \quad x > 0, \quad (4.23)$$

$$u_x(0, y) = f(y), \quad u_y(0, y) = g(y), \quad |y| < 1,$$

где поле напряжений согласно закону Гука имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right), \\ \frac{1}{2G} \sigma_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right), \\ \frac{1}{2G} \tau_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

и  $G$  – модуль сдвига материала. Дополнительно требуется выполнение условия конечности общей упругой энергии в полуполосе [41], что обеспечивает единственность решения граничной задачи (4.22), (4.23).

Для простоты остановимся на анализе симметричной задачи. Предполагаем, что вещественные функции  $f$ ,  $g$  удовлетворяют условиям симметрии и гладкости:

$$f(y) = f(-y), \quad g(y) = -g(-y), \quad f \in W_p^3, \quad g \in W_p^3, \quad 1 < p < \infty. \quad (4.25)$$

Решение граничной задачи (4.22), (4.23) по методу суперпозиции представим, аналогично рассмотренным § 3.1 и § 4.1, в виде

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty X(s) \frac{U_x(s, y)}{\cosh^2 s} \sin(sx) ds - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (Y_n x - f_n) \exp(-\beta_n x) \cos(\beta_n y), \end{aligned}$$

$$u_y(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty X(s) \frac{U_y(s, y)}{\cosh^2 s} \cos(sx) ds + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{[(3 - 4\nu)\beta_n^{-1} - x]Y_n + f_n\} \exp(-\beta_n x) \sin(\beta_n y), \quad (4.26)$$

где последовательности  $\beta_n$ ,  $f_n$ ,  $g_n$  такие же, как и в предыдущем параграфе, а функции

$$U_x(s, y) = \left( \sinh s - 2 \frac{1-\nu}{s} \cosh s \right) \cosh sy - y \cosh s \sinh sy, \\ U_y(s, y) = - \left( \sinh s + \frac{1-2\nu}{s} \cosh s \right) \sinh sy + y \cosh s \cosh sy. \quad (4.27)$$

Тогда из (4.26) и (4.24) для напряжений получаем выражения

$$\frac{1}{2G} \sigma_x(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty X(s) \frac{U_1(s, y)}{\cosh^2 s} \cos(sx) ds - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{[(1 - 2\nu) - \beta_n x]Y_n + \beta_n f_n\} \exp(-\beta_n x) \cos(\beta_n y), \\ \frac{1}{2G} \sigma_y(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty X(s) \frac{U_2(s, y)}{\cosh^2 s} \cos(sx) ds + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{[(3 - 2\nu) - \beta_n x]Y_n + \beta_n f_n\} \exp(-\beta_n x) \cos(\beta_n y), \quad (4.28) \\ \frac{1}{2G} \tau_{xy}(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty X(s) \frac{U_3(s, y)}{\cosh^2 s} \sin(sx) ds + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{[2(1 - \nu) - \beta_n x]Y_n - \beta_n f_n\} \exp(-\beta_n x) \sin(\beta_n y)$$

с функциями  $U_j(s, y)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , определенными согласно равенствам (4.6). При этом граничные условия для  $\sigma_y$ ,  $u_x$  выполняются в силу выражений (4.26), (4.28), а выполнение граничных условий для  $\tau_{xy}$ ,  $u_y$  приводит к следующей системе линейных интегроалгебраических уравнений относительно неизвестных функции  $X(s) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$  и последовательности  $\{Y_n\}_{n=1}^\infty \in l_\infty$ :

$$\frac{\Delta(s)}{\cosh^2 s} X(s) = -2s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n(s)Y_n}{(s^2 + \beta_n^2)^2} + s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n f_n}{s^2 + \beta_n^2}, \quad s > 0, \\ (3 - 4\nu)Y_n = \\ = \frac{8\beta_n}{\pi} \int_0^\infty \frac{Q_n(s)X(s)}{(s^2 + \beta_n^2)^2} ds + \beta_n(g_n - f_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.29)$$

где функции

$$\Delta(s) = \sinh s \cosh s + s, \quad Q_n(s) = \nu \beta_n^2 - (1 - \nu)s^2.$$

Система уравнений (4.29) для любого  $\nu \in (0, 1/2)$  является вполне регулярной, поскольку справедливы оценки

$$\frac{2s \cosh^2 s}{\Delta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|Q_n(s)|}{(s^2 + \beta_n^2)^2} \leq \frac{1}{2}, \quad s \geq 0,$$

$$\frac{8\beta_n}{\pi(3 - 4\nu)} \int_0^{\infty} \frac{|Q_n(s)|}{(s^2 + \beta_n^2)^2} ds \leq \frac{2}{\pi}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда, а также из (4.29) и [126, с. 38–39] следует, что при выполнении оценки на коэффициенты Фурье заданных смещений

$$|f_n| + |g_n| = O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty$$

(в частности, при условиях (4.25)) система уравнений (4.29) имеет единственное решение  $X(s)$ ,  $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$  из пространства  $L_{\infty}(\mathbb{R}_+) \oplus l_{\infty}$ . Это решение может быть получено методом последовательных приближений.

Как отмечалось в [87, 92], свойства ограниченности решения системы уравнений (4.29) недостаточно для того, чтобы можно было утверждать о предельности решения смешанной граничной задачи в виде (4.26). Для получения такого утверждения, а также для полного описания напряженно-деформированного состояния полуполосы в окрестностях угловых точек на основании выражений (4.28) необходимо определить асимптотическое поведение неизвестных  $X(s)$ ,  $Y_n$  при  $s \rightarrow \infty$  и  $n \rightarrow \infty$  соответственно.

Исследование асимптотических свойств неизвестных системы уравнений (4.29) проводится на основании рассмотрений § 2.1. Система уравнений (4.29) сводится к интегральному уравнению

$$X(s) + \frac{16s \cosh^2 s}{\pi(3 - 4\nu)\Delta(s)} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n Q_n(s) Q_n(t)}{(s^2 + \beta_n^2)^2 (t^2 + \beta_n^2)^2} X(t) dt =$$

$$= \frac{s \cosh^2 s}{(3 - 4\nu)\Delta(s)} \left[ (3 - 4\nu) \times \right. \tag{4.30}$$

$$\left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n f_n}{s^2 + \beta_n^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n Q_n(s)(g_n - f_n)}{(s^2 + \beta_n^2)^2} \right], \quad s > 0.$$

При этом, соответствующее ядро  $Q(s, t)$  из уравнения (4.30) можно записать в виде

$$Q(s, t) = Q_0(s, t) + Q_1(s, t), \quad Q_1(s, t) = \left[ \frac{\cosh^2 s}{\Delta(s)} - 1 \right] Q_0(s, t),$$

где для  $Q_0(s, t)$  справедливо представление (2.2) с функциями

$$\phi_1(\lambda) = \frac{16\lambda[(1-\nu)\lambda^2 - \nu\pi^2]}{\pi(3-4\nu)(\lambda^2 + \pi^2)^2},$$

$$\phi_2(\lambda) = \frac{\pi\lambda[\nu\pi^2\lambda^2 - (1-\nu)]}{(\pi^2\lambda^2 + 1)^2}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0,$$

и последовательностью  $t_n = n - 1/2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . При этом (см. соответствующие оценки (2.3), (2.4)) параметры  $\nu_0 = 0$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 1$ ,  $\nu_3 > 0$  – любое, а  $\nu_4$  – любое число, меньшее единицы. Для преобразований Меллина  $\Phi_1(\gamma)$ ,  $\Phi_2(\gamma)$  и функции  $D(\gamma)$  получаем при  $\operatorname{Re} \gamma \in (-1, 1)$  выражения

$$\Phi_1(\gamma) = 4\pi^{\gamma-1} \frac{1-2\nu+\gamma}{(3-4\nu)\cos(\pi\gamma/2)}, \quad \Phi_2(\gamma) = 4\pi^{1-\gamma} \frac{2\nu-1+\gamma}{4\cos(\pi\gamma/2)},$$

$$D(\gamma) = \frac{D_0(\gamma)}{(3-4\nu)\cos^2(\pi\gamma/2)},$$

$$D_0(\gamma) = (3-4\nu)\cos^2(\pi\gamma/2) - (1-2\nu)^2 + \gamma^2.$$

Отметим, что корни функции  $D_0(\gamma)$  совпадают с корнями уравнения, полученного в [275] при рассмотрении смешанной граничной задачи статической теории упругости для четверть-плоскости. В полосе  $\operatorname{Re} \gamma \in [0, 1]$  четная функция  $D_0(\gamma)$  имеет единственный простой корень  $\alpha = \alpha(\nu) \in (1/2, 1)$ . Пусть  $\alpha_1 > 1$  – реальная часть следующего за  $\alpha$  по возрастанию реальных частей корня  $D_0(\gamma)$ , а  $\sigma$  – произвольное число из интервала  $(1, \min(2, \alpha_1))$ . Тогда использование методики и результатов § 2.1 дает возможность утверждать, что справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** При выполнении условий (4.25) для ограниченного решения системы уравнений (4.29) верны асимптотические равенства

$$\begin{aligned} X(s) &= -\frac{f(1)}{2(1-\nu)} + as^{-\alpha} + O(s^{-\sigma}), \quad s \rightarrow \infty, \\ Y_n &= \frac{f(1)}{1-\nu} + b\beta_n^{-\alpha} + O(n^{-\sigma}), \quad s \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.31)$$

где  $a, b$  – вещественные постоянные, связанные соотношением

$$b = \frac{2(2\nu + \alpha - 1)}{(3-4\nu)\cos(\pi\alpha/2)} a.$$

При этом последовательность  $Y_n$  допускает представление

$$Y_n = \frac{(1-2\nu)(1-\nu)^{-1}f(1) + \beta_n(g_n - f_n) + 2g'(1)\beta_n^{-1}}{3-4\nu} +$$



$$+ b \beta_n^{-\alpha} + \frac{1}{\pi i (3 - 4\nu)} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \widehat{M}(\gamma) \frac{2\nu + \gamma - 1}{\cos(\pi\gamma/2)} \beta_n^{-\gamma} d\gamma, \quad (4.32)$$

с аналитической в полосе  $\operatorname{Re} \gamma \in (1, \sigma)$  функцией  $\widehat{M}(\gamma)$ , допускающей оценки  $|\widehat{M}(\gamma)| \leq c_\sigma \exp(-d |\operatorname{Im} \gamma|)$ , для некоторого  $d > 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $X(s)$ ,  $Y_n$  – ограниченное решение системы уравнений (4.29). Тогда функция  $X(s)$  является непрерывной при  $s \geq 0$ , однако в общем случае  $X(0) \neq 0$ . Поэтому для исследования асимптотики  $X(s)$  при  $s \rightarrow \infty$  следует рассмотреть преобразование Меллина функции  $X_0(s) = X(s) - X(0)$ . Тогда, следуя пунктам 2, 3 из § 2.1, для преобразования Меллина  $\widehat{M}(\gamma) = M[X_0](\gamma)$  получаем соотношение

$$\begin{aligned} D_0(\gamma) \widehat{M}(\gamma) = & -4(1 - \nu)^2 \pi^\gamma (1 - \gamma) \zeta(1 - \gamma, 1/2) X(0) \cos(\pi\gamma/2) + \\ & + \left\{ \pi^\gamma (2\nu + \gamma - 2) \zeta(1 - \gamma, 1/2) f(1) \pi^{\gamma-1} (2\nu + \gamma - 1) \zeta(2 - \gamma, 1/2) g'(1) - \right. \\ & \left. - \pi^{\gamma-2} (2\nu + \gamma - 2) \zeta(3 - \gamma, 1/2) f''(1) + R(\gamma) \right\} - \\ & - \frac{\pi^\gamma (2\nu - \gamma - 1)}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \widehat{M}(\xi) \frac{(2\nu + \xi - 1) \zeta(\xi - \gamma + 1, 1/2)}{\pi^\xi \cos(\pi\xi/2)} d\xi, \\ & -1 < \sigma_1 < \operatorname{Re} \gamma < 0, \end{aligned} \quad (4.33)$$

где  $R(\gamma)$  – некоторая аналитическая и равномерно ограниченная в полосе  $\operatorname{Re} \gamma \in (-1 + \delta, 3 - 1/p)$  (для любого достаточно малого  $\delta > 0$ ) функция. Выражение (4.33) дает мероморфное продолжение функции  $D_0(\gamma) \widehat{M}(\gamma)$ ,  $\operatorname{Re} \gamma \in (\sigma_1, 0)$ , в полосу  $\operatorname{Re} \gamma \in (\sigma_1, \sigma)$ , откуда на основании формулы обращения Меллина получаем утверждения (4.31), (4.32).

Теорема доказана.

Теорема 1 позволяет дать обоснование формул (4.26) как таких, что дают решение граничной задачи (4.22), (4.23) (см. § 3.1), в частности, справедливо соотношение

$$\|u_x(x, y) - f(y)\|_{C[-1,1]} + \|u_y(x, y) - g(y)\|_{C[-1,1]} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0.$$

Кроме того, утверждение (4.31) позволяет применить при численном анализе системы уравнений (4.29) эффективный метод улучшенной редукции [87, 92].

Отметим, что первые члены асимптотик из (4.31) обусловлены способом построения решения, а не существом рассматриваемой граничной задачи (4.22), (4.23). Их наличие связано с тем обстоятельством, что в выражении (4.26) для  $u_y$  ряд с общим слагаемым, содержащим  $f_n$  в случае  $f(1) \neq 0$  имеет логарифмическую особенность при  $x \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow \pm 1$ , которая и устраняется с помощью первых членов асимптотик  $X(s)$ ,  $Y_n$ , не внося особенностей в общее выражение для компоненты  $u_x$ . Вторые члены асимптотик (4.31) отражают физическую сущность рассматриваемой смешанной граничной задачи

и имеют типичную [275] степенную зависимость с показателем  $\alpha$ . Значение постоянной  $a$  (или  $b$ ) должно определяться численным образом (в отличие от постоянной  $a$  из § 4.1) при решении системы уравнений (4.29) методом улучшенной редукции. В отличие от [92, § 9.3] здесь асимптотика неизвестных (4.31) получена с оценками остаточных членов.

На основании (4.31) нетрудно выделить особенность в поле напряжений (4.28) в случае, когда постоянная  $a \neq 0$ . Действуя аналогично [87, § 8], получаем следующие соотношения на заземленном торце  $x = 0$  при  $y \rightarrow 1$ :

$$\begin{aligned}\sigma_x(0, y) &= c(1 - \nu)(2\nu - \alpha - 2)(1 - y)^{\alpha-1} + O(1), \\ \sigma_y(0, y) &= c\nu(2\nu - \alpha - 2)(1 - y)^{\alpha-1} + O(1), \\ \tau_{xy}(0, y) &= c(2\nu + \alpha - 2) \tan(\pi\alpha/2)(1 - y)^{\alpha-1} + O(1),\end{aligned}\tag{4.34}$$

где постоянная

$$c = 8Ga\Gamma(1 - \alpha)/[\pi(3 - 4\nu)].$$

### 4.3 Гармонические волны в полубесконечном слое

Рассматривается плоская задача о возбуждении продольных волн Лэмба в полубесконечном упругом слое  $X > 0$ ,  $|Y| < d$  при действии силовых нагрузок на торце и свободных от напряжений боковых гранях [91, § 7.2]. Для простоты рассмотрений касательную нагрузку будем считать отсутствующей. Тогда граничная задача для нахождения вектора смещений

$$\vec{u} = \{u_x(x, y), u_y(x, y)\}$$

в безразмерных координатах  $x = X/d$ ,  $y = Y/d$  имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta \vec{u} + (1 - 2\nu)^{-1} \nabla \operatorname{div} \vec{u} + G^{-1} \rho \omega^2 \vec{u} &= 0, \quad x > 0, \quad |y| < 1, \\ \sigma_y(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1) &= 0, \quad x > 0, \\ \sigma_x(0, y) = 2Gf(y), \quad \tau_{xy}(0, y) &= 0, \quad |y| < 1.\end{aligned}\tag{4.35}$$

Здесь изотропный материал слоя характеризуется модулем сдвига  $G$ , коэффициентом Пуассона  $\nu \in (0, 1/2)$  и плотностью  $\rho > 0$ , а гармонический множитель  $\exp(-i\omega t)$  всюду опускается. Поле напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  определяется согласно выражениям (4.24). Пусть  $c_l$ ,  $c_t$  – скорости распространения продольных и поперечных волн в слое [91]. Определим, как обычно, безразмерные частоты колебаний

$$\Omega_1 = \omega d/c_l, \quad \Omega_2 = \omega d/c_t.$$

В большинстве публикаций вычислительного характера решение задачи (4.35) анализируется на основании метода собственных функций (см. [91, § 5.1, § 7.2]). Эффективность реализации этого метода во многом затруднена сложностью структуры нормальных мод слоя и требует вспомогательных

вычислений, связанных с комплексными корнями дисперсионного определителя Рэлея–Лэмба. Отличительной чертой метода суперпозиции является относительная простота свойств бесконечной алгебраической системы уравнений, к которой сводится соответствующая граничная задача. Однако использование метода суперпозиции в динамических задачах теории упругости для полубесконечного слоя наталкивается на трудности, связанные с необходимостью выполнения условий излучения на бесконечности [91, § 5.1]. При этом формальные выкладки по сведению граничной задачи к интегроалгебраической системе уравнений приводят к наличию в системе сингулярных интегралов. В данном параграфе показано, что использование принципа предельного поглощения [12, § 1] дает возможность провести корректную алгебраизацию граничной задачи (4.35), основанную на методе суперпозиции. При этом, на основании рассмотрений § 3.3 возможно осуществлять переход от представления решения граничной задачи (4.35) к представлению вектора  $\vec{u}$  в виде ряда по нормальным волнам Рэлея–Лэмба.

Решение граничной задачи (4.35) по методу суперпозиции строим с учетом принципа предельного поглощения. Вначале рассматривается среда с поглощением [12, § 1], так что  $\text{Im } \Omega_j = \epsilon_j > 0$ ,  $j = 1, 2$ , после чего решение для идеально упругой среды получаем в результате предельного перехода  $\epsilon_j \rightarrow 0$ ,  $j = 1, 2$ .

Для среды с поглощением решение  $\vec{u}$  ищем в виде

$$\begin{aligned}
 u_x &= iA_0 \Omega_1 \exp(i\Omega_1 x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} X(s)U_x(s, y) \exp(isx) ds + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha_k^{-1} Y_k \left[ \frac{\alpha_k^2 + q_2^2}{2\alpha_k} \exp(-q_1 x) - \alpha_k \exp(-q_2 x) \right] \cos(\alpha_k y), \quad (4.36) \\
 u_y &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} X(s)U_y(s, y) \exp(isx) ds + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha_k^{-1} Y_k \left[ \frac{\alpha_k^2 + q_2^2}{2q_1} \exp(-q_1 x) - q_2 \exp(-q_2 x) \right] \sin(\alpha_k y),
 \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
 U_x(s, y) &= p_1 s \left[ -p_1 p_2 \frac{\cosh p_2 y}{\sinh p_2} + \frac{(s^2 + p_2^2) \cosh p_1 y}{2 \sinh p_1} \right], \\
 U_y(s, y) &= ip_1^2 \left[ s^2 \frac{\sinh p_2 y}{\sinh p_2} - \frac{(s^2 + p_2^2) \sinh p_1 y}{2 \sinh p_1} \right],
 \end{aligned} \quad (4.37)$$

и считается, что при  $\text{Im } \Omega_j = 0$ :

$$p_j = p_j(s) = \sqrt{s^2 - \Omega_j^2}, \quad |s| > \Omega_j,$$

$$p_j = p_j(s) = -i\sqrt{\Omega_j^2 - s^2}, \quad |s| < \Omega_j.$$

Кроме того, последовательности

$$q_j = q_{j,k} = p_j(\alpha_k), \quad \alpha_k = \pi k, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots,$$

а  $A_0$ ,  $Y_k$  и  $X(s)$  – неизвестные постоянные и функция, определенная при вещественных  $s$ .

Далее, для простоты изложения, ограничимся диапазоном частот, для которого величины

$$q_{j,k}^2 > 0, \quad \text{при } \text{Im } \Omega_j = 0.$$

Из выражений (4.36), (4.37) и (4.24) следует выполнение граничных условий для касательных напряжений

$$\tau_{xy}(x, \pm 1) = 0, \quad x > 0, \quad \tau_{xy}(0, y) = 0, \quad |y| < 1.$$

Выполнение оставшихся двух граничных условий для напряжений из (4.35) приводит, аналогично рассмотренным [91, § 7.2], к системе линейных интеграл-алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} X(s)\Delta(s) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k(s) + A_0 \frac{2i\Omega_0^2\Omega_1}{s^2 - \Omega_1^2} = 0, \quad s \in \mathbb{R}, \\ -A_0\Omega_2^2 - \frac{\Omega_0^2\Omega_2^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s)ds = f_0, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$Y_k R_k - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s) p_1^2(s) b_k(s) ds = f_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

где определитель Рэлея–Лэмба

$$\Delta(s) = s^2 p_1^2 p - 2 \coth p_2 - \frac{(s^2 + p_2^2)^2}{4} p_1 \coth p_1, \quad (4.39)$$

введены обозначения

$$\begin{aligned} a_k(s) &= \frac{2q_1^2}{\alpha_k^2 + p_2^2} - \frac{(\alpha_k^2 + \Omega_0^2)(\alpha_k^2 + q_2^2)}{\alpha_k^2(\alpha_k^2 + p_1^2)}, \\ \Omega_0^2 &= \frac{\Omega_2^2}{2} - \Omega_1^2, \quad R_k = q_2 - \frac{(\alpha_k^2 + q_2^2)}{4\alpha_k^2 q_1}, \\ b_k(s) &= \frac{2s^2 p_2^2}{\alpha_k^2 + p_2^2} - \frac{(s^2 + \Omega_0^2)(s^2 + p_2^2)}{s^2 + q_1^2} \end{aligned} \quad (4.40)$$

и использовано разложение в ряд Фурье

$$f(y) = \frac{f_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k f_k \cos(\alpha_k y).$$

При этом для исходной граничной задачи (4.35) после предельного перехода

$$\operatorname{Im} \Omega_j \rightarrow 0, \quad j = 1, 2,$$

интегралы в системе уравнений (4.38) интерпретируются на основании формул Сохоцкого (см. [49, § 1.4]). Так, в случае отсутствия явления “обратной” волны в слое [11] эта интерпретация с учетом четности функции  $X(s)$  принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} X(s) ds \equiv \\ & \equiv 2 \int_0^{\infty} X(s) ds + 2\pi i \left\{ \sum_{n=1}^N \operatorname{Res}_{s=\lambda_n} X(s) + \operatorname{Res}_{s=i\Omega_1} X(s) \right\}, \\ & \int_{-\infty}^{\infty} X(s) p_1^2(s) b_k(s) ds \equiv \\ & \equiv 2 \int_0^{\infty} X(s) ds + 2\pi i \sum_{n=1}^N (\lambda_n^2 - \Omega_1^2) b_k(\lambda_n) \operatorname{Res}_{s=\lambda} X(s), \end{aligned}$$

где  $\int$  – интеграл в смысле главного значения и  $\lambda_n, n = 1, 2, \dots, N$  – положительные корни определителя  $\Delta(\lambda)$ . При этом важным моментом является то обстоятельство, что согласно первому из уравнений системы уравнений (4.38) можно определить вычеты функции  $X(s)$  через неизвестные коэффициенты  $A_0, Y_k$ :

$$\operatorname{Res}_{s=\lambda_n} X(s) = \frac{1}{\Delta'(\lambda_n)} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\lambda_n) Y_k - A_0 \frac{2i \Omega_0^2 \Omega_1}{\lambda_n^2 - \Omega_1^2} \right],$$

$$\operatorname{Res}_{s=i\Omega_1} X(s) = \frac{i\Omega_0^2 A_0}{\Delta'(\Omega_1)} = \frac{iA_0}{\Omega_0^2}.$$

Таким образом, решение граничной задачи (4.35) с условиями излучения, формулируемыми на основании принципа предельного поглощения, представляется в виде (4.36) с неизвестными  $A_0, Y_k, X(s)$ , удовлетворяющими линейной системе интегроалгебраических уравнений

$$X(s)\Delta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(s) Y_k - A_0 \frac{2i\Omega_0^2 \Omega_1}{s^2 - \Omega_1^2}, \quad s > o, \quad (4.41)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} X(s) ds + \sum_{k=1}^N \frac{i}{\Delta'(\lambda_n)} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\lambda_n) Y_k - A_0 \frac{2i \Omega_0^2 \Omega_1}{\lambda_n^2 - \Omega_1^2} \right] =$$

$$= -\frac{f_n}{\Omega_0^2 \Omega_2^2}, \quad (4.42)$$

$$Y_k R_k - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} p_1^2(s) b_k(s) X(s) ds -$$

$$-i \sum_{n=1}^N (\lambda_n^2 - \Omega_1^2) \frac{b_k(s)}{\Delta'(\lambda_n)} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\lambda_n) Y_m - A_0 \frac{2i \Omega_0^2 \Omega_1}{\lambda_n^2 - \Omega_1^2} \right] =$$

$$= f_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.43)$$

Анализ выражений (4.36) для смещений, в смысле исследования сходимости соответствующих рядов и интегралов Фурье, показывает, что решение системы уравнений (4.41)–(4.43) следует искать в предположениях

$$X(s) = O(s^{-4}), \quad s \rightarrow \infty, \quad Y_k = O(1), \quad k \rightarrow \infty.$$

В этом предположении следует ожидать справедливость следующих предельных соотношений для неизвестных

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Y_k = -\lim_{s \rightarrow \infty} s^4 X(s) = a. \quad (4.44)$$

Отметим, что получить строгое доказательство таких соотношений, как и доказать утверждение об однозначной разрешимости системы (4.41)–(4.43), довольно затруднительно и поэтому решающим здесь является численный эксперимент.

В пользу справедливости соотношений (4.44) имеются следующие аргументы:

- наличие доказательства соотношений типа (4.44) для интегроалгебраических систем уравнений метода суперпозиции, отвечающих различным граничным задачам статической теории упругости (см. § 2.1, § 2.2, § 3.1 и § 4.1);
- непротиворечивость (4.44) системе уравнений (4.41)–(4.43), что проверяется прямой подстановкой соотношений  $X(s) \approx -as^4$ ,  $s \rightarrow \infty$  и  $Y_k \approx a$ ,  $k \rightarrow \infty$  в систему уравнений;
- полученные численные результаты [61] решения граничной задачи (4.35) на основании выражений (4.36), системы уравнений (4.41)–(4.43) и асимптотических соотношений (4.44).

Использование идей и рассмотрений § 3.3 относительно связи между методами суперпозиции и собственных функций показывает (см. подробности в работе [72]), что вектор смещений (4.36) можно представить в виде ряда по

нормальным волнам

$$\vec{u}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{bmatrix} U_x(\lambda_n, y) \\ U_y(\lambda_n, y) \end{bmatrix} \exp(i\lambda_n x), \quad |y| < 1, \quad x > 0, \quad (4.45)$$

где  $\lambda_n$ ,  $n = N + 1, N + 2, \dots$  – корни определителя Рэля–Лэмба  $\Delta(\lambda)$  с положительными мнимыми частями  $\text{Im } \lambda_n > 0$  и коэффициенты разложения  $a_n$  имеют вид

$$a_n = \frac{1}{\Delta'(\lambda_n)} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\lambda_n) Y_k - A_0 \frac{2i\Omega_0^2 \Omega_1}{\lambda_n^2 - \Omega_1^2} \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.46)$$

Отметим два выражения для величины энергии, подводимой за период колебаний к единице ширины слоя при силовой нагрузке (4.35). С одной стороны, это выражение имеет вид

$$\begin{aligned} W &= -G\omega \int_{-1}^1 f(y) \text{Im } u_x(0, y) dy = \\ &= -G\omega \left( f_0 \Omega_1 \text{Re } A_0 - \Omega_2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\alpha_k^2} \text{Im } Y_k \right), \end{aligned} \quad (4.47)$$

где

$$\begin{aligned} u_x(0, y) &= iA_0 \Omega_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} X(s) U_x(s, y) ds - \\ &\quad - \frac{\Omega_2^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha_k^{-2} Y_k \cos(\alpha_k y). \end{aligned}$$

Кроме того, исходя из представления (4.45) и вычисляя энергию, переносимую распространяющимися волнами, получаем выражение

$$W = \sum_{k=1}^N W_n, \quad W_n = G\omega p_1^2(\lambda_n) \Omega_2^2 \Delta'(\lambda_n) |a_n|^2. \quad (4.48)$$

При численных расчетах [61] для усечения системы уравнений (4.41)–(4.43) использовались следующие, в соответствии с асимптотическими соотношениями (4.44), приближенные равенства для сумм и интегралов:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \psi(\alpha_k) Y_k &\approx \sum_{k=1}^K \psi(\alpha_k) Y_k + a \sum_{k=K+1}^{\infty} \psi(\alpha_k), \\ \int_0^{\infty} \Psi(s) X(s) ds &\approx \int_0^T \Psi(s) X(s) ds - a \int_T^{\infty} \Psi(s) s^{-4} ds. \end{aligned} \quad (4.49)$$

При этом величины пределов суммирования и интегрирования  $K$  и  $T$  выбираются с учетом рассматриваемого частотного диапазона и характера приложенной нагрузки на основании численного анализа, причем для значения  $T$  требуется выполнение неравенств  $T > \Omega_1$ ,  $T > \lambda_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

На основании алгоритма (4.41)–(4.43), (4.49) были проведены численные расчеты в случае постоянной нагрузки  $f(y) = f_0/2$ . Рассматривался диапазон частот  $1,0 < \Omega_1 < 2,5$  при значении коэффициента Пуассона  $\nu = 0,3$ . В рассмотренном диапазоне частот существует только одна распространяющаяся волна, переносящая энергию. Для (4.49) было установлено, что  $K = 10$ ,  $T = 150$ , при этом критерием достоверности полученных численных результатов служила точность выполнения граничных условий на торце волновода. Невязка между вычисленными и заданными напряжениями не превышала 0,2% от  $\sigma_x(0, 0)$ .

Согласно выражениям (4.46), после численного решения усеченной системы уравнений (4.41)–(4.43), определялись коэффициенты разложения  $a_n$  для значений  $n = 1, \dots, 9$ . В этом случае для представления решения  $\vec{u}$  в виде (4.45) невязка между вычисленными и заданными напряжениями на торце не превышала 2,0% от  $\sigma_x(0, 0)$ . Погрешность вычисления для энергии, согласно выражениям (4.48), (4.46) и (4.47), соответственно, не превышала 0,01% для всего рассмотренного частотного диапазона.

Анализ численных результатов показал, что вблизи частоты  $\Omega_1 = 2,315$ , в узком частотном диапазоне, наблюдалось резкое увеличение нормированной амплитуды

$$\hat{a}_n = \left| a_n \left[ (1 - \nu) i \lambda_n U_x(\lambda_n, 0) + \nu U'_y(\lambda_n, 0) \right] (1 - 2\nu)^{-1} \right|,$$

соответствующей нераспространяющейся волне. При этом, на частоте  $\Omega_1 = 2,315$  получены соотношения

$$|\hat{a}_2/\hat{a}_1| = 4,18, \quad |\hat{a}_3/\hat{a}_1| = 2,75.$$

Таким образом, вблизи торца волновода определяющими в формировании волнового поля оказались нераспространяющиеся волны, когда частота  $\Omega_1 = 2,315$ . В дальнем поле на этой частоте наблюдается резонанс на распространяющейся волне. Отметим, что частота  $\Omega_1 = 2,315$  совпадает с частотой краевого резонанса при возбуждении торца волновода бегущей из бесконечности волной [434].

#### 4.4 Динамическая задача для четверть-плоскости

**4.4.1** В данном параграфе рассматривается плоская гармоническая задача о возбуждении волнового поля в упругой изотропной однородной четверть-плоскости при действии силовых поверхностных нагрузок. Такая задача яв-



ляется одной из модельных задач в линейной теории упругости, а ее анализ важен как с прикладной, так и с теоретической точек зрения. Несмотря на большое количество работ, посвященных изучению взаимодействия упругих волн в клине, данная проблема не получила еще удовлетворительного решения. Из работ фундаментального характера отметим [31, 105]. Сложность задачи обусловлена совместным наличием четырех факторов: существованием в упругой среде двух типов волн – продольных и поперечных, которые при рассматриваемых граничных условиях не разделяются; бесконечностью области рассмотрения упругого поля; наличием угловой точки в клине; существованием поверхностных гармонических волн Рэлея, распространяющихся вдоль граней клина.

В работах [351, 352] изучался, в том числе численно, процесс отражения падающих из бесконечности упругих волн от свободных от напряжений граней клина. Полученные в этих работах функциональные уравнения являются довольно сложными и с теоретической точки зрения не исследовались. Не изучался также вопрос о взаимодействии отраженных волн в окрестности угловой точки клина.

В данном параграфе на начальном этапе используется метод суперпозиции: четверть-плоскость представляется в виде пересечения двух полуплоскостей, в каждой из которых записывается общее решение уравнений движения Ламе в форме интегралов Фурье по одной из переменных и с неизвестными плотностями в них. Аналогичный подход в задаче об упругом клине был ранее использован в работах [326, 439], где соответствующая граничная задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений на оси с двум сдвигами, не являющимися сдвигами Карлемана [49, 157], и связанными с наличием двух скоростей распространения упругих волн. Как отмечалось в [439], эта система уравнений является сложной с точки зрения использования общих результатов теории сингулярных интегральных уравнений [49, 157]. Как показано в настоящем параграфе, дальнейшее продвижение в изучении задачи об упругом клине на основании метода суперпозиции может быть связано с использованием интегрального преобразования Меллина. На этом пути удастся, во-первых, свести исходную граничную задачу теории упругости к полному сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши на оси с нулевым индексом [49], и, во-вторых, изучить асимптотику на бесконечности неизвестных плотностей в интегралах Фурье в исходном представлении волнового поля по методу суперпозиции, что в свою очередь дает возможность полностью решить вопрос об описании волнового поля в окрестности угловой точки клина. Отметим, что сингулярные интегральные уравнения в другом виде в задаче об упругом клине были ранее получены в работе [350] (на основании использования интегрального преобразования Канторовича-Лебедева) и [31] (на основании использования интегралов Зоммерфельда).

Проведенные далее рассмотрения для четверть-плоскости могут быть перенесены на общий случай клина с произвольным углом раствора. Аналогично

рассматривается и задача дифракции упругих волн от свободных от напряжений гранях клина, в которой усложнение связано лишь с анализом правых частей в получаемых интегральных уравнениях. Отметим, что для упрощения выкладок изучается случай антисимметричного относительно биссектрисы угла напряженного состояния четверть-плоскости.

**4.4.2** Рассматривается задача о возбуждении гармонического по времени волнового поля в упругой изотропной и однородной четверть-плоскости  $x > 0$ ,  $y > 0$  при действии нагрузок на гранях  $x > 0$ ,  $y = 0$  и  $x = 0$ ,  $y > 0$ . Для вектора смещений частиц упругой среды  $\vec{u}(x, y) = \{u_x, u_y\}$  (временной множитель  $\exp(-i\omega t)$  далее опускаем) имеем уравнения движения Ламе

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \rho \omega^2 \vec{u} = 0 \quad (4.50)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, 0) &= 2Gf(x), \quad \tau_{yx}(x, 0) = 2Gg(x), \quad x > 0, \\ \sigma_x(0, y) &= -2Gf(y), \quad \tau_{xy}(0, y) = -2Gg(y), \quad y > 0, \end{aligned} \quad (4.51)$$

где  $\lambda > 0$ ,  $\mu > 0$  – упругие постоянные Ламе,  $\rho > 0$  – плотность материала,  $G$  – модуль сдвига, а поле напряжений, согласно закону Гука, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_x &= \frac{1}{2\mu} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} \right], \\ \frac{1}{2G} \sigma_y &= \frac{1}{2\mu} \left[ \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} \right], \\ \frac{1}{2G} \tau_{xy} &= \frac{1}{2G} \tau_{yx} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Дополнительно к граничным условиям (4.51) требуется выполнение еще двух условий, а именно, накладывается условие конечности упругой энергии в окрестности вершины четверть-плоскости [41, 105]:

$$\int_0^{r_0} \int_0^{\pi/2} W r d\phi dr < \infty \quad (0 < r_0 < \infty), \quad (4.53)$$

где  $r$ ,  $\phi$  – полярные координаты, так что  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ , и условия излучения Зоммерфельда на бесконечности

$$\begin{aligned} \vec{u} &= r^{-1/2} \vec{v}_1(\phi) \exp(ik_1 r) + r^{-1/2} \vec{v}_2(\phi) \exp(ik_2 r) + O(r^{-1}), \\ r &\rightarrow \infty, \quad \phi \in (0, \pi/2), \end{aligned} \quad (4.54)$$

с волновыми числами

$$k_j = \omega/c_j, \quad j = 1, 2, \quad c_1 = [(\lambda + 2\mu)/\rho]^{1/2}, \quad c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}.$$

Для простоты изложения функции  $f(x)$ ,  $g(x)$  считаем бесконечно дифференцируемыми и финитными с носителем на  $(0, \infty)$ . Для дальнейшего понадобятся преобразования Фурье этих функций

$$f_s(\xi) = \int_0^\infty f(x) \sin(\xi x) dx, \quad g_c(\xi) = \int_0^\infty g(x) \cos(\xi x) dx.$$

**4.4.3** Решение исходной граничной задачи (4.50), (4.51), как и в предыдущем параграфе, строится исходя из принципа предельного поглощения, а именно, вначале рассматривается среда с поглощением [43], так что  $\text{Im } k_j = \epsilon_j > 0$ , после чего решение для идеально упругой среды получается в результате предельного перехода  $\epsilon_j \rightarrow 0$ ,  $j = 1, 2$ . Переход к модели среды с поглощением, с одной стороны, делает законными все последующие преобразования и, с другой стороны, позволяет выполнить условия излучения (4.54). Следует однако отметить, что корректность предельного перехода при  $\epsilon_j \rightarrow 0$  требует, вообще говоря, отдельного обоснования.

Опуская промежуточные выкладки, представим при  $\epsilon_j > 0$  компоненты вектора смещений  $\vec{u}$  в виде суммы интегралов Фурье

$$\begin{aligned} u_x = & \frac{2}{\pi k_1^2} \int_0^\infty \frac{X(\xi)\xi}{\Delta(\xi)} [-2\alpha_1\alpha_2 \exp(-\alpha_1 x) + (2\xi^2 - k_2^2) \exp(-\alpha_2 x)] \times \\ & \times \sin(\xi y) d\xi - \\ & - \frac{2}{\pi k_1^2} \int_0^\infty \frac{X(\xi)\alpha_2}{\Delta(\xi)} [2\xi^2 \exp(-\alpha_1 y) - (2\xi^2 - k_2^2) \exp(-\alpha_2 y)] \cos(\xi x) d\xi + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_s(\xi) \alpha_2^{-1} \exp(-\alpha_2 x) \sin(\xi y) d\xi - \\ & - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty g_c(\xi) \xi^{-1} \exp(-\alpha_2 y) \cos(\xi x) d\xi, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} u_y = & \frac{2}{\pi k_1^2} \int_0^\infty \frac{X(\xi)\alpha_2}{\Delta(\xi)} [-2\xi^2 \exp(-\alpha_1 x) - (2\xi^2 - k_2^2) \exp(-\alpha_2 x)] \times \\ & \times \cos(\xi y) d\xi + \\ & + \frac{2}{\pi k_1^2} \int_0^\infty \frac{X(\xi)\xi}{\Delta(\xi)} [2\alpha_1\alpha_2 \exp(-\alpha_1 y) - (2\xi^2 - k_2^2) \exp(-\alpha_2 y)] \sin(\xi x) d\xi - \\ & - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_s(\xi) \xi^{-1} \exp(-\alpha_2 x) \cos(\xi y) d\xi - \\ & - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty g_c(\xi) \alpha_2^{-1} \exp(-\alpha_2 y) \sin(\xi x) d\xi \end{aligned} \quad (4.56)$$

с неизвестной функцией  $X(\xi)$ . Здесь функция  $\alpha_j(\xi) = (\xi^2 - k_j^2)^{1/2}$ ,  $j = 1, 2$ , является, по определению, однозначной аналитической функцией в комплексной плоскости с разрезами вдоль лучей  $(-k_j, -k_j - i\infty)$  и  $(k_j, k_j + i\infty)$ , причем  $\alpha_j(0) = -ik_j$ . При этом определитель Рэлея

$$\Delta(\xi) = 4\xi^2\alpha_1(\xi)\alpha_2(\xi) - (2\xi^2 - k_2^2)^2.$$

Соответствующее (4.56) поле напряжений согласно (4.52) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2G} \sigma_x = \\ & = \frac{2}{\pi k_1^2} \int_0^\infty \frac{X(\xi)\xi}{\Delta(\xi)} \xi \alpha_2 (2\xi^2 - k_2^2) (\exp(-\alpha_1 x) - \exp(-\alpha_2 x)) \sin(\xi y) d\xi + \\ & \quad + \frac{2}{\pi k_1^2} \int_0^\infty \frac{X(\xi)\alpha_2}{\Delta(\xi)} \xi \alpha_2 [2\xi^2 - 2k_1^2 + k_2^2] \exp(-\alpha_1 y) - \\ & \quad - (2\xi^2 - k_2^2) \exp(-\alpha_2 y) \sin(\xi x) d\xi - \\ & - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_s(\xi) \exp(-\alpha_2 x) \sin(\xi y) d\xi - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_s(\xi) \exp(-\alpha_2 y) \sin(\xi x) d\xi, \\ & \frac{1}{2G} \sigma_y = \\ & = -\frac{2}{\pi k_1^2} \int_0^\infty \frac{X(\xi)\xi}{\Delta(\xi)} \xi \alpha_2 [(2\xi^2 - 2k_1^2 + k_2^2) \exp(-\alpha_1 x) - \\ & \quad - (2\xi^2 - k_2^2) \exp(-\alpha_2 x)] \sin(\xi y) d\xi - \\ & - \frac{2}{\pi k_1^2} \int_0^\infty \frac{X(\xi)\alpha_2}{\Delta(\xi)} \xi \alpha_2 (2\xi^2 - k_2^2) (\exp(-\alpha_1 y) - \\ & \quad - \exp(-\alpha_2 y)) \sin(\xi x) d\xi + \\ & \quad + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_s(\xi) \exp(-\alpha_2 x) \sin(\xi y) d\xi + \\ & \quad + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_s(\xi) \exp(-\alpha_2 y) \sin(\xi x) d\xi, \quad (4.57) \\ & \frac{1}{2G} \tau_{xy} = -\frac{1}{\pi k_1^2} \times \\ & \times \int_0^\infty \frac{X(\xi)}{\Delta(\xi)} [4\xi^2 \alpha_1 \alpha_2 \exp(-\alpha_1 x) - (2\xi^2 - k_2^2) \exp(-\alpha_2 x)] \cos(\xi y) d\xi + \\ & \quad + \frac{1}{\pi k_1^2} \int_0^\infty \frac{X(\xi)}{\Delta(\xi)} [4\xi^2 \alpha_1 \alpha_2 \exp(-\alpha_1 y) - \\ & \quad - (2\xi^2 - k_2^2) \exp(-\alpha_2 y)] \cos(\xi x) d\xi + \\ & \quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f_s(\xi) \frac{(2\xi^2 - k_2^2)}{\xi \alpha_2} \exp(-\alpha_2 x) \cos(\xi y) d\xi - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_s(\xi) \frac{(2\xi^2 - k_2^2)}{\xi\alpha_2} \exp(-\alpha_2 x) \cos(\xi x) d\xi.$$

Представление (4.56) выбрано таким образом, что вектор  $\vec{u}$  удовлетворяет уравнениям (4.50) и граничным условиям для нормальных напряжений из (4.51). Кроме того, справедливо соотношение  $\tau_{xy}(0, y) = -\tau_{xy}(x, 0)$  при  $x = y$ . Таким образом, для определения неизвестной функции  $X(\xi)$  остается выполнить одно граничное условие  $\tau_{xy}(0, y) = -2Gg(y)$ ,  $y > 0$ . Выполнение этого граничного условия согласно (4.57) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi k_1^2} \int_0^{\infty} X(\xi) \cos(\xi y) d\xi - \\ & - \frac{1}{\pi k_1^2} \int_0^{\infty} \frac{X(\xi)\alpha_2}{\Delta(\xi)} [4\xi^2 \alpha_1 \alpha_2 \exp(-\alpha_1 y) - (2\xi^2 - k_2^2) \exp(-\alpha_2 y)] d\xi - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_s(\xi) \frac{(2\xi^2 - k_2^2)}{\xi\alpha_2} \cos(\xi y) d\xi + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_s(\xi) \frac{(2\xi^2 - k_2^2)}{\xi\alpha_2} \exp(-\alpha_2 x) d\xi = g(y), \quad y > 0. \end{aligned}$$

Применяя здесь косинус-преобразование Фурье и учитывая равенство

$$\int_0^{\infty} \exp(-\alpha y) \cos(sy) dy = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad s > 0,$$

получаем для нахождения  $X(\xi)$  интегральное уравнение

$$X(s) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} X(\xi) K(\xi, s) d\xi = H(s), \quad s > 0, \quad (4.58)$$

где ядро и правая часть имеют вид

$$\begin{aligned} K(\xi, s) &= \frac{\alpha_2(\xi)}{\Delta(\xi)} \left[ \frac{4\xi^2 \alpha_1^2(\xi)}{s^2 + \alpha_1^2(\xi)} - \frac{(2\xi^2 - k_2^2)}{s^2 + \alpha_2^2(\xi)} \right], \\ H(s) &= 2k_1^2 \left[ g_c(s) + \frac{(2s^2 - k_2^2)}{2s\alpha_2(s)} f_s(s) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f_s(\xi) \frac{(2\xi^2 - k_2^2)}{\xi(s^2 + \alpha_2^2(\xi))} d\xi \right]. \end{aligned}$$

Для достаточно малых значений  $\epsilon_j > 0$  ядро  $K(\xi, s)$  является регулярным в следующем смысле: оно не имеет особенностей при  $\xi > 0$ ,  $s > 0$  и  $K(\xi, s) \in L_p(\mathbb{R}_+^2)$  при любом  $p > 1$ . В предельном случае  $\epsilon_j = 0$  уравнение (4.58) на основании формул Сохоцкого переходит в сингулярное уравнение со сдвигами, аналогичное полученным в работах [326, 439]. Дальнейшее преобразование уравнения (4.58) связано с использованием интегрального преобразования Меллина, аналогично тому, как это сделано в §4.1 при рассмотрении бигармонической задачи для полуполосы.

4.4.4 Пусть  $X(\xi)$  – ограниченное решение уравнения (4.58), которое допускает оценку  $X(\xi) = O(\xi^{-\beta})$ ,  $\xi \rightarrow \infty$  при некотором  $\beta \in (0, 1)$  (такая оценка обеспечивает сходимость интегралов в (4.56) вплоть до границы четверть-плоскости). Тогда существует преобразование Меллина

$$M(\gamma) = \int_0^{\infty} X(s) s^{\gamma-1} ds, \quad 0 < \operatorname{Re} \gamma < 1, \quad (4.59)$$

с формулой обращения

$$X(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M(\eta) \xi^{-\eta} d\eta, \quad \sigma \in (0, \beta), \quad \xi > 0. \quad (4.60)$$

Применяя преобразование Меллина к уравнению (4.58) и учитывая равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{s^{\gamma-1}}{s^2 + \alpha^2} ds = \frac{\pi \alpha^{\gamma-2}}{2 \sin(\pi\gamma/2)}, \quad 0 < \operatorname{Re} \gamma < 2, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0,$$

получаем следующее соотношение

$$M(\gamma) - \int_0^{\infty} X(\xi) \frac{\alpha_2(\xi)[4\xi^2 \alpha_1^{\gamma}(\xi) - (2\xi^2 - k_2^2) \alpha_2^{\gamma-2}(\xi)]}{\Delta(\xi) \sin(\pi\gamma/2)} d\xi = L(\gamma), \quad (4.61)$$

где  $L(\gamma)$  – преобразование Меллина функции  $H(s)$ . Подставляя выражение (4.60) в (4.61) и изменяя порядки интегрирования, что возможно при  $0 < \operatorname{Re} \gamma < \sigma < \beta$ , получаем

$$M(\gamma) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M(\eta) \frac{R(\eta, \xi)}{\sin(\pi\gamma/2)} d\eta = L(\gamma), \quad (4.62)$$

где

$$R(\eta, \gamma) = \int_0^{\infty} S(\xi, \gamma) \xi^{-\eta} d\xi,$$

$$S(\xi, \gamma) = \frac{\alpha_2(\xi)[4\xi^2 \alpha_1^{\gamma}(\xi) - (2\xi^2 - k_2^2) \alpha_2^{\gamma-2}(\xi)]}{\Delta(\xi)}.$$

При этом справедливо асимптотическое представление

$$S(\xi, \gamma) = \xi^{\gamma-1} \left[ \gamma + \sum_{k=1}^n b_k(\gamma) \xi^{-2k} + O(\xi^{-2n-2}) \right], \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (4.63)$$

где  $b_k(\xi)$  – полиномы от  $\gamma$ , которые можно выписать в явном виде. Из (4.63), в частности, получаем следующее представление для ядра:

$$R(\eta, \gamma) = \frac{\gamma d^{\gamma-\eta}}{\eta - \gamma} + \sum_{k=1}^n \frac{b_k(\gamma) d^{\gamma-\eta-2k}}{\eta - \gamma + 2k} +$$

$$+ \int_0^d S(\xi, \gamma) \xi^{-\eta} d\xi + \int_d^\infty Q_n(\xi, \gamma) \xi^{\gamma-\eta-1} d\xi, \quad (4.64)$$

где  $d > 0$  и целое число  $n > 0$ , а функция  $Q_n(\xi, \gamma) = O(\xi^{-2n-2})$ ,  $\xi \rightarrow \infty$  и  $Q_n(\xi, \gamma)$  аналитична по  $\gamma$  при  $\operatorname{Re} \gamma > 0$ . Из представления (4.64) получаем, что ядро  $R(\eta, \gamma)$  при фиксированном  $\eta \in (\operatorname{Re} \eta \in (0, \beta))$  продолжается мероморфным образом в полуплоскость  $\operatorname{Re} \gamma > 0$  с простыми полюсами в точках  $\eta + 2k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . В частности, сдвигая в (4.62) значение  $\operatorname{Re} \gamma$  к  $\operatorname{Re} \eta = \sigma$ , получаем на основании (4.64) и формулы Сохоцкого следующее уравнение относительно функции  $M(\gamma)$ :

$$\left[ 1 - \frac{\gamma}{2 \sin(\pi\gamma/2)} \right] M(\gamma) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M(\eta) \frac{R(\eta, \gamma)}{\sin(\pi\gamma/2)} d\eta = L(\gamma). \quad (4.65)$$

Уравнение (4.65) представляет собой полное особое интегральное уравнение на прямой  $\operatorname{Re} \gamma = \sigma$  с ядром типа Коши.

Выясним вопрос о величине индекса  $\kappa$  сингулярного интегрального уравнения (4.65). Согласно [49] индекс  $\kappa$  равен индексу функции

$$T(\gamma) = 1 - \gamma / \sin(\pi\gamma/2), \quad \operatorname{Re} \gamma = \sigma.$$

При этом, так как функция  $T(\gamma)$  не имеет нулей в полосе  $|\operatorname{Re} \gamma| < 1$ , а  $T(is)$  принимает вещественные значения то, используя теорему Коши, получаем

$$\kappa = - \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{T'(\gamma)}{T(\gamma)} d\gamma = - \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{T'(\gamma)}{T(\gamma)} d\gamma = 0.$$

Таким образом, индекс сингулярного интегрального уравнения (4.65) равен нулю. Этот факт открывает принципиальную возможность использования теории Фредгольма при исследовании уравнения (4.65) в том или ином функциональном классе, состоящем из убывающих на бесконечности функций. Выбор приемлемого пространства связан с анализом поведения ядра  $R(\eta, \gamma)$  при  $|\operatorname{Im} \eta| \rightarrow \infty$ ,  $|\operatorname{Im} \gamma| \rightarrow \infty$ . В предельном случае  $\operatorname{Im} k_j = 0$  уравнение (4.65) сохраняет свой вид с тем лишь изменением, что теперь

$$R(\eta, \gamma) = \int_0^\infty S(\xi, \gamma) \xi^{-\eta} d\xi + \pi \operatorname{Res}_{\xi=k_0} \{S(\xi, \gamma) \xi^{-\eta}\},$$

где  $S(\xi, \gamma)$  определяется (4.62), а  $k_0$  – единственный положительный корень определителя Рэлея  $\Delta(\xi)$ .

**4.4.5** В рассматриваемой задаче существенную роль играют волновые явления, происходящие в окрестности угловой точки четверть-плоскости. Структура формул (4.56), (4.57) показывает, что ближнее волновое поле в этой окрестности определяется асимптотикой функции  $X(\xi)$  при  $\xi \rightarrow \infty$ . Кроме

того, априорное знание асимптотики неизвестной функции является важным моментом при численном анализе. Согласно формуле обращения (4.60) асимптотика  $X(\xi)$  при  $\xi \rightarrow \infty$  определяется аналитическими свойствами функции  $M(\gamma)$  в полуплоскости  $\text{Re } \gamma > 0$ . Из (4.62) и (4.64) вытекает (после сдвига контура интегрирования  $\text{Re } \eta = \sigma$  к контуру  $\text{Re } \eta = \sigma_1$  с  $\sigma_1 < \text{Re } \gamma$ ), что справедливо следующее соотношение:

$$\left[ 1 - \frac{\gamma}{\sin(\pi\gamma/2)} \right] M(\gamma) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} M(\eta) \frac{R(\eta, \gamma)}{\sin(\pi\gamma/2)} d\eta = L(\gamma).$$

Отсюда получаем при  $0 < \sigma_1 < \text{Re } \gamma < \beta$  равенство

$$M(\gamma) = \frac{1}{D(\gamma)} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} M(\eta) R(\eta, \gamma) d\eta + \sin(\pi\gamma/2) L(\gamma) \right], \quad (4.66)$$

где функция  $D(\gamma) = \sin(\pi\gamma/2) - \gamma$ .

Представление (4.66) вместе с (4.64) позволяет осуществить мероморфное продолжение функции  $M(\gamma)$ , являющейся аналитической в полосе  $0 < \text{Re } \gamma < \beta$ , в полуплоскость  $\text{Re } \gamma > 0$  и определить ее полюса. А именно, используя (4.64) в (4.66) при движении  $\text{Re } \gamma$  вправо, получаем (в предположении аналитичности функции  $L(\gamma)$ ) для любых  $\sigma_1 \in (0, \beta)$  и целого  $n > 0$ :

$$M(\gamma) = \frac{1}{D(\gamma)} \left[ \sum_{k=1}^n b_k(\gamma) M(\gamma - 2k) + \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} M(\eta) R(\eta, \gamma) d\eta + \sin(\pi\gamma/2) L(\gamma) \right], \quad 0 < \text{Re } \gamma - 2n - \sigma_1 < 2. \quad (4.67)$$

Отметим, что функция  $D(\gamma)$ , корни которой, как видно из (4.67), определяют полюсы  $M(\gamma)$ , возникает также при исследовании статической задачи теории упругости для четверть-плоскости [275]. Пусть  $\gamma_0, \gamma_1, \dots$  – корни  $D(\gamma)$  с  $\text{Re } \gamma_k > 0$ , занумерованные в порядке возрастания их реальных частей. Тогда, в частности [25], имеем  $\gamma_0 = 1$ ,  $\text{Re } \gamma_1 = \text{Re } \gamma_2 \approx 15,1/\pi$  и все эти корни являются простыми. Тогда из (4.66), (4.67) заключаем, что в полосе  $0 < \text{Re } \gamma < \nu$  для  $M(\gamma)$  справедливо представление

$$M(\gamma) = M_\nu(\gamma) + \sum_{k=0}^{n_\nu} a_k \left[ \frac{1}{\gamma - \gamma_k} + \sum_{l=1}^{l_{k,\nu}} \frac{b_l(\gamma_k + 2l)}{(\gamma - \gamma_k - 2l)D(\gamma_k + 2l)} \right], \quad (4.68)$$

где  $M_\nu(\gamma)$  – аналитическая в этой полосе функция, а  $a_k$  – некоторые постоянные, линейным образом зависящие от заданной пары нагрузок  $f(x), g(x)$ .



При этом индексы  $n_\nu$  и  $l_{k,\nu}$  определяются из неравенств

$$\operatorname{Re} \gamma_{n_\nu} < \nu, \quad \operatorname{Re} \gamma_{n_\nu+1} > \nu, \quad \nu - 2 \leq \operatorname{Re} \gamma_k + 2l_{k,\nu} < \nu.$$

Кроме того,  $D(\gamma_k + 2l) = -2l$  при четном  $l$  и  $D(\gamma_k + 2l) = -2\gamma_k - 2l$  при нечетном  $l$ . Таким образом, согласно (4.68) и (4.60) асимптотика функции  $X(\xi)$  имеет вид

$$X(\xi) = - \sum_{k=0}^{n_\nu} a_k \xi^{-\gamma_k} \left[ 1 + \sum_{l=1}^{l_{k,\nu}} \frac{b_l(\gamma_k + 2l)}{D(\gamma_k + 2l)} \xi^{-2l} \right] + \\ + O(\xi^{-\nu_1}), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad \nu_1 < \nu. \quad (4.69)$$

Как уже отмечалось, асимптотическая формула (4.69) дает возможность на основании формул (4.56), (4.57) полностью исследовать напряженно-деформированное состояние четверть-плоскости в окрестности ее вершины. Отметим, что в случае статической задачи асимптотика  $X(\xi)$  также имеет вид (4.69), но с  $b_k(\gamma) \equiv 0$  для всех  $k$ . В общем случае  $\operatorname{Im} k_j > 0$ ,  $j = 1, 2$  функции  $b_k(\gamma)$  зависят от  $k_j$ .

#### 4.5 Принцип отражения в плоских задачах акустики

**4.5.1** Анализ многих акустических ситуаций можно осуществить в рамках модели, приводящей к решению граничных задач для уравнения Гельмгольца. При этом, при изучении различных проблем, связанных с излучением и дифракцией акустических волн, широкое и эффективное применение находит метод частичных областей. Основные результаты, достигнутые на основании этого метода, относятся к случаям, когда в каждой из частичных областей удается построить общее, в определенном смысле, решение уравнения Гельмгольца. Таким образом, именно в рамках метода частичных областей наиболее последовательно, по сравнению с другими методами (метод конечных элементов, метод граничных интегральных уравнений и др.), проводится использование семейств частных решений волновых уравнений в канонических координатных системах для построения аналитических решений в неканонических областях.

Несмотря на богатую историю развития метода частичных областей, в последнее время открываются все новые возможности по расширению его области применимости, связанные с усложнением рассматриваемой геометрии. В данном параграфе излагается новый подход, позволяющий эффективно использовать общие идеи метода частичных областей в комбинации с принципом отражения для решений уравнения Гельмгольца.

Следует отметить, что вопросы продолжения решений эллиптических уравнений и, в частности, волновых полей находят широкое применение при исследовании различных задач математической физики. Отметим классические

результаты Г. Шварца, А. Пуанкаре, Ф. Клейна, относящиеся к исследованиям разложений функции Грина граничной задачи по фундаментальным решениям соответствующего уравнения. Метод разветвленных решений А. Зоммерфельда нашел применение при решении принципиальной для теории дифракции задачи о рассеянии звука на клине (см. [277, гл. 20], [281, гл. 4, § 1]). Хорошо известно использование принципа отражения в задачах электростатики, в частности, в задаче об электростатическом равновесии на двух заряженных сферах (см. [277, гл. 15]). Обобщению и развитию классических результатов метода отражения и исследованию соответствующих альтернирующих процессов посвящена монография [291]. Метод отражения находит свое применение также и при исследовании обратных задач теории рассеяния акустических полей [340].

Обзор современного состояния задач продолжения волновых полей, включая их прикладные аспекты, относящиеся к внешним задачам дифракции, приведен в [153] (см. также [220]).

В данном параграфе приводятся некоторые примеры возможного использования принципа отражения для решений уравнения Гельмгольца при построении решений граничных задач акустики, вплоть до учета локальных особенностей волновых полей. А именно, рассмотрены области, границы которых содержат прямолинейный отрезок – в этом случае принцип отражения формулируется достаточно просто. При этом речь идет о формировании эффективного алгоритма для решения таких граничных задач, численное решение которых не удастся получить исходя из непосредственного использования метода частных областей, несмотря на то, что граница области состоит из объединения канонических координатных линий.

Использование принципа отражения в рассматриваемой далее ситуации прямолинейно-круговой луночки приводит к тому, что исходная граничная задача сводится к исследованию граничной задачи для уравнения Гельмгольца в круге. Возникает вопрос о граничных условиях на части окружности, не являющейся физической границей исходной области. В идейном плане основным моментом предлагаемого подхода является формулировка недостающих граничных условий, исходя из способа отражения исходного решения, т. е. граничные условия формулируются в терминах значений неизвестной функции на дуге, лежащей внутри исходной области. Вместе с представлением искомого решения в виде ряда по частным решениям уравнения Гельмгольца в круге это позволяет получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов ряда. При этом можно рассматривать как внутреннюю, так и внешнюю граничные задачи. Показано, каким образом возможно учесть локальные особенности волнового поля, связанные с наличием угловых точек рассматриваемой области и смешанным характером граничных условий.

В статье [63] на примере конкретной внутренней граничной задачи для прямолинейно-круговой луночки проведены численные расчеты по схеме предложенного алгоритма и проиллюстрирована его эффективность.

**4.5.2 Внутренняя граничная задача.** Пусть  $x, y$  – декартовы, а  $r, \theta$  – полярные координаты на плоскости:  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ .

При этом далее для удобства в различных ситуациях будем считать, что угол  $\theta$  либо в пределах  $[0, 2\pi]$ , либо  $\theta \in [-\pi, \pi]$ . Для заданных значений  $a > 0$  и  $b \in (0, a)$  определим область  $\Omega_1$ , которая является пересечением круга  $r < a$  и полуплоскости  $x > b$ , и область  $\Omega_2$ , являющуюся пересечением того же круга  $r < a$  с полуплоскостью  $x < b$  (рис. 4.1). Обозначим через  $\gamma_0$  отрезок  $x = b$ ,  $|y| < d = \sqrt{a^2 - b^2}$  и часть дуги окружности

$$\gamma_1: r = a, |\theta| < \theta_0,$$

$$\gamma_2: r = a, \theta \in (\theta_0, 2\pi - \theta_0) \quad \cos \theta_0 = b/a, \quad \theta_0 \in (0, \pi/2).$$

Рассмотрим в области  $\Omega_j$  (при фиксированном  $j = 1$  или  $j = 2$ ) симметричную относительно переменной  $y$  граничную задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u(x, y) + k^2 u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_j \quad (4.70)$$

$$u(b, y) = 0, \quad |y| < \sqrt{a^2 - b^2}, \quad (4.71)$$

$$(u_{\gamma_j})(\theta) = f(\theta). \quad (4.72)$$

Здесь в случае области  $\Omega_1$  функция  $f(\theta)$  задана на интервале  $|\theta| < \theta_0$ ,  $f(-\theta) = f(\theta)$ , а при рассмотрении задачи для  $\Omega_2$  считается, что  $f(\theta)$  определена при  $\theta \in (\theta_0, 2\pi - \theta_0)$ , причем выполняется условие  $f(\pi - \theta) = f(\pi + \theta)$ ,  $\theta \in (0, \pi - \theta_0)$ .

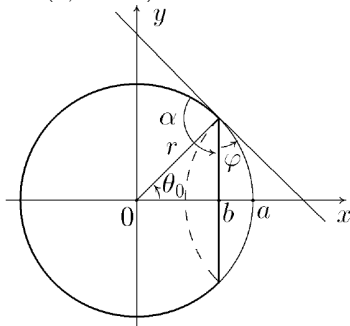


Рис. 4.1. Схема прямолинейно-круговой луночки

Покажем, что способы построения решения задачи (4.70)–(4.72) для областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  различаются принципиальным образом. Это связано с тем, что область  $\Omega_1$  целиком расположена в полукруге  $r < a$ ,  $|\theta| < \pi/2$ , а  $\Omega_2$  выходит за рамки соответствующего полукруга.

Рассмотрим случай области  $\Omega_1$ . Здесь процедура построения решения граничной задачи (4.70)–(4.72) хорошо известна. А именно, используем то, что в полярных координатах уравнение Гельмгольца допускает частные решения вида

$$U(r, \theta) = A J_\alpha(kr) \cos(\alpha\theta) \quad (4.73)$$

при произвольном значении параметра  $\alpha \geq 0$  и произвольных значениях постоянной  $A$ . Напомним, что здесь  $J_\alpha(\cdot)$  – цилиндрическая функция Бесселя первого рода. Таким образом, определяя надлежащим образом значение параметра  $\alpha$ , можно приспособить частные решения (4.73) к построению решения граничной задачи для сектора  $S_0 : 0 < r < a, |\theta| < \theta_0$ . Далее, представим область  $\Omega_1$  как пересечение сектора  $S_0$  и полуполосы  $P : x > b, |y| < d$  (это можно сделать в силу того, что  $\Omega_1$  находится внутри полукруга). При построении решения граничной задачи для уравнения Гельмгольца в полуполосе  $P$  подходящие частные решения имеют вид

$$U(x, y) = B \exp(-\sqrt{\beta^2 - k^2}x) \cos(\beta y) \quad (4.74)$$

с параметром  $\beta > 0$  и произвольной постоянной  $B$ .

Таким образом, решение граничной задачи (4.70)–(4.72) в случае области  $\Omega_1$  ищем в виде

$$u = u_1 + u_2, \quad (4.75)$$

где функции

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_{\alpha_n}(kr) \cos(\alpha_n \theta),$$

$$u_2 = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \exp(-\sqrt{\beta_m^2 - k^2}x) \cos(\beta_m y).$$

При этом можно взять последовательности

$$\alpha_n = \frac{\pi}{\theta_0}(n - 1/2), \quad \beta_n = \frac{\pi}{d}(n - 1/2), \quad n = 1, 2, \dots,$$

так что система функций  $\{\cos(\alpha_n \theta)\}_{n=1}^{\infty}$  образует ортогональный базис в пространстве  $L_2[0, \theta_0]$ , а система  $\{\cos(\beta_m y)\}_{m=1}^{\infty}$  является ортогональным базисом в  $L_2[0, d]$ .

Тогда выполнение граничных условий (4.71), (4.72) приводит к функциональным соотношениям

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_{\alpha_n}(ka) \cos(\alpha_n \theta) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} B_m \exp(-\sqrt{\beta_m^2 - k^2}a \cos \theta) \cos(\beta_m a \sin \theta) = f(\theta), \quad \theta \in (0, \theta_0), \quad (4.76)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_{\alpha_n}(k\sqrt{a^2 + y^2}) \cos[\alpha_n \arctg(y/b)] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} B_m \exp(-\sqrt{\beta_m^2 - k^2}b) \cos(\beta_m y) = 0, \quad y \in (0, d). \quad (4.77)$$

Используя в уравнениях (4.76), (4.77) ортогональность систем тригонометрических функций нетрудно получить следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & A_n J_{\alpha_n}(ka) + \\ & + 2 \sum_{m=1}^{\infty} B_m \int_0^{\theta_0} \exp(-\sqrt{\beta_m^2 - k^2} a \cos \theta) \cos(\beta_m a \sin \theta) \cos(\alpha_n \theta) d\theta = \\ & = 2 \int_0^{\theta_0} f(\theta) \cos(\alpha_n \theta) d\theta, \quad n = 1, 2, \dots, \\ & B_m \exp(-\sqrt{\beta_m^2 - k^2}b) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^d J_{\alpha_n}(k\sqrt{a^2 + y^2}) \times \\ & \times \cos[\alpha_n \arctg(y/b)] \cos(\beta_m y) dy = 0, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

При численном решении полученной бесконечной системы алгебраических уравнений следует провести надлежащую нормировку неизвестных и, по возможности, установить и использовать на основании метода улучшенной редукции асимптотические свойства неизвестных при  $n, m \rightarrow \infty$  (см. подробности в [89]).

В случае  $j = 2$  область  $\Omega_2$  содержит полукруг  $r < a$ ,  $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$ , что является препятствием для непосредственного использования процедуры метода частичных областей, как это было осуществлено для области  $\Omega_1$ . Дело в том, что сектор  $S_0$  уже не охватывает область  $\Omega_2$  и полуполоса  $x < b$ ,  $|y| < d$  пересекает эту область. Поэтому не представляется возможным воспользоваться решениями типа  $u_1, u_2$  из (4.75). Однако поскольку на граничном прямолинейном отрезке задано однородное граничное условие для потенциала, то в соответствии с принципом отражения искомое решение отражается антисимметричным образом в область

$$\Omega_2^* = \{(x, y) : (x - 2b, y) \in \Omega_2\} \quad (4.78)$$

согласно правилу

$$u(x, -y) = -u(x - 2b, y), \quad (x, y) \in \Omega_2^*. \quad (4.79)$$

При этом замыкание объединений областей  $\Omega_2$  и  $\Omega_2^*$  содержит круг  $r \leq a$  и поэтому решение граничной задачи (4.70)-(4.72) продолжается до решения уравнения Гельмгольца (4.70) в этом круге.

Таким образом, функцию  $u$  можно искать в виде ряда

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_n(kr)}{J_n(ka)} \cos(n\theta), \quad r < a, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (4.80)$$

с неизвестными коэффициентами  $A_n$  (при этом предполагается, что  $J_n(ka) \neq 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ). Для нахождения коэффициентов  $A_n$  мы имеем граничное условие (4.72) на дуге  $\theta \in (\theta_0, 2\pi - \theta_0)$  и требуется знать некоторое условие на оставшейся части окружности  $|\theta| < \theta_0$ . Идея состоит в том, что это условие можно взять из соотношения (4.79) и сформулировать его в терминах тех же неизвестных коэффициентов  $A_n$ . Действуя таким образом и используя ортогональность тригонометрических функций в представлении (4.80), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $A_n$ . Ниже рассмотрим реализацию этой идеи.

Если точка  $(r, \theta) \in \Omega_2^*$ , то ее прообразом при отображении (4.78) будет точка с полярными координатами  $\widehat{r}, \widehat{\theta}$ , определяемыми из соотношений:

$$\widehat{r} \sin \widehat{\theta} = r \sin \theta, \quad \widehat{r} \cos \widehat{\theta} = r \cos \theta + 2b.$$

Разрешая эти уравнения, получаем

$$\widehat{r}(r, \theta) = \sqrt{r^2 - 4rb \cos \theta + 4b^2}, \quad \widehat{\theta}(r, \theta) = \arcsin \left[ \frac{r \sin \theta}{\widehat{r}(r, \theta)} \right]. \quad (4.81)$$

Таким образом, для граничных данных искомой функции  $u$  на дуге  $r = a$ ,  $\theta \in (0, \theta_0)$  согласно (4.79), (4.80) имеем выражение

$$u(r \cos \theta, r \sin \theta) = - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_n(kr^*)}{J_n(ka)} \cos(n\theta^*), \quad \theta \in (0, \theta_0), \quad (4.82)$$

где

$$r^*(\theta) = \widehat{r}(a, \theta) = a \sqrt{1 + 4 \cos^2 \theta_0 - 4 \cos \theta_0 \cos \theta},$$

$$\theta^*(\theta) = \widehat{\theta}(a, \theta) = \arcsin \left[ \frac{a \sin \theta}{r^*(\theta)} \right].$$

Тогда для нахождения коэффициентов  $A_n$  получаем функциональные уравнения

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\theta) = f(\theta), \quad \theta \in (\theta_0, \pi),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\theta) = - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_n(kr^*)}{J_n(ka)} \cos(n\theta^*), \quad \theta \in (0, \theta_0). \quad (4.83)$$

Отсюда, используя соотношения ортогональности

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \delta_{nm} (1 + \delta_{n0}), \quad n, m = 0, 1, \dots,$$

имеем систему алгебраических уравнений

$$(1 + \delta_{m0})A_m = \frac{2}{\pi} \int_{\theta_0}^{\pi} f(\theta) \cos(m\theta) d\theta -$$

$$-\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \int_0^{\theta_0} \frac{J_n(kr^*)}{J_n(ka)} \cos[n\theta^*(\theta)] \cos(m\theta) d\theta, \quad m = 0, 1, \dots \quad (4.84)$$

Итак, согласно (4.86), построение решения граничной задачи (4.70)–(4.72) в случае области  $\Omega_2$  сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$A_m + \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} A_n = f_m, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (4.85)$$

в которой коэффициенты и правые части имеют вид

$$C_{mn} = \frac{2}{(1 + \delta_{m0})\pi} \times \\ \times \int_0^{\theta_0} \frac{J_n(kr^*)}{J_n(ka)} \cos[n\theta^*(\theta)] \cos(m\theta) d\theta, \quad n, m = 0, 1, \dots, \\ f_m = \frac{2}{(1 + \delta_{m0})\pi} \int_{\theta_0}^{\pi} f(\theta) \cos(m\theta) d\theta, \quad m = 0, 1, \dots$$

При численной реализации для нахождения ограниченного решения системы уравнений (4.85) можно использовать метод простой редукции. Более эффективное решение этой системы основано на методе улучшенной редукции, когда в рассмотрение вовлекается априорная информация об асимптотических свойствах последовательности  $A_n$ ,  $n \rightarrow \infty$ . В общем случае эти асимптотические свойства определяются такими факторами как наличие угловых точек у рассматриваемой области, смешанным характером граничных условий (если таковые имеются), а также свойствами гладкости заданных граничных данных.

**4.5.3** Выясним характер поведения неизвестных коэффициентов  $A_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , определяемых из системы уравнений (4.86). В рассматриваемой ситуации характер такой асимптотики обусловлен наличием угловых точек  $r = a$ ,  $\theta = \pm\theta_0$  и возможным разрывом в граничных данных в этих точках. Этот вопрос можно изучить на основании анализа соответствующих решений уравнения Лапласа.

Прежде всего отметим, что модельная граничная задача для уравнения Лапласа в угле

$$\Delta v = 0, \quad r > 0, \quad \theta \in (0, \alpha), \quad v(r, 0) = 0, \quad c(r, \alpha) = 1, \quad r > 0, \quad (4.86)$$

с условием

$$\int_0^{\delta} \int_0^{\alpha} |v(r, \theta)|^2 r d\theta dr < \infty$$

для некоторого  $\delta > 0$  (условие на бесконечности не накладывается) допускает бесконечное число решений

$$v_0(r, \theta) = \frac{\theta}{\alpha}, \quad v_k(r, \theta) = r^{\pi k/\alpha} \sin(\pi k\theta/\alpha), \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда с помощью решения

$$v(r, \theta) = \frac{\theta}{\alpha} + c_1 r^{\pi/\alpha} \sin(\pi\theta/\alpha) \quad (4.87)$$

можно выделить главные особенности решения  $u$  граничной задачи (4.70)–(4.72) и таким образом выяснить характер поведения неизвестных  $A_k$  из представления  $u$  в виде (4.80).

Угол  $\alpha$  пересечения окружности  $r = a$  и прямой  $x = b$ , образующих границу области  $\Omega_2$ , равен

$$\alpha = \pi - \theta_0. \quad (4.88)$$

При этом прямые  $x = b$  и  $\theta = \theta_0$  пересекаются под углом  $\alpha_0 = \pi/2 - \theta_0$ . Значит, для искомого решения, согласно (4.87) и формуле отражения (4.79), в случае  $f(\theta_0) \neq 0$  (т. е. когда граничные данные для  $u$  в (4.71), (4.72) терпят разрыв) имеем

$$c_0 := \lim_{\theta \rightarrow \theta_0, \theta < \theta_0} u(a, \theta) = -\frac{\theta_0}{\pi - \theta_0} f(\theta_0). \quad (4.89)$$

Таким образом, с учетом (4.89) и граничного условия (4.71) получаем, что функция  $u$  допускает представление

$$u = v + u_0,$$

где  $v, u_0$  – решения уравнения (4.70) в круге  $r < a$ , причем  $u_0$  является непрерывной в замкнутом круге функций, а для  $v$  выполняются граничные условия

$$v|_{r=a} = c_0, \quad \theta \in (-\theta_0, \theta_0), \quad v|_{r=a} = f(\theta_0), \quad \theta \in (\theta_0, 2\pi - \theta_0).$$

Такая граничная задача для  $v$  допускает явное решение

$$v(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{J_n(kr)}{J_n(ka)} \cos(n\theta), \quad r < a, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} \pi B_0 &= c_0 \theta_0 + f(\theta_0)(\pi - \theta_0), \\ \pi B_n &= 2(c_0 - f(\theta_0)) \frac{\sin(n\theta_0)}{n}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (4.90)$$



Таким образом, коэффициенты  $A_n$  из (4.80) можно представить в виде

$$A_n = B_n + A_n^0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.91)$$

причем в соответствии со вторым слагаемым в выражении (4.87) и равенством (4.88) поведение коэффициентов  $A_n^0$  на бесконечности определяется условием

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^0 \cos(n\theta) \approx -c_1(\theta_0)(\theta_0 - \theta)^\beta, \quad \theta \rightarrow \theta_0, \quad \beta = \frac{\pi}{\pi - \theta_0}. \quad (4.92)$$

Отсюда и из [20] получаем при  $n \rightarrow \infty$  соотношение

$$\begin{aligned} \pi A_n^0 &\approx -c_1 \int_0^{\theta_0} (\theta_0 - \theta)^\beta \cos(n\theta) d\theta \approx \\ &\approx -\frac{c_1}{(2\theta_0)^\beta} \int_0^{\theta_0} (\theta_0^2 - \theta^2)^\beta \cos(n\theta) d\theta = \\ &= -\frac{c_1 \sqrt{\pi} \Gamma(\beta + 1)}{2(2\theta_0)^\beta} \left(\frac{2\theta_0}{n}\right)^{\beta+1/2} J_{\beta+1/2}(n\theta_0), \end{aligned}$$

т. е.

$$\pi A_n^0 \approx \frac{c}{n^{\beta+1/2}} J_{\beta+1/2}(n\theta_0), \quad n \rightarrow \infty, \quad (4.93)$$

где  $\beta = \pi/(\pi - \theta_0) = 1 + \theta_0/(\pi - \theta_0)$ . При этом константа  $c$  в (4.93), (как и постоянная  $c_1$  в (4.92)) является неопределенной и должна находиться численным образом в процессе использования метода улучшенной редукции при решении бесконечной системы алгебраических уравнений (4.85).

Проведенные рассуждения применимы и в случае, когда на прямолинейном участке  $\gamma_0$  границы области  $\Omega_2$  задано неоднородное граничное условие

$$u(b, y) = g(y), \quad |y| < \sqrt{a^2 - b^2},$$

так как с помощью некоторого частного решения уравнения Гельмгольца всегда можно свести неоднородное условие к однородному условию (4.71) с изменением граничного данного на дуге  $\gamma_2$ . Для этого, например, можно использовать ряд из частных решений вида (4.74) с заменой показателя экспоненты  $\sqrt{\beta^2 - k^2 x}$  на  $\sqrt{\beta^2 - k^2(b - x)}$ .

**4.5.4** Рассмотрим вопрос о построении решения плоской граничной задачи Неймана для уравнения Гельмгольца во внешности прямолинейно-круговой луночки  $\Omega_1$ . Здесь использование принципа отражения приводит к тому, что построение решения исходной граничной задачи сводится к соответствующему вопросу для граничной задачи Неймана для уравнения Гельмгольца во внешности круга.

Пусть область  $D$  является внешностью  $\Omega_1$ . Рассмотрим в  $D$  симметричную относительно переменной  $y$  внешнюю граничную задачу Неймана для уравне-

ния Гельмгольца

$$\Delta u(x, y) + k^2 u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (4.94)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = f(\theta), \quad r = a, \quad |\theta| < \theta_0, \quad (4.95)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x = b, \quad |y| < d, \quad (4.96)$$

где  $f(\theta)$  – четная, достаточно гладкая на интервале  $|\theta| \leq \theta_0$  функция. При этом граничные условия дополняются соответствующим условием излучения на бесконечности. В предположении, что временная гармоническая зависимость звукового поля определяется множителем  $e^{-i\omega t}$ , это условие имеет вид

$$r^{1/2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right\} = o(1), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.97)$$

Такая задача описывает распространение звукового поля в области  $D$  при заданном колебании части границы луночки  $\Omega_1$ .

В соответствии с общими идеями метода частичных областей представим область  $D$  в виде объединения ограниченной области  $\Omega_2$  и внешности окружности  $r = a$ . В связи с этим решения  $u$  исходной граничной задачи будем искать в виде

$$u = u_1, \quad |r| > a, \quad u = u_0, \quad (x, y) \in \Omega_0, \quad (4.98)$$

где предполагается, что каждая из функций  $u_j$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца (4.94) в соответствующей области и, кроме того, для  $u_1$  выполняются граничное условие (4.95) и условие излучения (4.97), а для  $u_0$  – граничное условие (4.96).

Вне круга  $r \leq a$  решение  $u = u_1$  граничной задачи (4.94)–(4.97) можно представить рядом

$$u_1(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \frac{H_m^{(1)}(kr)}{H_m^{(1)}(ka)} \cos(m\theta), \quad r > a, \quad (4.99)$$

где  $H_m^{(1)}(\cdot)$  – функция Ханкеля первого рода и  $m$ -го порядка.

Рассмотрим вопрос о представлении решения  $u = u_2$  в области  $\Omega_2$ . Как отмечалось в п. 2, область  $\Omega_2$  содержит внутри себя полукруг  $r \leq a$ ,  $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$ , что препятствует непосредственному использованию процедуры метода частичных областей. Однако поскольку на граничном прямолинейном отрезке  $\gamma_0$  для потенциала  $u$  задано однородное граничное условие (4.96), то в соответствии с принципом отражения искомое решение  $u_0$  отражается в область  $\Omega_2^*$  (см. (4.78)) симметричным образом

$$u_0(x, y) = u_0(-x + 2b, y), \quad (x, y) \in \Omega_0^*. \quad (4.100)$$

Значит, как и в рассмотренных п. 2, функцию  $u_0$  можно искать в виде ряда

$$u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_n(kr)}{J_n(ka)} \cos(n\theta), \quad r < a, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (4.101)$$

с неизвестными коэффициентами  $A_n$  (считаем, что выполняется условие  $J_n(ka) \neq 0, n = 0, 1, \dots$ ).

Таким образом, для нахождения коэффициентов  $C_m, A_n$  мы имеем граничные условия (4.95), (4.96) и условия сопряжения для потенциалов  $u_0, u_1$ :

$$u_0 = u_1, \quad \frac{\partial u_0}{\partial r} = \frac{\partial u_1}{\partial r}, \quad r = a, \quad |\theta| \in (\theta_0, 2\pi - \theta_0). \quad (4.102)$$

При этом, исходя из выражения (4.101), заключаем, что для функции  $u_0$  требуется определить некоторое дополнительное граничное условие на оставшейся части окружности  $r = a, |\theta| < \theta_0$ . Как и в п. 2, это условие можно определить исходя из соотношения отражения (4.100) и сформулировать его в терминах неизвестных коэффициентов  $A_n$ . Тогда, действуя таким образом и используя ортогональность тригонометрических функций в представлениях (4.99), (4.101), можно получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $C_m$  и  $A_n$ .

Для искомой функции  $u_0$  в области  $\Omega_2^*$  согласно (4.100), (4.101) и в обозначениях п. 2 имеем выражения

$$u_0(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_n(k\hat{r})}{J_n(ka)} \cos(n\hat{\theta}), \quad (r, \theta) \in \Omega_2^*,$$

и

$$u_0(a \cos \theta, a \sin \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_n(\hat{k}r^*)}{J_n(\hat{k})} \cos(n\theta^*), \quad |\theta| < \theta_0. \quad (4.103)$$

Таким образом, выполнение граничных условий (4.95), (4.96) и условий сопряжения, вместе с равенством (4.103), приводит к следующим функциональным соотношениям (здесь учтена четность функции  $f$ ):

$$k \sum_{m=0}^{\infty} C_m \frac{H_m^{(1)'}(\hat{k})}{H_m^{(1)}(\hat{k})} \cos(m\theta) = f(\theta), \quad \theta \in (0, \theta_0), \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} C_m \frac{H_m^{(1)'}(\hat{k})}{H_m^{(1)}(\hat{k})} \cos(m\theta) = \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{J_m'(\hat{k})}{J_m(\hat{k})} \cos(m\theta), \quad \theta \in (\theta_0, \pi), \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos(m\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(m\theta), \quad \theta \in (\theta_0, \pi), \quad (4.106)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(m\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{J_m(\widehat{k}r^*)}{J_m(\widehat{k})} \cos(n\theta^*), \quad \theta \in (0, \theta_0). \quad (4.107)$$

Запишем соотношения (4.104)–(4.107) в виде

$$\begin{aligned} & k \sum_{m=0}^{\infty} C_m \frac{H_m^{(1)'}(\widehat{k})}{H_m^{(1)}(\widehat{k})} \cos(m\theta) = \\ & = \begin{cases} f(\theta), & \theta \in (0, \theta_0), \\ k \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_n'(\widehat{k})}{J_n(\widehat{k})} \cos(n\theta), & \theta \in (\theta_0, \pi), \end{cases} \end{aligned} \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\theta) = \\ & = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{J_m(\widehat{k}r^*)}{J_m(\widehat{k})} \cos(m\theta^*), & \theta \in (0, \theta_0), \\ \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos(m\theta), & \theta \in (\theta_0, \pi). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.109)$$

Тогда использование соотношений ортогональности ортогональности системы  $\{\cos(n\theta)\}_{n=0}^{\infty}$  на отрезке  $[0, \pi]$  позволяет получить из (4.108), (4.109) следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $C_m$  и  $A_n$ :

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \delta_{n0}) \pi k}{2} \frac{H_m^{(1)'}(\widehat{k})}{H_m^{(1)}(\widehat{k})} C_m &= k \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{J_n'(\widehat{k})}{J_n(\widehat{k})} L_{n,m} + \\ &+ \int_0^{\theta_0} f(\theta) \cos(m\theta) d\theta, \quad m = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (4.110)$$

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \delta_{n0}) \pi}{2} A_n &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_0^{\theta_0} \frac{J_m(\widehat{k}r^*)}{J_m(\widehat{k})} \cos(m\theta^*) \cos(n\theta) d\theta + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} L_{m,n} \widehat{C}_m, \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (4.111)$$

где интегралы

$$\begin{aligned} L_{m,n} &= \int_{\theta_0}^{\pi} \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta = \\ &= -\frac{\sin(n-m)\theta_0}{2(n-m)} - \frac{\sin(n+m)\theta_0}{2(n+m)}, \quad n \neq m, \end{aligned}$$

$$L_{n,n} = \int_{\theta_0}^{\pi} \cos^2(n\theta) d\theta = \frac{\pi - \theta_0}{2} - \frac{\sin(2n\theta_0)}{4n}, \quad n \geq 1,$$

$$L_{0,0} = \int_{\theta_0}^{\pi} d\theta = \pi - \theta_0.$$

При численных расчетах для нахождения ограниченного решения системы уравнений (4.110), (4.111) можно использовать метод простой редукции.

Аналогично рассмотренным п. 2 можно показать, в предположении, что заданная четная функция  $f(\theta)$  непрерывно дифференцируема на отрезке  $|\theta| \leq \theta_0$  и  $f(\theta_0) = 0$  и  $f'(\theta_0) = 0$ , что для ограниченного решения алгебраической системы уравнений справедливы асимптотики

$$C_m \approx -\frac{2c\Gamma(\beta+1)\sin(m\theta_0 + \beta\pi/2)}{\pi m^{\beta+1}}, \quad m \rightarrow \infty,$$

$$A_n \approx \frac{2c\Gamma(\beta+1)}{\pi n^{\beta+1}} \left[ \cos\theta_0 \sin\left(n\theta_0 + \pi\frac{\beta}{2}\right) - \sin\left(n\theta_0 - \pi\frac{\beta}{2}\right) \right], \quad n \rightarrow \infty.$$

При этом постоянная  $c$  в этих асимптотических формулах является неизвестной и должна определяться в процессе численного решения системы (4.110), (4.111) на основе метода улучшенной редукции.

#### 4.6 Задача об акустическом волноводе

Как уже отмечалось, основные результаты, достигнутые на основании метода частичных областей, относятся к тем случаям, когда смежные частичные области не пересекаются, т. е. имеют только одну общую граничную поверхность или линию. В том случае когда смежные частичные области пересекаются, традиционные способы использования метода частичных областей могут оказаться неэффективными (см., например, [36, 46, 387]).

В данном параграфе, основанном на статье [37], излагается подход, позволяющий эффективно применять метод частичных областей в случаях, когда смежные частичные области имеют непустое пересечение. Основную идею предлагаемого обобщения поясним на следующем простом примере.

Пусть двумерная область  $S$  с границей  $\Gamma$ , в которой рассматривается граничная задача третьего рода для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u(x, y) + k^2 u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S, \quad (4.112)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} + bu \right) \Big|_{\Gamma} = f, \quad (4.113)$$

представляется в виде объединения двух областей  $S_1$  и  $S_2$  с кусочно-гладкими границами, которые имеют непустое пересечение  $S_0$ . Предположим, что геометрия каждой из областей  $S_1, S_2$  дает возможность построения достаточно широкого набора решений уравнения (4.112), эти наборы обозначим через

$u_1$  и  $u_2$ , соответственно. Пусть  $\Gamma_1$  – граница  $S_1$ , а  $\Gamma_2$  – граница  $S_2$ , и  $\Gamma_1^0$  – часть границы области  $S_1$ , которая попадает внутрь области  $S_2$ , а  $\Gamma_2^0$  – часть границы области  $S_2$ , которая лежит в области  $S_1$  (рис. 4.2). Таким образом, граница  $\Gamma_0$  области  $S_0$  состоит из объединения кривых  $\Gamma_1^0$  и  $\Gamma_2^0$ .

Традиционное использование метода частичных областей в рассматриваемой ситуации состоит в том, что в одной из областей, например в  $S_1$ , используется общее решение  $u_1$ , а решение  $u_2$  используется лишь в области  $S_2 \setminus S_0$ . Такое представление решения граничной задачи (4.112), (4.113) предполагает, кроме выполнения граничного условия (4.113), также выполнение условий сопряжения

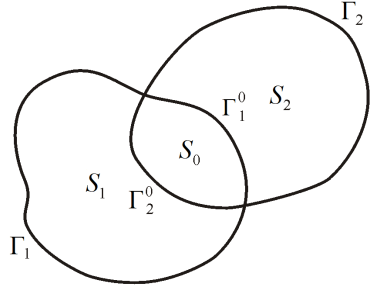


Рис. 4.2. Область  $S$ , состоящая из двух пересекающихся областей  $S_1$  и  $S_2$

$$\begin{aligned} u_1|_{\Gamma_1^0} &= u_2|_{\Gamma_1^0}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1^0} &= \frac{\partial u_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1^0}. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Предлагаемый подход состоит в том, чтобы для построения решения функции  $u_1$ ,  $u_2$  в полной мере в областях их определения, т. е. в области  $S_0$ , использовать как  $u_1$ , так и  $u_2$ . При этом, вместо двух условий (4.114) на одной кривой  $\Gamma_1^0$  требуется выполнение по одному условию на каждой из кривых  $\Gamma_1^0$ ,  $\Gamma_2^0$ :

$$\left( \frac{\partial u_1}{\partial n} + \alpha u_1 \right) \Big|_{\Gamma_j^0} = \left( \frac{\partial u_2}{\partial n} + \alpha u_2 \right) \Big|_{\Gamma_j^0}, \quad j = 1, 2, \quad (4.115)$$

где  $\alpha$  – некоторая постоянная и  $\partial/\partial n$  – производная по внешней нормали к  $S_0$ . Первое из условий (4.115) (когда  $j = 1$ ) является линейной комбинацией условий сопряжения (4.114), а второе условие из (4.115) есть аналогичная линейная комбинация условий сопряжения на кривой  $\Gamma_2^0$ :

$$u_1|_{\Gamma_2^0} = u_2|_{\Gamma_2^0}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2^0} = \frac{\partial u_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2^0}. \quad (4.116)$$

Тогда, если предположить, что однородная граничная задача третьего рода

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) + k^2 u(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in S_0, \\ \left( \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u \right) \Big|_{\Gamma_0} &= 0, \end{aligned} \quad (4.117)$$

где  $\partial/\partial n$  – производная по внешней к  $S_0$  нормали, имеет лишь тривиальное решение, то из выполнения условий (4.115) будет следовать выполнение условий сопряжения (4.114) и (4.116).

Для того, чтобы задача (4.117) имела единственное нулевое решение, достаточно постоянную  $\alpha$  в (4.117) взять не вещественной:

$$\alpha = \alpha_0 + i\alpha_1, \quad \alpha_1 \neq 0.$$

Докажем это утверждение. Действительно, пусть  $u$  – решение граничной задачи (4.117), тогда по формуле Грина имеем

$$k^2 \iint_{S_0} |u|^2 dx dy - \iint_{S_0} |\nabla u|^2 dx dy = \alpha \int_{\Gamma_0} |u|^2 d\Gamma_0. \quad (4.118)$$

Беря в равенстве (4.118) мнимую часть, получаем

$$\alpha_1 \int_{\Gamma_0} |u|^2 d\Gamma_0 = 0,$$

откуда

$$u|_{\Gamma_0} = 0, \quad (4.119)$$

что, с учетом граничного условия из (4.117), дает также равенство

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma_0} = 0. \quad (4.120)$$

Из (4.119), (4.120) на основании теоремы единственности решения задачи Коши для эллиптического уравнения второго порядка [173, с. 376] получаем, что  $u \equiv 0$ ,  $(x, y) \in S_0$ .

**Замечание.** Из проведенных рассуждений вытекает, что вместо условий (4.115) на кривых  $\Gamma_1^0$ ,  $\Gamma_2^0$  можно использовать условия

$$\left( b_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} + b_2 u_1 \right) \Big|_{\Gamma_1^0} = \left( b_1 \frac{\partial u_2}{\partial n} + b_2 u_2 \right) \Big|_{\Gamma_1^0}, \quad (4.121)$$

$$\left( \frac{\partial u_1}{\partial n} + \alpha u_1 \right) \Big|_{\Gamma_2^0} = \left( \frac{\partial u_2}{\partial n} + \alpha u_2 \right) \Big|_{\Gamma_2^0} \quad (4.122)$$

с произвольными вещественными постоянными  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $|b_1| + |b_2| \neq 0$  (в частности, одно из чисел  $b_1$  или  $b_2$  может быть равным нулю) и постоянной  $\alpha$  с  $\text{Im } \alpha \neq 0$ .

Для иллюстрации эффективности предлагаемого подхода рассмотрим конкретную плоскую граничную задачу для уравнения Гельмгольца (4.112) относительно потенциала скорости  $u$ .

Пусть имеется сложный волновод, представляющий собой сочленение клиновидного (1) и плоского в виде полуполосы (2) волноводов (рис. 4.3). Будем

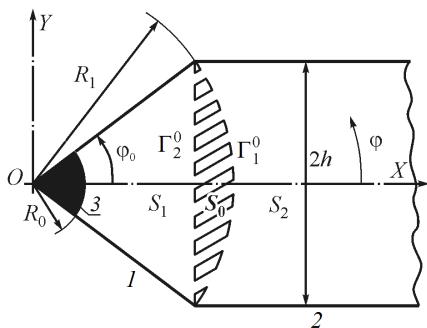


Рис. 4.3. Сочленение двух волноводов: 1 - клиновидный волновод; 2 - плоский волновод; 3 - источник звука

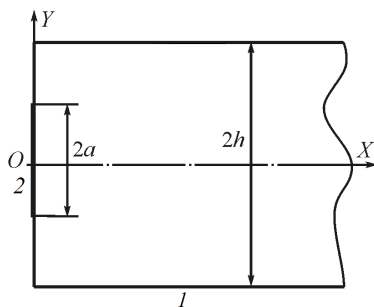


Рис. 4.4. Поршень в плоском волноводе: 1 - плоский волновод; 2 - источник звука

полагать, что стенки этих волноводов являются акустически жесткими, а внутри волноводов имеется акустическая среда с волновым сопротивлением  $\rho c$ . Звуковое поле в рассматриваемом волноводе создается источником (3), расположенном в вершине клиновидного волновода, поверхность  $R = R_0$ ,  $|\phi| \leq \phi_0$  которого совершает гармонические колебания с колебательной скоростью  $v_0 = 1$ . Введем в рассмотрение две системы координат – цилиндрическую и декартову с общим центром  $O$  в вершине клина (рис. 4.3). С учетом принятых выше предположений можно сформулировать следующие граничные условия:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 1, \quad r = R_0, \quad |\phi| \leq \phi_0, \quad (4.123)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = 0, \quad |\phi| = \phi_0, \quad R_0 \leq r \leq R_1, \quad (4.124)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad |y| = h, \quad x \geq l, \quad (4.125)$$

Всю область существования волнового поля внутри волновода  $S$  разобьем на две смежные подобласти

$$S_1 = \{R_0 \leq R_1, |\phi| \leq \phi_0\}, \quad S_2 = \{|y| \leq h, x \geq h\}.$$

Очевидно, что заштрихованная на рис. 4.3 область  $S_0$  является пересечением смежных подобластей  $S_1$  и  $S_2$ , а дуга  $\Gamma_1^0$  и отрезок  $\Gamma_2^0$  образуют границу  $S_0$ .



С учетом условий (4.123) и (4.124) общее решение уравнения Гельмгольца относительно потенциала скорости  $u_1$  в области  $S_1$  представим в виде

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[ J_{\alpha_n}(kr) - \frac{J'_{\alpha_n}(kR_0)}{N'_{\alpha_n}(kR_0)} N_{\alpha_n}(kr) \right] \cos(\alpha_n \phi) - \frac{N_0(kr)}{kN_1(kR_0)}, \quad (4.126)$$

где последовательность  $\alpha_n = \pi n / \phi_0$ , и  $A_n$  – неизвестные коэффициенты. Кроме того, здесь

$$N_{\alpha}(r) = \frac{1}{2i} \left[ H_{\alpha}^{(1)}(r) - H_{\alpha}^{(2)}(r) \right]$$

– цилиндрическая функция Неймана и, в частности,  $N'_0(r) = -N_1(r)$ .

Для области  $S_2$ , с учетом граничного условия (4.125) выражение для  $u_2$  запишем в виде

$$u_2 = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \exp[-k_m(x-l)] \cos(\beta_m y) \quad (4.127)$$

с последовательностью  $\beta_m = \pi m / h$  и  $k_m^2 = \beta_m^2 - k^2$ .

Принимая  $\alpha = i$ , условия (4.115) для рассматриваемой граничной задачи (4.123)–(4.125) записываем в виде

$$\left( \frac{\partial u_1}{\partial r} + i u_1 \right) = \left( \frac{\partial u_2}{\partial r} + i u_2 \right), \quad r = R_1, \quad |\phi| \leq \phi, \quad (4.128)$$

$$\left( -\frac{\partial u_1}{\partial x} + i u_1 \right) = \left( -\frac{\partial u_2}{\partial x} + i u_2 \right), \quad x = l, \quad |y| \leq h. \quad (4.129)$$

При этом чтобы выполнить условие (4.128), потенциал  $u_2$  необходимо представить в цилиндрических переменных, а для выполнения условия (4.129) потенциал  $u_1$  следует представить в декартовых координатах согласно формул перехода

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan(y/x), \quad x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi.$$

При этом справедливы выражения

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n k \left[ J'_{\alpha_n}(kr) - \frac{J'_{\alpha_n}(kR_0)}{N'_{\alpha_n}(kR_0)} N'_{\alpha_n}(kr) \right] \cos(\alpha_n \phi) + \frac{N_1(kr)}{N_1(kR_0)},$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial r} = - \sum_{m=0}^{\infty} C_m e^{-k_m(r \cos \phi - l)} [k_m \cos \phi \cos(\beta_m r \sin \phi) + \beta_m \sin \phi \sin(\beta_m r \sin \phi)]$$

и

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{N_1(k\sqrt{x^2 + y^2})}{N_1(kR_0)} + \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[ J'_{\alpha_n}(k\sqrt{x^2 + y^2}) - \right. \\
&- \left. \frac{J'_{\alpha_n}(kR_0)}{N'_{\alpha_n}(kR_0)} N'_{\alpha_n}(k\sqrt{x^2 + y^2}) \right] \cos[\alpha_n \arctan(y/x)] + \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\alpha_n y}{x^2 + y^2} \left[ J_{\alpha_n}(k\sqrt{x^2 + y^2}) - \right. \\
&- \left. \frac{J_{\alpha_n}(kR_0)}{N_{\alpha_n}(kR_0)} N_{\alpha_n}(k\sqrt{x^2 + y^2}) \right] \sin[\alpha_n \arctan(y/x)], \\
\frac{\partial u_2}{\partial x} &= - \sum_{m=0}^{\infty} C_m k_m e^{-k_m(x-l)} \cos(\beta_m y).
\end{aligned}$$

Используя эти выражения и равенства (4.126), (4.127), получаем из (4.128), (4.129) функциональные уравнения

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} A_n k \left[ J'_{\alpha_n}(kR_1) - \frac{J'_{\alpha_n}(kR_0)}{N'_{\alpha_n}(kR_0)} N'_{\alpha_n}(kR_0) N'_{\alpha_n}(kR_1) \right] \cos(\alpha_n \phi) + \frac{N_1(kR_1)}{N_1(kR_0)} + \\
&+ i \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[ J_{\alpha_n}(kR_1) - \frac{J_{\alpha_n}(kR_0)}{N_{\alpha_n}(kR_0)} N_{\alpha_n}(kR_1) \right] \cos(\alpha_n \phi) - i \frac{N_0(kR_1)}{k N_1(kR_0)} = \\
&= - \sum_{m=0}^{\infty} C_m k_m e^{-k_m(R_1 \cos \phi - l)} \cos \phi \cos(\beta_m R_1 \sin \phi) - \\
&- \sum_{m=0}^{\infty} C_m \beta_m e^{-k_m(R_1 \cos \phi - l)} \sin \phi \sin(\beta_m R_1 \sin \phi) + \\
&+ i \sum_{m=0}^{\infty} C_m e^{-k_m(R_1 \cos \phi - l)} \cos(\beta_m R_1 \sin \phi), \quad |\phi| \leq \phi_0, \\
&- \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{kl}{\sqrt{l^2 + y^2}} \left[ J'_{\alpha_n}(k\sqrt{l^2 + y^2}) - \right. \\
&- \left. \frac{J'_{\alpha_n}(kR_0)}{N'_{\alpha_n}(kR_0)} N'_{\alpha_n}(k\sqrt{l^2 + y^2}) \right] \cos[\alpha_n \arctan(y/l)] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\alpha_n y}{l^2 + y^2} \left[ J_{\alpha_n} \left( k \sqrt{l^2 + y^2} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{J'_{\alpha_n}(kR_0)}{N'_{\alpha_n}(kR_0)} N_{\alpha_n} \left( k \sqrt{l^2 + y^2} \right) \right] \sin[\alpha_n \arctan(y/l)] - \\
& - \frac{l}{\sqrt{l^2 + y^2}} \frac{N_1 \left( k \sqrt{l^2 + y^2} \right)}{N_1(kR_0)} - i \frac{N_0 \left( k \sqrt{l^2 + y^2} \right)}{k N_1(kR_0)} + \\
& + i \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[ J_{\alpha_n} \left( k \sqrt{l^2 + y^2} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{J'_{\alpha_n}(kR_0)}{N'_{\alpha_n}(kR_0)} N_{\alpha_n} \left( k \sqrt{l^2 + y^2} \right) \right] \cos[\alpha_n \arctan(y/l)] = \\
& = \sum_{m=0}^{\infty} C_m k_m \cos(\beta_m y) + i \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos(\beta_m y), \quad |y| \leq h.
\end{aligned}$$

Из этих функциональных соотношений, используя ортогональность входящих в них систем тригонометрических функций, получаем следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $A_n, C_m$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{(1 + \delta_{0,n})\phi_0}{2} B_n A_n = \sum_{m=0}^{\infty} C_m e^{k_m l} L_{nm} - \\
& - \delta_{0,n} \phi_0 \frac{k N_1(kR_1) - i N_0(kR_1)}{k N_1(kR_0)}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4.130) \\
& (i + k_m) \frac{(1 + \delta_{0m})}{2} C_m = \sum_{n=0}^{\infty} A_n M_{mn} + Q_m, \quad m = 0, 1, \dots,
\end{aligned}$$

где коэффициенты

$$B_n = k J'_{\alpha_n}(kR_1) + i J_{\alpha_n}(kR_1) - \frac{J'_{\alpha_n}(kR_0)[k N'_{\alpha_n}(kR_1) + i N_{\alpha_n}(kR_1)]}{N'_{\alpha_n}(kR_0)},$$

$$\begin{aligned}
L_{nm} = \int_0^{\phi_0} e^{-k_m R_1 \cos \phi} [(-k_m \cos \phi + i) \cos(\beta_m R_1 \sin \phi) - \\
- \beta_m \sin \phi \sin(\beta_m R_1 \sin \phi)] \cos(\alpha_n \phi) d\phi,
\end{aligned}$$

$$M_{mn} = \int_0^h \widetilde{M}_n(y) \cos(\beta_m y) dy,$$

$$\widetilde{M}_n(y) = \frac{kl}{\sqrt{l^2 + y^2}} \left[ J'_{\alpha_n} \left( k \sqrt{l^2 + y^2} \right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{J'_{\alpha_n}(kR_0)}{N'_{\alpha_n}(kR_0)} N'_{\alpha_n} \left( k\sqrt{l^2 + y^2} \right) \left] \cos[\alpha_n \arctan(y/l)] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\alpha_n y}{l^2 + y^2} \left[ J_{\alpha_n} \left( k\sqrt{l^2 + y^2} \right) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{J'_{\alpha_n}(kR_0)}{N'_{\alpha_n}(kR_0)} N_{\alpha_n} \left( k\sqrt{l^2 + y^2} \right) \right] \sin[\alpha_n \arctan(y/l)] + \right. \\
& \quad \left. + i \left[ J_{\alpha_n} \left( k\sqrt{l^2 + y^2} \right) - \frac{J'_{\alpha_n}(kR_0)}{N'_{\alpha_n}(kR_0)} N_{\alpha_n} \left( k\sqrt{l^2 + y^2} \right) \right] \cos[\alpha_n \arctan(y/l)] \right]
\end{aligned}$$

и

$$Q_m = - \int_0^h \left[ i \frac{N_0 \left( k\sqrt{l^2 + y^2} \right)}{kN_1(kR_0)} + \frac{l}{\sqrt{l^2 + y^2}} \frac{N_1 \left( k\sqrt{l^2 + y^2} \right)}{N_1(kR_0)} \right] \cos(\beta_m y) dy.$$

Обычно такого вида системы решаются методом редукции. При этом возникают вопросы, связанные с проверкой достоверности полученного численного решения и его точности. Для этой цели используются различные критерии, преимущества и недостатки которых обсуждаются в [46]. В рассматриваемой задаче проверялось качество выполнения условий на обеих границах  $\Gamma_1^0$ ,  $\Gamma_2^0$ . При этом анализировалась оценка устойчивости решения системы уравнений (4.130) путем сравнения поведения значений первых неизвестных  $A_n$ ,  $C_m$  и изменения точности выполнения условий сопряжения при увеличении порядка решаемой конечной редуцированной системы уравнений. Была проведена проверка выполнения закона сохранения энергии.

Проверка по указанным выше критериям проводилась в широком диапазоне геометрических и волновых параметров рассматриваемой системы волноводов. Во всех случаях эффективность предлагаемого подхода оставалась достаточно высокой. В качестве примера в табл. 4.1 приведены данные о качестве выполнения условий сопряжения на границе  $\Gamma_1^0$  при следующих значениях параметров:

$$\frac{2h}{\lambda} = 0,45, \quad \phi_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{R_0}{R_1} = 0,3.$$

Количество неизвестных, удерживаемых при фактическом решении системы уравнений (4.130), составляло 10 ( $n = 0, 1, \dots, 4$ ,  $m = 1, 2, 3, 4$ ). Отметим, что в табл. 4.1 величины  $u'_1$  и  $u'_2$  означают производную от  $u_1$  и  $u_2$  по переменной  $x$ .

Как следует из данных табл. 4.1, несмотря на сравнительно небольшое количество удерживаемых неизвестных, качество выполнения условий сопря-

Табл. 4.1. Выполнение условий сопряжения на границе  $\Gamma_1^0$ 

$y/h$	$-\text{Re } u_1$	$\text{Im } u_1$	$-\text{Re } u'_1$	$-\text{Im } u'_1$	$-\text{Re } u_2$	$\text{Im } u_2$	$-\text{Re } u'_2$	$-\text{Im } u'_2$
0,0	0,12084	0,24058	0,44688	0,28624	0,12088	0,24058	0,44599	0,28513
0,1	0,12303	0,23998	0,44148	0,28554	0,12301	0,24000	0,44229	0,28567
0,2	0,12942	0,23817	0,42574	0,28328	0,12942	0,23817	0,42574	0,28328
0,3	0,13951	0,23516	0,40101	0,27911	0,13951	0,23515	0,40121	0,27933
0,4	0,15254	0,23095	0,36921	0,27253	0,15254	0,23094	0,36944	0,27286
0,5	0,16757	0,22557	0,33242	0,26301	0,16760	0,22553	0,33162	0,26313
0,6	0,18356	0,21914	0,29229	0,24959	0,18351	0,21919	0,29264	0,25000
0,7	0,19937	0,21185	0,24932	0,23036	0,19950	0,21179	0,24892	0,22907
0,8	0,21389	0,20400	0,20223	0,20179	0,21398	0,20399	0,20259	0,20351
1,0	0,23569	0,18693	0,08221	0,09498	0,23452	0,19054	0,09179	0,10179

жения как по потенциалу скорости, так и по колебательной скорости является достаточно высокой. Практически во всех точках невязка наблюдается в третьем знаке и лишь в точке  $y/h = 1,0$  невязка по потенциалу скорости составляет 0,46 %, а по колебательной скорости – 1,9 %. При этом закон сохранения энергии выполняется с точностью до 0,1 % (энергия вычислялась на поверхности источника  $r = R_0$  и в дальнем поле, когда  $x \rightarrow \infty$ ). При увеличении количества удерживаемых неизвестных до 14 ( $n = 0, 1, \dots, 5$ ,  $m = 0, 1, \dots, 8$ ) различие между значениями  $u_1$  и  $u_2$ , а также  $u'_1$  и  $u'_2$  наблюдалось уже только в четвертом знаке. При этом закон сохранения энергии выполнялся с точностью до 0,01 %.

При проведении численной проверки предложенного подхода вместо условия (4.115) на кривой  $\Gamma_1^0$  использовалось также условие (4.121) с  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 1$ . В этом случае также все указанные критерии проверки достоверности полученного решения показали высокую эффективность рассматриваемого метода решения.

Интересно сопоставить приведенные результаты с данными, полученными с использованием традиционного метода частичных областей, основанного на выполнении условий сопряжения (4.114) на дуге  $\Gamma_2^0$ . При выполнении этих условий на основании выражений (4.126), (4.127) получаем следующие функциональные соотношения на отрезке  $|\phi| \leq \phi_0$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[ J_{\alpha_n}(kR_1) - \frac{J'_{\alpha_n}(kR_0)}{N'_{\alpha_n}(kR_0)} N_{\alpha_n}(kR_1) \right] \cos(\alpha_n \phi) - \frac{N_0(kR_1)}{kN_1(kR_0)} = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} C_m e^{-k_m(R_1 \cos \phi - l)} \cos(\beta_m R_1 \sin \phi), \\ \sum_{n=0}^{\infty} A_n k \left[ J'_{\alpha_n}(kR_1) - \frac{J'_{\alpha_n}(kR_1)}{N'_{\alpha_n}(kR_0)} N'_{\alpha_n}(kR_1) \right] \cos(\alpha_n \phi) + \frac{N_1(kR_1)}{N_1(kR_0)} = \end{aligned}$$

$$= - \sum_{m=0}^{\infty} C_m e^{-k_m(R_1 \cos \phi - l)} [k_m \cos \phi \cos(\beta_m R_1 \sin \phi) + \beta_m \sin \phi \sin(\beta_m R_1 \sin \phi)].$$

Отсюда получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $A_n, C_m$ :

$$\begin{aligned} A_n D_n - \sum_{m=0}^{\infty} C_m e^{k_m l} N_{nm} &= \delta_{0n} \phi_0 \frac{N_0(kR_1)}{kN_1(kR_0)}, \quad n = 0, 1, \dots, \\ A_n \tilde{D}_n + \sum_{m=0}^{\infty} C_m e^{k_m l} \tilde{N}_{nm} &= -\delta_{0n} \phi_0 \frac{N_1(kR_1)}{N_1(kR_0)}, \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (4.131)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{1 + \delta_{0n}}{2} \phi_0 \left[ J_{\alpha_n}(kR_1) - \frac{J'_{\alpha_n}(kR_0)}{N'_{\alpha_n}(kR_1)} N_{\alpha_n}(kR_1) \right], \\ N_{nm} &= \int_0^{\phi_0} e^{-k_m R_1 \cos \phi} \cos(\beta_m R_1 \sin \phi) \cos(\alpha_n \phi) d\phi, \\ \tilde{D}_n &= \frac{1 + \delta_{0n}}{2} \phi_0 k \left[ J'_{\alpha_n}(kR_1) - \frac{J_{\alpha_n}(kR_1)}{N'_{\alpha_n}(kR_0)} N'_{\alpha_n}(kR_1) \right], \\ \tilde{N}_{nm} &= \int_0^{\phi_0} e^{-k_m R_1 \cos \phi} [k_m \cos \phi \cos(\beta_m R_1 \sin \phi) + \\ &\quad + \beta_m \sin \phi \sin(\beta_m R_1 \sin \phi)] \cos(\alpha_n \phi) d\phi, \end{aligned}$$

где  $n, m = 0, 1, \dots$ .

Из этой системы путем алгебраических преобразований нетрудно получить систему для неизвестных  $C_m$

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} C_m e^{k_m l} [D_n \tilde{N}_{nm} + \tilde{D}_n N_{nm}] = \\ &= -\delta_{0n} \phi_0 \frac{\tilde{D}_n N_0(kR_1) + D_n k N_1(kR_1)}{k N_1(kR_0)}, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (4.132)$$

Решая эту систему методом редукции можно определить коэффициенты  $C_m$ , а затем, исходя из одного из уравнений (4.130), найти и коэффициенты  $A_n$ . Были выполнены соответствующие расчеты при указанных выше значениях параметров волноводов для 10 неизвестных ( $n = 0, 1, \dots, 5$ ,  $m = 0, 1, \dots, 5$ ). Данные о качестве выполнения условий сопряжения на  $\Gamma_2^0$  приведены в табл. 4.2. Как видно из таблицы, при традиционном использовании метода частичных областей и при прочих равных параметрах качество выполнения условий сопряжения является полностью неудовлетворительным.

Табл. 4.2. Выполнение условий сопряжения на границе  $\Gamma_2^0$ 

$y/h$	$-\text{Re } u_1$	$-\text{Im } u_1$	$-\text{Re } u'_1$	$\text{Im } u'_1$	$\text{Re } u_2$	$\text{Im } u_2$	$-\text{Re } u'_2$	$\text{Im } u'_2$
0,0	0,22904	0,08797	0,32100	0,10924	0,31202	0,07470	0,22599	0,39013
0,1	0,23096	0,08775	0,31148	0,10054	0,31061	0,07453	0,22021	0,40057
0,2	0,23654	0,08709	0,30054	0,10002	0,30583	0,07456	0,22004	0,40098
0,3	0,24528	0,08599	0,28091	0,10000	0,29704	0,07570	0,19921	0,40003
0,4	0,25642	0,08445	0,25904	0,09999	0,28511	0,07785	0,15044	0,39566
0,5	0,26905	0,08249	0,21036	0,09601	0,27261	0,08008	0,12166	0,38313
0,6	0,28215	0,08014	0,18229	0,09154	0,25962	0,08198	0,09024	0,39100
0,7	0,29470	0,07749	0,15032	0,08436	0,24759	0,08422	0,06492	0,38247
0,8	0,30570	0,07465	0,11229	0,07415	0,23612	0,08744	0,02487	0,37261
1,0	0,31984	0,06851	0,04031	0,03487	0,22356	0,09219	-0,04020	0,34018

Не удовлетворяет также и выполнение закона сохранения энергии (невязка по потенциалу скорости составляет 24 %, а по колебательной скорости – 30 %).

На основании проведенного анализа можно сделать вывод о том, что предложенный подход позволяет эффективно применять метод частичных областей в тех случаях, когда смежные частичные подобласти имеют непустое пересечение. Это обстоятельство открывает возможность для расширения класса задач, решаемых на основании метода частичных областей. Отметим также, что при конкретных вычислениях параметров волнового поля в зоне пересечения подобластей  $S_0$  можно практически с равной эффективностью использовать как выражение (4.126), так и выражение (4.127), что является еще одной особенностью предложенного подхода по сравнению с традиционным использованием метода частичных областей. Выше основное внимание было уделено изложению сути нового подхода и его обоснованию. Вместе с тем определенный интерес представляют также конкретные количественные данные о характере звукового поля в рассматриваемом сложном волноводе [46, 387]. Проанализируем частотные зависимости импеданса излучения  $Z_v$  источника. Такой анализ интересно проводить в сравнении с данными об импедансе излучения поршня, вмонтированного в акустически жесткий экран и излучающего в плоский волновод, высота которого  $2h$  больше высоты поршня  $2a$  (см. рис. 4.4).

Получение аналитического выражения, определяющего импеданс излучения  $Z_n$  такого волновода, является тривиальным. При этом получаем выражение

$$Z_n = \gamma + \frac{2\beta}{\pi^2\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\pi\gamma)}{n^2\sqrt{\beta^2 - (n/2)^2}}, \quad \beta = \frac{h}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{R_0 \sin \phi_0}{h}. \quad (4.133)$$

Чтобы результаты были сопоставимы, считаем, что поверхности источников в волноводах на рис. 4.3 и 4.4 являются одинаковыми, т. е. справедливо равенство  $R_1\phi_0 = a$ .

На рис. 4.5 приведены частотные зависимости компонент импеданса излучения источников звука, рассчитанных для значений параметров  $\phi_0 = \pi/4$ ,

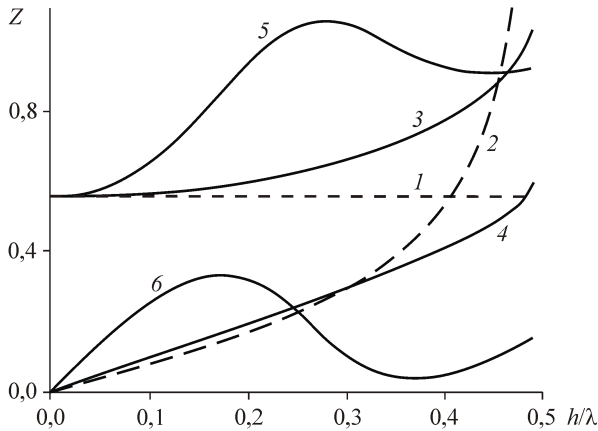


Рис. 4.5. Частотные зависимости импеданса излучения: 1 –  $\text{Re } Z_n$ ; 2 –  $\text{Im } Z_n$ ; 3 –  $\text{Re } Z_v$ ,  $\phi_0 = \pi/4$ ; 4 –  $\text{Im } Z_v$ ,  $\phi_0 = \pi/4$ ; 5 –  $\text{Re } Z_n$ ,  $\phi_0 = \pi/10$ ; 6 –  $\text{Im } Z_n$ ,  $\phi_0 = \pi/10$

$R_0/R_1 = 0,5$ ,  $R_1/h = \sqrt{2}$  и диапазона значений  $h/\lambda < 0,5$ , где величина  $\text{Re } Z_n = 0,0556$  (см. (4.133)). Величина  $\text{Im } Z_n$  определяется суммой в (4.133), причем когда  $h/\lambda \rightarrow \pi/4$ , то первое слагаемое суммы стремится к бесконечности, что и отражает поведение кривой 2 на рис. 4.5.

В принципе эти факты являются известными и приведены здесь для того, чтобы показать, что изменится, если источник звука “спрятать” в клиновидный рупор, который сочленен с плоским волноводом.

Как видим, при малых значениях  $h/\lambda$  импедансы  $Z_n$  и  $Z_v$  близки друг к другу. Более того, при  $h/\lambda \rightarrow 0$  имеем  $\text{Re } Z_n = \text{Re } Z_v$ . При увеличении  $h/\lambda$  величина  $\text{Re } Z_v$  возрастает и для  $h/\lambda \approx 0,48$  достигает единицы. В тоже время величина  $\text{Im } Z_v$  возрастает не так резко, как  $\text{Im } Z_n$ , и при  $h/\lambda \approx 0,48$  приближается лишь к 0,56.

Приведенные результаты наглядно показывают, что при прочих равных значениях параметров размещение источника в клиновидном рупоре увеличивает эффективность излучения звука в плоских волноводах, т. е., как и следовало ожидать, выполняет согласующую роль между источником и плоским волноводом. Естественно ожидать, что с уменьшением угла  $\phi_0$  (при сохранении величины  $R_0\phi_0$ ) эффект согласования источника с плоским волноводом должен повышаться. Результаты расчета  $Z_v$  для  $\phi_0 = \pi/10$  подтверждают это предположение (см. кривые 5 и 6 на рис. 4.5). Как видно,  $\text{Re } Z_v$  уже при  $h\lambda = 0,23$  достигает единицы и в дальнейшем осциллирует около этого значения. Величина  $\text{Im } Z_v$  также быстро возрастает и достигает своего максимального значения при  $h/\lambda = 1,7$ , после чего, осциллируя, асимптотически приближа-



ется к нулю. Как показывают расчеты, при дальнейшем уменьшении угла  $\phi_0$  величина  $\operatorname{Re} Z_v$  еще раньше достигает единицы, а  $\operatorname{Im} Z_v$  – своего экстремума.

Приведенный физический анализ может служить еще одним аргументом в пользу достоверности количественных результатов, полученных с помощью предложенного метода.

#### 4.7 Задача об излучении звука конечной цилиндрической оболочкой

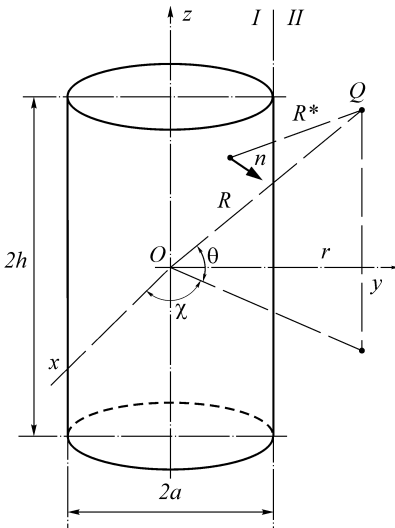


Рис. 4.6. Геометрия задачи о цилиндре

Исследование характеристик звукового поля, создаваемого колебанием конечного отрезка жесткой цилиндрической оболочки, является одной из интересных задач акустики, имеющей многочисленные приложения. Среди соответствующих исследований можно выделить как классические мемуары Гельмгольца [370] и Рэля [431] по теории органных труб, так и современный анализ водозаполненных пьезокерамических излучателей [372, 405]. В электродинамике родственная по постановке задача рассматривалась в статье [127]. Конечные размеры излучателя и наличие на нем кромок обуславливают определенные трудности при построении аналитического решения соответствующей граничной задачи. В работе [290] граничная задача излучения звука конечной открытой трубой сведена

к интегральному уравнению Фредгольма второго рода на отрезке.

В данном параграфе используется иной аналитический подход к решению такой граничной задачи, учитывающий специфику условий на ребре излучателя. Проводится анализ энергетической эффективности излучения звука в широком диапазоне изменения частот и геометрических параметров оболочки.

Рассмотрим конечную жесткую цилиндрическую оболочку, определяемую цилиндрической системе координат  $(r, \chi, z)$  соотношениями  $r = a$ ,  $0 \leq \chi \leq 2\pi$ ,  $|z| \leq h$  (см. рис. 4.6). Считаем, что оболочка расположена в акустическом пространстве, характеризуемом плотностью  $\rho$  и скоростью звука  $c$ . Толщиной стенок оболочки по сравнению с длиной звуковой волны пренебрегаем и считаем, что оболочка совершает гармонические осесимметричные колебания, при которых наружная и внутренняя стенки колеблются синфазно, имея нормаль-

ную компоненту скорости  $v_0 f(z) e^{-i\omega t}$ . Задание на поверхности излучателя значений нормальной колебательной скорости, не зависящей от реакции среды, идеализирует реальные источники звука. Однако для выяснения основных особенностей звукового поля решение такой модельной задачи имеет определяющее значение.

Акустический потенциал  $\phi(r, z)$  (здесь и далее множитель  $e^{-i\omega t}$  опускаем) осесимметричного звукового поля удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + k^2 \phi = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (4.134)$$

и граничным условиям

$$-\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a+0} = -\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=a-0} = v_0 f(z), \quad |z| \leq h, \quad (4.135)$$

а также условию конечности акустической энергии в окрестности кромок  $r = a$ ,  $|z| = h$  и условию излучения на бесконечности. Амплитудные значения давления и вектора колебательной скорости выражаются через потенциал  $\phi$  соотношениями

$$p = -i\omega\rho\phi, \quad \vec{v} = -\nabla\phi.$$

Решение поставленной граничной задачи строим по методу частичных областей, разделяя цилиндрической поверхностью  $r = a$  акустическое пространство на две подобласти  $I$  и  $II$ . При этом в каждой из них представляем потенциал звукового поля в виде интеграла Фурье

$$\begin{aligned} \phi_1(r, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) J_0(qr) e^{i\alpha z} d\alpha, \quad r \leq a, \quad |z| < \infty, \\ \phi_2(r, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) H_0^{(1)}(qr) e^{i\alpha z} d\alpha, \quad r \geq a, \quad |z| < \infty, \end{aligned} \quad (4.136)$$

где

$$q = \sqrt{k^2 - \alpha^2}, \quad |\alpha| \leq k, \quad q = i\sqrt{\alpha^2 - k^2}, \quad |\alpha| > k.$$

Здесь  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$  – неизвестные комплекснозначные функции, а  $J_\nu(\cdot)$  и  $H_\nu^{(1)}(\cdot)$  – соответственно функции Бесселя и Ханкеля первого рода. Представление (4.136) позволяет удовлетворить уравнению (4.134) в каждой из частичных областей и условию излучения. Для определения функций  $A(\alpha)$  и  $B(\alpha)$  необходимо использовать условия непрерывности звукового поля по давлению  $\phi_1 = \phi_2$  и нормальной составляющей скорости  $\partial\phi_1/\partial r = \partial\phi_2/\partial r$  на границе частичных областей  $r = a$ ,  $|z| > h$ , а также граничное условие (4.135). Так как внутренняя и внешняя стенки оболочки по условию колеблются синфазно, то равенство нормальных составляющих скоростей имеет место на всей поверхности  $r = a$ . В силу свойств интеграла Фурье это обуславливает связь между

функциями  $A(\alpha)$  и  $B(\alpha)$ :

$$A(\alpha) = [H_1^{(1)}(qa)/J_1(qa)] B(\alpha). \quad (4.137)$$

Условие непрерывности давления с учетом равенства (4.137) и тождества

$$J_1(qa)H_0^{(1)}(qa) - J_0(qa)H_1^{(1)}(qa) = \frac{2i}{\pi qa},$$

а также граничное условие (4.135) приводят к парному интегральному уравнению относительно функции  $B(\alpha)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\alpha)}{qaJ_1(qa)} e^{i\alpha z} dz = 0, \quad |z| > h, \quad (4.138)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(\alpha) q H_1^{(1)}(qa) e^{i\alpha z} dz = v_0 f(z), \quad |z| < h. \quad (4.139)$$

Выразим  $B(\alpha)$  через новую неизвестную функцию  $\psi(z)$  по формуле

$$B(\alpha) = \frac{qaJ_1(qa)}{4\alpha} \int_{-h}^h \psi(\zeta) e^{-i\alpha\zeta} d\zeta \quad (4.140)$$

с условием

$$\int_{-h}^h \psi(\zeta) d\zeta = 0. \quad (4.141)$$

Замена (4.140) позволяет тождественно удовлетворить уравнению (4.138). Используя представление (4.136), можно показать, что справедливо равенство

$$\frac{\partial \phi_1(a, z)}{\partial z} - \frac{\partial \phi_2(a, z)}{\partial z} = \psi(z), \quad (4.142)$$

т. е. функция  $\psi(z)$  определяет скачок касательной составляющей скорости частиц среды на внешней и внутренней стенках излучателя. Интегрируя по  $z \in (-h, h)$  соотношение (4.142), находим, что интегральное условие (4.141) выражает условие непрерывности давления на кромке  $r = a$ ,  $|z| = h$ . Подстановка (4.140) в (4.139) и учет асимптотики

$$\frac{q^2 a J_1(qa) H_1^{(1)}(qa)}{4\alpha} = \pm \frac{i}{4\pi} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right), \quad \alpha \rightarrow \pm\infty,$$

после перемены порядков интегрирования позволяют получить для неизвестной функции  $\psi(z)$  интегральное уравнение

$$\int_{-h}^h \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{-h}^h K(\zeta, z) \psi(\zeta) d\zeta = 2\pi v_0 f(z), \quad |z| < h, \quad (4.143)$$

где регулярное ядро  $K(\zeta, z)$  имеет вид

$$K(\zeta, z) = \frac{\pi i}{2} \int_0^\infty \left[ \frac{q^2 a J_1(qa) H_1^{(1)}(qa)}{\alpha} - \frac{i}{\pi} \right] \sin \alpha(z - \zeta) d\alpha$$

и в дальнейшем находится численным интегрированием с заданной точностью. Уравнение (4.143) относится к полным сингулярным интегральным уравнениям типа Коши на конечном отрезке. Согласно общей теории таких уравнений, для удовлетворения условия конечности энергии в окрестности кромок  $r = a$ ,  $|z| = h$  решение интегрального уравнения (4.143) следует искать в виде

$$\psi(\zeta) = \frac{\gamma(\zeta)}{\sqrt{h^2 - \zeta^2}}, \quad (4.144)$$

где функция  $\gamma(\zeta)$  удовлетворяет условию Гельдера на отрезке  $|\zeta| \leq h$ . В этом классе функций уравнение (4.143) имеет индекс  $\kappa = 1$  (см. [49]), при этом условие (4.141) позволяет выделить единственное решение уравнения (4.143). При численном интегрировании уравнения (4.143) применялся метод дискретных особенностей [23]. Соответствующая система линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующая интегральное уравнение (4.143), является недоопределенной и для ее замыкания следует использовать условие (4.141).

В дальнейшем, для простоты рассуждений, ограничимся случаем, когда  $f$  – четная функция. В этом случае функция  $\psi$  является нечетной, что дает возможность вдвое уменьшить порядок системы линейных алгебраических уравнений, а условие (4.141) заменить на более простое условие  $\psi(0) = 0$ . При количестве расчетных точек  $N = 2M + 1$  система линейных алгебраических уравнений для численного решения интегрального уравнения (4.143) по неравномерной сетке имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{N} \sum_{j=1}^M \gamma(\zeta_j) \frac{2\zeta_j}{\zeta_j^2 - z_l^2} + \frac{\pi}{N} \sum_{j=1}^M \gamma(\zeta_j) [K(\zeta_j, z_l) - K(-\zeta_j, z_l)] = \\ = 2\pi v_0 f(z_l), \quad l = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (4.145)$$

где  $\zeta_j = h \cos[\pi(2j - 1)/(2N)]$  и  $z_l = h \cos(l\pi/N)$ . После решения системы (4.145) – нахождения величин  $\gamma(\zeta_j)$ , функцию  $\gamma$  удобно представить интерполяционным многочленом по полиномам Чебышева первого рода:

$$\gamma(\zeta) = v_0 h \sum_{m=1}^M C_m T_{2m-1} \left( \frac{\zeta}{h} \right), \quad C_m = \frac{4}{v_0 h N} \sum_{j=1}^M \gamma(\zeta_j) T_{2m-1} \left( \frac{\zeta_j}{h} \right). \quad (4.146)$$

На основании выражения (4.146) можно получить формулы для функции  $\psi$  и, следовательно, для  $B(\alpha)$ , посредством которых определяются физические характеристики звукового поля. Так, выражение для нормальной составляющей

скорости на поверхности цилиндра  $r = a$ ,  $|z| < \infty$ , которое при  $|z| \leq h$  следует использовать для проверки точности выполнения граничных условий задачи, имеет вид

$$\frac{v_r(a, z)}{v_0} = \frac{\pi i h}{2a} \sum_{m=1}^m (-1)^m C_m \int_0^\infty \left[ \frac{q^2 a^2}{\alpha} J_1(qa) H_1^{(1)}(qa) - \frac{ia}{\pi} \right] J_{2m-1}(\alpha h) \cos(\alpha) d\alpha - \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M (-1)^m C_m \frac{h \cos[(2m-1) \arcsin(|z|/h)]}{2}, & |z| \leq h, \\ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \frac{h}{\sqrt{z^2 - h^2}} \left( \frac{h}{|z| + \sqrt{z^2 - h^2}} \right)^{2m-1}, & |z| > h. \end{cases}$$

Анализ данного выражения показывает, что при подходе к кромке со стороны акустической среды распределение колебательной скорости имеет особенность порядка  $(z^2 - h^2)^{-1/2}$ . Это полностью согласуется с требованием конечности акустической энергии в окрестности кромок оболочки.

Порядок  $M$  системы алгебраических уравнений (4.145) зависит от безразмерного волнового числа  $ka$ , отношения  $h/a$  и требуемой точности в удовлетворении граничных условий задачи. Анализ численных результатов при  $f(z) \equiv 1$  в диапазоне  $0, 1 \leq ka \leq 5$  и  $0, 1 \leq h/a \leq 5$  показал, что в системе (4.145) достаточно взять 5 – 10 уравнений для того, чтобы относительная погрешность в удовлетворении граничного условия (4.135) не превышала 1% по всей длине оболочки, включая кромки. Таким образом, рассмотренный метод решения задачи обеспечивает надежное определение характеристик ближнего акустического поля при сравнительно небольшом объеме вычислений.

Определение характеристик дальнего поля можно осуществить на основании формулы Кирхгофа. С учетом геометрии излучателя, осесимметричности задачи и условия равенства нормальной колебательной скорости на внутренней и внешней поверхностях оболочки эта формула дает представление для потенциала  $\phi = \tilde{\phi}(R, \theta)$  в сферических координатах  $(R, \theta)$  (см. рис. 4.6):

$$\tilde{\phi}(R, \theta) = \frac{a}{2\pi} \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} [\phi_2(a, z) - \phi_1(a, z)] \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{ikR^*}}{R^*} \right) d\chi dz,$$

где

$$R^{*2} = (a \cos \chi - R \cos \theta)^2 + (a \sin \chi)^2 + (z - R \sin \theta)^2.$$

Тогда для значения потенциала в дальнем поле, т. е. когда  $R \rightarrow \infty$ , получаем выражение

$$\tilde{\phi}(R, \theta) \approx -\frac{ka \cos \theta J_1(ka \cos \theta) e^{ikR}}{2R} \int_{-h}^h [\phi_2(a, z) - \phi_1(a, z)] e^{ikz \sin \theta} dz.$$

Учитывая интегральные представления (4.136), соотношения (4.137), (4.140) и применяя теорему о вычетах, можно привести выражение для потенциала в дальнем поле к виду

$$\tilde{\phi}_D(R, \theta) = -ka \cot \theta J_1(ka \cos \theta) \frac{e^{ikR}}{2kR} \int_{-h}^h \psi(\zeta) e^{ik\zeta \sin \theta} d\zeta. \quad (4.147)$$

В итоге расчетная формула для давления в дальнем поле имеет вид

$$P_D(R, \theta) = \rho c v_0 \frac{\pi i k^2 h a}{2} \cos \theta J_1(ka \cos \theta) \frac{e^{ikR}}{kR} \times \\ \times \sum_{m=1}^M (-1)^{m+1} C_m \frac{J_{2m-1}(kh \sin \theta)}{\sin \theta} \quad (4.148)$$

и показывает сложный характер излучения оболочки. Отметим, что при  $h \rightarrow 0$  угловое распределение поля полностью характеризуется величиной  $\cos \theta J_1(ka \cos \theta)$ . Важно подчеркнуть, что  $P_D(R, \pi/2) = 0$  в этом порядке приближения по  $R \rightarrow \infty$  независимо от частоты и геометрических размеров излучателя. Это свойство дальнего поля вдоль оси  $z$  можно качественно объяснить тем обстоятельством, что каждый участок стенки оболочки колеблется как одно целое, в результате чего на внешней и внутренней поверхностях излучателя создается звуковое давление противоположных знаков.

Важной характеристикой звукового поля излучателя является средняя за период мощность  $W$ , передаваемая излучателем акустической среде. Эту мощность можно вычислить двояко, либо рассматривая работу стенок оболочки, затрачиваемую против внешнего и внутреннего давления, либо вычисляя поток энергии в дальнем поле через замкнутую сферическую поверхность радиуса  $R \rightarrow \infty$ . Оба подхода в силу закона сохранения энергии должны приводить к одинаковому результату, что может служить дополнительным критерием оценки точности численного решения. В первом случае имеем  $W = W_1 + W_2$ :

$$W_j = (-1)^j \pi a \rho c v_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(z) \operatorname{Im} \phi_j(a, z) dz, \quad j = 1, 2,$$

где  $W_1, W_2$  – мощности излучателя соответствующие внутренней и внешней стенок излучателя. Используя соотношения (4.136), (4.137) и (4.146), получаем следующую расчетную формулу для мощности излучателя:

$$W = \pi \rho c v_0^2 k h a \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \operatorname{Im}(C_m) \times \\ \times \int_{-\pi}^{\pi} f(z) \frac{\cos[(2m-1) \arcsin(z/h)]}{2m-1} dz. \quad (4.149)$$

В случае равномерного распределения скорости  $f(z) \equiv 1$  значения интегралов под знаком суммы в представлении (4.149) при  $m \geq 2$  равны нулю. Следовательно, мощность излучения в этом случае полностью определяется коэффициентом  $C_1$ :

$$W = \pi^2 \rho c v_0^2 k h^2 a \operatorname{Im} C_1.$$

Через характеристики дальнего поля мощность излучения определяется следующим образом:

$$W = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} I(R, \theta) R^2 \cos \theta d\theta; \quad I(R, \theta) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\bar{p} V_R)_d.$$

Черта означает комплексное сопряжение. Используя выражение (4.148) и соотношение  $V_{R,d} = -\partial\phi_d/\partial R$ , получаем

$$W = \rho c v_0^2 \frac{\pi^2 k^2 h^2 a^2}{9} \times \\ \times \int_0^{\pi/2} \cot^2 \theta J_1(ka \cos \theta) \left| \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m C_m J_{2m-1}(kh \sin \theta) \right|^2 \cos \theta d\theta.$$

Результаты расчетов показывают, что в рассмотренном диапазоне изменения величин  $ka$  и  $h/a$  оба подхода дают числовые значения, различающиеся лишь в шестом знаке.

Перейдем к анализу конкретных результатов, полученных для равномерного распределения колебательной скорости  $f(z) \equiv 1$ . На представленных на рис. 4.7 зависимостях модуля давления в центре оболочки с отношением  $h/a \geq 1$  обращает на себя внимание характерное резонансное поведение вблизи некоторых значений  $ka$ . Эти значения соответствуют частотам продольного резонанса внутреннего объема трубы с открытыми концами. Учитывая поправку Рэлея на открытые концы – увеличение эффективной длины трубы на величину  $1,22a$ , первый продольный резонанс определяется соотношением

$$(ka)_{\text{прод}}^{(1)} = \frac{\pi a}{2h + 1,22a}.$$

На рис. 4.7 эти значения  $ka$  отмечены на оси абсцисс. Видно, что поправка Рэлея при  $h/a \geq 1$  обеспечивает несколько заниженное, но вместе с тем надежное (погрешность менее 5 %) определение резонансных частот внутреннего объема среды. Для более длинных труб первый продольный резонанс является весьма добротным – влияние внешней акустической среды на резонансной частоте незначительно.

На рис. 4.8,а приведена частотная зависимость нормированных к длине  $2h$  безразмерных (отнесенных к  $\rho c v_0^2 a$ ) значений мощности излучения внутренней и внешней стенок излучателя при  $h/a = 1$  и пульсирующего цилиндра бесконечной длины. Видно, что на частоте  $ka \leq 0,6$  ниже первого продольного

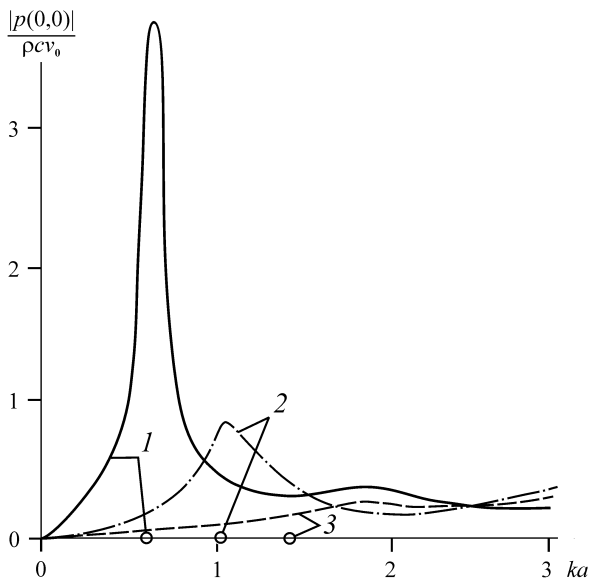


Рис. 4.7. Результаты для задачи о цилиндре (поправка Рэлея)

резонанса излучение в среду полностью определяется только внутренней стенкой оболочки. В частотном диапазоне  $0,6 \leq ka \leq 1,05$  излучаемая энергия внутренней поверхности оболочки преобразуется в кинетическую энергию колебаний присоединенной массы жидкости на внешней стенке (отрицательные значения  $W$ ). На частоте первого продольного резонанса мощность излучения внутренней поверхности резко возрастает, а поток акустической энергии через внешнюю стенку излучателя равен нулю. С ростом  $ka$  величина потока акустической мощности на единицу длины через внутреннюю стенку излучателя уменьшается, а через внешнюю – увеличивается и стремится к значению удельной мощности излучения пульсирующего цилиндра бесконечной длины.

Наряду с продольными резонансами внутренний объем трубы с открытыми концами обладает и последовательностью частот чисто радиального резонанса  $(ka)_{\text{рад}}^{(n)} = \mu_n$ ,  $J_1(\mu_n) = 0$ . На этих частотах поле внутри трубы не зависит от координаты  $z$  и определяется решением плоской осесимметричной задачи. Рассматривая выражение (4.148), видим, что на этих частотах (первая из которых  $(ka)^{(1)} = 3,832$ ) при  $\theta = 0$  давление в дальнем поле равно нулю независимо от высоты излучателя. Следовательно, в плоскости  $z = 0$  при  $h/a \rightarrow \infty$  на частоте радиального резонанса внутреннего объема жидкости не получаем картину, характерную для плоской внешней задачи о равномерно пульсирующем излучении бесконечного цилиндра. Невозможность такого предельного перехода объясняется не столько влиянием колебания концов оболочки на звуковое по-



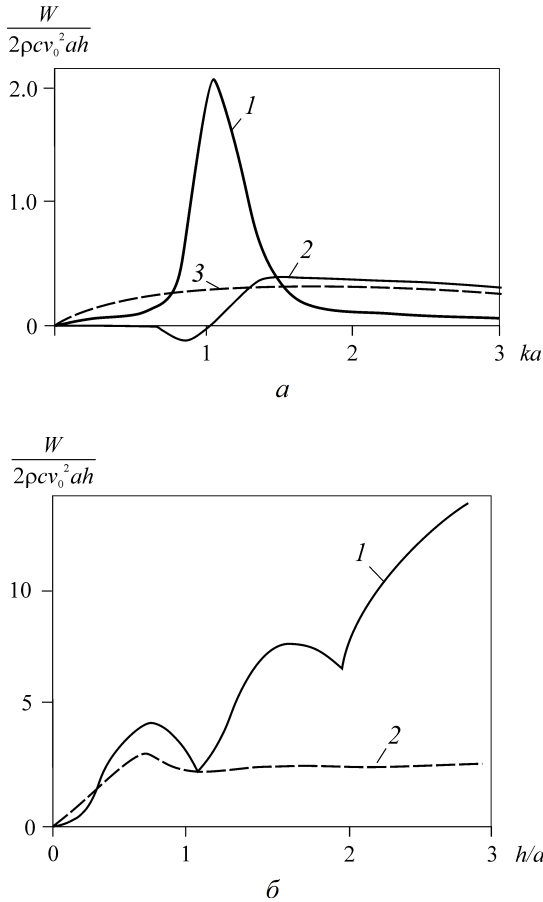


Рис. 4.8. Удельная мощность излучения цилиндра

ле в срединной плоскости, сколько наличием у нее “открытых” торцов, через которые происходит обмен энергией между внутренним объемом жидкости и внешней средой.

В силу закона сохранения энергии поток через сечение  $z = \pm h$ ,  $0 \leq r \leq a$  равен потоку энергии через внутреннюю стенку излучателя. Поэтому, чтобы оценить степень влияния внутреннего объема жидкости на формирование внешнего акустического поля, рассмотрим взаимодействие стенок излучателя по полю.

На рис. 4.8,б показана удельная мощность излучения внутренней поверхности и внешней поверхности излучателя на частоте первого радиального резонанса внутреннего объема жидкости в зависимости от значения отношения  $h/a$ . Видно, что при увеличении отношения  $h/a$  мощность излучения внутренней поверхности оболочки возрастает, в то время как удельная мощность излучения внешней поверхности стремится к удельной мощности излучения пульсирующего цилиндра бесконечной длины и волнового радиуса  $ka = 3,832$ . Такое неограниченное увеличение мощности, передаваемой внутренней стенкой оболочки акустической среде и уносимой через открытые торцы, имеет место только на радиальных резонансных частотах внутреннего объема.

## ГЛАВА 5

### МЕТОД СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В данной главе рассмотрены вопросы разложения по собственным функциям, возникающие при использовании метода собственных функций. На основании установленной в третьей главе связи между методами суперпозиции и собственных функций разработан новый подход к исследованию сходимости таких разложений. Получены новые утверждения, связанные с оценками коэффициентов разложений и оценками скорости сходимости рядов по собственным функциям. В данном контексте рассмотрены разложения по собственным функциям, связанные с задачей Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе, с задачей о деформировании упругой полуполосы и со смешанной задачей теории упругости для полуполосы. Отметим, что задача о справедливости разложения (3.114), связанном с бигармоническим уравнением, была поставлена в качестве одной из математических проблем теории пластин еще в работах [40, 196], а ее решение было дано в различных функциональных пространствах и различными методами в недавних работах [73, 297, 364] (см. также [45, 74, 298, 299]).

В случае расходимости рядов (соответствующие примеры имеются в [363, 365, 426]) приведены алгоритмы их регуляризации. При получении этих результатов определяющее значение имеют асимптотические формулы для коэффициентов спектральных разложений, установить которые позволяет найденная аналитическая связь между методами суперпозиции и собственных функций.

Использование метода собственных функций для граничных задач в областях с криволинейным участком границы приводит к вопросу о справедливости так называемой гипотезы Рэлея, содержание которой заключается в том, что ряды по однородным решениям сходятся вплоть до границы рассматриваемой области. Выполнение гипотезы Рэлея позволяет свести вопрос о построении разложения решения рассматриваемой граничной задачи по однородным решениям к вопросу о нахождении коэффициентов разложения граничных данных по соответствующему набору собственных функций. В этой связи в § 5.5, § 5.6 проведен анализ справедливости гипотезы Рэлея для бигармонической задачи и для задачи теории упругости в полуполосе с криволинейным торцом. Наряду с результатами общего характера на примере торца в виде синусоиды

показано, что возможности использования гипотезы Рэлея в задачах теории упругости вполне аналогичны соответствующим возможностям применительно к достаточно полно изученным различным граничным задачам акустики и электродинамики в областях с криволинейной границей [9].

Основные результаты данной главы опубликованы в работах [52, 54, 55, 60, 64, 66, 73].

### 5.1 Сходимость разложений по собственным функциям в бигармонической задаче для полуполосы

В данном параграфе изучается вопрос о возможности и характере сходимости двукратного разложения (3.114). Как отмечалось в § 3.3, этот вопрос тесно связан с построением решения по методу собственных функций граничной задачи Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе. В данном параграфе задача о разложении (3.114) исследуется на основании подхода, изложенного в § 3.3. При этом далее используем обозначения из § 3.1, § 3.2. На четные функции  $f, g$ , если не оговорено противное, налагаются условия (3.2), (3.3).

Основные соотношения для получения утверждения о справедливости разложения (3.114) выводим из выражения (3.120) и продифференцированного по  $x > 0$  этого же выражения. Тогда при  $x = 0$  получаем для произвольных значений  $m \geq m_0$  и  $y \in (-1, 1)$  равенства

$$\begin{aligned} & f_0 + \sum_{\alpha_n < R_m} f_n \cos(\alpha_n y) - \sum_{\lambda_k < R_m} a_k z_k(y) = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \Phi(\lambda, y) d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_{R_m}^{\infty} \Phi(s, y) ds - \frac{1}{2} \sum_{\alpha_n > R_m} \frac{(-1)^n}{\alpha_n^3} X_n \cos(\alpha_n y), \quad (5.1) \\ & \sum_{\alpha_n < R_m} g_n \cos(\alpha_n y) - \sum_{\lambda_k < R_m} a_k i \lambda_k z_k(y) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \lambda \Phi(\lambda, y) d\lambda. \end{aligned}$$

Напомним, что функция  $\Phi(\lambda, y)$  определяется выражением

$$\Phi(\lambda, y) = 2T(\lambda) \frac{U(\lambda, y)}{\Delta(\lambda)}, \quad T(\lambda) = T_0(\lambda) + T_1(\lambda),$$

где (см. (3.39), (3.26) и (3.4)-(3.6)) с учетом выражения [207, с. 731]

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda^2 - \alpha_n^2)}{(\lambda^2 + \alpha_n^2)^2} \cos(\alpha_n y) = \\ & = -\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\cosh \lambda \cosh \lambda y - y \sinh \lambda \sinh \lambda y}{2 \sinh^2 \lambda}, \quad |y| \leq 1, \end{aligned}$$

и условия (3.3), для функций  $T_0(\lambda)$  и  $T_1(\lambda)$  имеем равенства

$$\begin{aligned}
 T_0(\lambda) &= 2 \int_{-1}^1 f'(y) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n^2 \sin(\alpha_n y)}{(\lambda^2 + \alpha_n^2)^2} dy + \\
 &+ \frac{1}{2 \sinh^2 \lambda} \int_{-1}^1 g(y) (\cosh \lambda \cosh \lambda y - y \sinh \lambda \sinh \lambda y) dy, \quad (5.2) \\
 T_1(\lambda) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{(\lambda^2 + \alpha_n^2)^2} = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M(\gamma) \frac{(\gamma+1)}{\cos(\pi\gamma/2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^{-\gamma}}{(\lambda^2 + \alpha_n^2)^2} d\gamma, \quad \sigma \in (-2, -1 - 1/p).
 \end{aligned}$$

При этом, если функции  $f, g$  удовлетворяют условиям теоремы 4 из § 3.1 для значения  $k = 3$ , то с учетом наличия у функции  $M(\gamma)$  полюса первого порядка в точке  $\gamma = 0$  (см. (3.38) и (3.9)) получаем соотношение

$$\begin{aligned}
 T_1(\lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M(\gamma) \frac{(\gamma+1)}{\cos(\pi\gamma/2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^{-\gamma}}{(\lambda^2 + \alpha_n^2)^2} d\gamma + \\
 &+ \frac{a}{2\lambda^3} \left( \frac{\Delta(\lambda)}{2 \sinh^2 \lambda} - \frac{1}{\lambda} \right), \quad a = \text{Res}_{\gamma=0} M(\gamma), \quad \sigma \in (0, 1 - 1/p). \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

Для  $\epsilon > 0$  положим секторы комплексной плоскости:

$$S_\epsilon = \{\lambda : |\text{Im } \lambda| < \epsilon \text{Re } \lambda\}, \quad \widehat{S}_\epsilon = \{\lambda : \text{Im } \lambda > \epsilon |\text{Re } \lambda|\}.$$

**Лемма 1.** При  $\lambda \in \widehat{S}_\epsilon$  справедливы равенства

$$\begin{aligned}
 T_0(\lambda) &= \frac{1}{2 \sinh^2 \lambda} \times \\
 &\times \left\{ i \int_{-1}^1 f'(y) ((\cosh \lambda - \lambda^{-1} \sinh \lambda) \sinh \lambda y - y \sinh \lambda \cosh \lambda y) dy + \right. \\
 &+ \left. \int_{-1}^1 g(y) (\cosh \lambda \cosh \lambda y - y \sinh \lambda \sinh \lambda y) dy \right\} dy + \\
 &+ \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f'(y) \int_0^\infty \frac{s^2 \sinh sy}{(s^2 - \lambda^2)^2 \sinh s} ds dy, \\
 T_1(\lambda) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} M(\gamma) \frac{(\gamma+1)}{\cos(\pi\gamma/2)} \left\{ \frac{\sin(\pi\gamma/2)}{\pi} \int_0^\infty \frac{s^{-\gamma} (\coth s - 1)}{(s^2 - \lambda^2)^2} ds + \right. \\
 &+ \left. \frac{\exp(i\pi\gamma/2) \lambda^{-\gamma}}{4\lambda^3} \left( (\gamma+1) \coth \lambda + \frac{\lambda}{\sinh^2 \lambda} - i(\gamma+1) \tan(\pi\gamma/2) \right) \right\} d\gamma,
 \end{aligned}$$

где параметр  $\sigma \in (-2, -1 - 1/p)$ .

*Доказательство.* Утверждения леммы вытекают, после простых выкладок, из (5.2) и равенств

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n^2 \sin(\alpha_n y)}{(\lambda^2 + \alpha_n^2)^2} = \\ & = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\mu^2 \sin(\mu y)}{(\lambda^2 + \mu^2)^2 \sin \mu} d\mu - \operatorname{Res}_{\mu=-i\lambda} \frac{\mu^2 \sin(\mu y)}{(\lambda^2 + \mu^2)^2 \sin \mu}, \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^{-\gamma}}{(\lambda^2 + \alpha_n^2)^2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\mu^{-\gamma}}{(\lambda^2 + \mu^2)^2 \sin \mu} d\mu - \operatorname{Res}_{\mu=-i\lambda} \frac{\mu^{-\gamma}}{(\lambda^2 + \mu^2)^2}, \end{aligned}$$

справедливых на основании теоремы Коши при  $\lambda \in \widehat{S}_\epsilon$  и  $\operatorname{Re} \gamma \in (-2, 0)$ .

По функции  $l(y) \in L_1[-1, 1]$  определим мероморфную функцию

$$H(l)(\lambda) = \frac{1}{2 \sinh^2 \lambda} \int_{-1}^1 l(y) \exp(\lambda y) (\cosh \lambda - y \sinh \lambda) dy. \quad (5.4)$$

Пусть функция  $l(y) \in L_p[-1, 1]$ ,  $1 < p < \infty$ , тогда, считая  $l(y)$  продолженной нулем вне отрезка  $[-1, 1]$ , введем в рассмотрение интегральный модуль непрерывности

$$\omega_p(\delta, l) = \left\{ \sup_{|h| < \delta} \int_{-1}^1 |l(y+h) - l(y)|^p dy \right\}^{1/p}, \quad \delta > 0. \quad (5.5)$$

Тогда [10, с. 177] имеем предельное соотношение

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_p(\delta, l) = 0.$$

Справедливо следующее утверждение [75]: найдется такая постоянная  $c > 0$ , что при всех  $\lambda$  с  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$  верна оценка

$$\left| \int_{-1}^1 \exp[-\lambda(1 \pm y)] l(y) dt \right| \leq c \omega_p(|\lambda|^{-1}, l), \quad \forall \lambda \in L_p.$$

Отсюда, в частности, для функционала  $H(l)(\lambda)$ , определенного выражением (5.4), получаем оценку

$$|H(l)(\lambda)| \leq c \omega_p(|\lambda|^{-1}, l), \quad \lambda \in \Gamma_m, \quad \lambda \in L_p. \quad (5.6)$$

Из (5.3) и леммы 1 выводится следующее утверждение.

**Следствие 1.** Пусть выполнены условия теоремы 4 из § 3.1 для значением  $k$  вместе с условием (3.3). Тогда для для соответствующей функции  $T(\lambda)$  справедливы оценки

$$\left| T(\lambda) - \lambda H(i f^{(3)}(y) + g^{(2)}(y))(\lambda) \right| \leq c N_p^3(f, g) \frac{|\lambda| + \exp(2|\operatorname{Re} \lambda|)}{|\lambda|^3 |\sinh^2 \lambda|}, \quad \lambda \in \widehat{S}_\epsilon,$$

$$|T(\lambda)| \leq cN_p^3(f, g)|\lambda|^{-3}, \quad \pm\lambda \in S_\epsilon.$$

Как уже отмечалось, в условиях следствия 1 функция  $M(\gamma)$  является мероморфной в полосе  $\operatorname{Re} \gamma \in (-2, 1 - 1/p)$  функцией с простым полюсом в точке  $\gamma = 0$ . Поэтому (см. (3.39)) для последовательности  $X_n$  справедливо асимптотическое представление

$$X_n = a + O(n^{-\sigma}), \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \sigma \in (0, 1/p'), \quad (5.7)$$

и, в частности, выполняется оценка

$$|X_n| \leq cN_p^3(f, g), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.8)$$

Справедлива следующая теорема о сходимости разложения (3.114).

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия теоремы 4 из § 3.1 для значения  $k = 3$ . Тогда пара функций  $f(y)$ ,  $g(y)$  допускает разложение (3.114), сходящееся в пространстве  $C^1[-1, 1] \oplus C[-1, 1]$ . При этом для последовательности вектор-функций

$$V_m(y) = \left\{ f(y) - \sum_{|\lambda_k| < R_m} a_k z_k(y), g(y) - \sum_{|\lambda_k| < R_m} a_k i \lambda_k z_k(y) \right\} \quad (5.9)$$

справедливы оценки

$$\|V_m(y)\|_{C^1 \oplus C} \leq c \left( \omega_p(m^{-1}, f^{(3)}) + \omega_p(m^{-1}, g^{(2)}) \right), \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

с постоянной  $c > 0$ , не зависящей от  $m$  и  $f, g$ .

*Доказательство.* Не уменьшая общности, можно считать, что интеграл от функции  $g(y)$  по отрезку  $[-1, 1]$  равен нулю. Действительно, если это не так, то тогда вместо  $\{f, g\}$  можно, например, рассмотреть пару функций

$$\begin{pmatrix} \widehat{f}(y) \\ \widehat{g}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y) \\ g(y) \end{pmatrix} - \widehat{a}_1 \begin{pmatrix} z_1(y) \\ i \lambda_1 z_1(y) \end{pmatrix},$$

где коэффициент

$$\widehat{a}_1 = (4i \sinh^2 \lambda_1)^{-1} a_0, \quad a_0 := \int_{-1}^1 g(y) dy.$$

Тогда

$$\int_{-1}^1 z_1(y) dy = 4\lambda_1^{-1} \sinh^2 \lambda_1, \quad \int_{-1}^1 \widehat{g}(y) dy = \int_{-1}^1 g(y) dy - \widehat{a}_1 \int_{-1}^1 z_1(y) dy = 0,$$

и выполняется оценка  $|\widehat{a}_1| \leq cN_p^1(f, g)$ . Таким образом, можно считать, что для  $f(y), g(y)$  справедливы соотношения (5.1). При этом, для доказательства теоремы достаточно установить справедливость оценки (5.10). Из условий, наложенных на функции  $f, g$ , и (5.8) имеем оценки

$$\sum_{\alpha_n > R_m} (n|f_n| + |g_n| + n^{-2}|X_n|) \leq \frac{c}{m} N_p^3(f, g), \quad m = 1, 2, \dots$$

Тогда из следствия 1, равенств (5.1) и оценок (3.41) для функций  $U(\lambda, y), U'_y(\lambda, y)$ , получаем оценки

$$\begin{aligned} & \|V_m(y)\|_{C^1 \oplus C} \leq \frac{c}{m} N_p^3(f, g) + \\ & + c \sup_{|y| \leq 1} \left\{ \frac{(1 + R_m(1 - |y|))}{R_m} \int_{\Gamma_m} |H(if^{(3)} + g^{(2)})(\lambda)| \frac{\exp[|\operatorname{Re} \lambda|(1 + |y|)]}{|\Delta(\lambda)|} |d\lambda| + \right. \\ & + N_p^3(f, g) \frac{(1 + R_m(1 - |y|))}{R_m^2} \int_{\Gamma_m} \frac{[|\lambda| + \exp(2\operatorname{Re} \lambda)]}{|\sinh^2 \lambda \Delta(\lambda)|} \exp[|\operatorname{Re} \lambda|(1 + |y|)] |d\lambda| + \\ & \left. + N_p^3(f, g) \int_{R_m}^{\infty} s^{-2}(1 + s(1 - |y|)) \frac{\exp[s(1 + |y|)]}{\Delta(s)} ds \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая здесь оценки (3.117) и (5.6), выводим оценку

$$\begin{aligned} & \|V_m(y)\|_{C^1 \oplus C} \leq \frac{c}{m} N_p^3(f, g) + \\ & + c \left\{ \omega_p(R_m^{-1}, f^{(3)}) + \omega_p(R_m^{-1}, g^{(2)}) + R_m^{-1} N_p^3(f, g) \right\} \times \\ & \times \left\| \frac{1 + R_m(1 - |y|)}{R_m} \int_{\Gamma_m} \exp[-|\operatorname{Re} \lambda|(1 - |y|)] |d\lambda| \right\|_C + \\ & + c N_p^3(f, g) \left\| \int_{R_m}^{\infty} s^{-2}[1 + s(1 - |y|)] \exp[-s(1 - |y|)] ds \right\|_C \leq \\ & \leq c \left\{ \omega_p(R_m^{-1}, f^{(3)}) + \omega_p(R_m^{-1}, g^{(2)}) + R_m^{-1} N_p^3(f, g) \right\}, \end{aligned}$$

откуда с учетом неравенства

$$\begin{aligned} R_m^{-1} N_p^3(f, g) & \leq c(\omega_p(R_m^{-1}, f^{(3)}) + \omega_p(R_m^{-1}, g^{(2)})) \leq \\ & \leq c_1(\omega_p(m^{-1}, f^{(3)}) + \omega_p(m^{-1}, g^{(2)})) \end{aligned}$$

получаем утверждение (5.9). Теорема доказана.

Положим, в соответствии с (5.7), последовательность

$$X_{0,n} = X_n - a = O(n^{-\sigma}), \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \sigma \in (0, 1/p').$$



Отметим значения интегралов

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \frac{U(\lambda, y)}{\lambda^3 \sinh^2 \lambda} d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_{R_m}^{\infty} \frac{U(s, y)}{s^3 \sinh^2 s} ds = \sum_{\alpha_n > R_m} (-1)^n \alpha_n^{-3} \cos(\alpha_n y),$$

$$\int_{\Gamma_m} \frac{U(\lambda, y)}{\lambda^2 \sinh^2 \lambda} d\lambda = 0, \quad |y| < 1. \quad (5.11)$$

Тогда в условиях теоремы 1 с учетом (5.11) и (3.9) (см., в частности, равенство (5.3)), соотношения (5.1) можно записать в виде

$$f_0 + \sum_{\alpha_n < R_m} f_n \cos(\alpha_n y) - \sum_{\lambda_k < R_m} a_k z_k(y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \widehat{\Phi}(\lambda, y) d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_{R_m}^{\infty} \widehat{\Phi}(s, y) ds -$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha_n > R_m} \frac{(-1)^n}{\alpha_n^3} X_{0,n} \cos(\alpha_n y), \quad (5.12)$$

$$\sum_{\alpha_n < R_m} g_n \cos(\alpha_n y) - \sum_{\lambda_k < R_m} a_k i \lambda_k z_k(y) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \lambda \widehat{\Phi}(\lambda, y) d\lambda,$$

$$f_0 + \sum_{\alpha_n < R_m} f_n \cos(\alpha_n y) - \sum_{\lambda_k < R_m} a_k z_k(y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \widehat{\Phi}(\lambda, y) d\lambda + \frac{1}{\pi} \int_{R_m}^{\infty} \widehat{\Phi}(s, y) ds -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{\alpha_n > R_m} \frac{(-1)^n}{\alpha_n^3} X_{0,n} \cos(\alpha_n y), \quad (5.13)$$

$$\sum_{\alpha_n < R_m} g_n \cos(\alpha_n y) - \sum_{\lambda_k < R_m} a_k i \lambda_k z_k(y) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \lambda \widehat{\Phi}(\lambda, y) d\lambda,$$

где

$$\widehat{\Phi}(\lambda, y) = 2\widehat{T}(\lambda) \frac{U(\lambda, y)}{\Delta(\lambda)}, \quad \widehat{T}(\lambda) = -\frac{a}{2\lambda^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_{0,n}}{(\lambda^2 + \alpha_n^2)^2} + T_0(\lambda).$$

Использование (5.13) вместо (5.1), вместе с оценкой

$$|\Delta(\lambda)| \geq c|\lambda|^\delta \exp[2|\operatorname{Re} \lambda|(1 - \delta)], \quad \lambda \in \Gamma_m,$$

$$m \geq m_0, \quad \delta \in (0, 1),$$

вытекающей из (3.117), можно получить уточнение оценки (5.9). А именно, справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.** В условиях теоремы 1 справедливы оценки

$$\|V_m(y)\|_{W_r^1 \oplus L_r} \leq c (\ln m)^{-1/r} [\omega_p(m^{-1}, f^{(3)}) + \omega_p(m^{-1}, g^{(2)})], \quad m \geq 2, \quad r \geq 1.$$

На этом же пути устанавливается следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть функции  $f, g$  удовлетворяют условиям

$$f \in W_p^4, \quad g \in W_p^3, \quad 1 < p < \infty, \quad f^{(k)}(\pm 1) = g^{(k)}(\pm 1) = 0, \quad k = 0, 1.$$

Тогда пара функций  $f, g$  допускает разложение (3.114), сходящееся в пространстве  $C^2[-1, 1] \oplus C^1[-1, 1]$ , причем при  $m \geq 2, 1 \leq r \leq \infty$  справедливы оценки

$$\|V_m(y)\|_{W_r^l \oplus W_r^{l-1}} \leq cm^{l-2} (\ln m)^{-1/r} \left\{ \omega_p(m^{-1}, f^{(4)}) + \omega_p(m^{-1}, g^{(3)}) \right\}, \quad l = 1, 2,$$

характеризующие скорость сходимости двукратного разложения.

Отметим, что использование теоремы 1 из § 3.3 и теоремы 2 из § 3.1 и следствия 2 из § 3.1 вместе с оценкой (2.19) для корней  $\lambda_k$  и леммой 1 дает возможность в условиях теоремы 2 получить оценку коэффициентов разложения (3.114):

$$|a_k| \leq c N_p^4(f, g) (\ln k)^{-1/p'} k^{-4}, \quad k \geq 2. \quad (5.14)$$

Кроме того, так как верно неравенство (см. [362])

$$\|z_k(y)\|_{C^1} + \|\lambda_k z_k(y)\|_C \leq c (\ln k)^{-1} k^3, \quad k \geq 2,$$

то оценка (5.14) показывает, что разложение (3.114) в условиях теоремы 2 абсолютно сходится в пространстве  $C^1[-1, 1] \oplus C[-1, 1]$ . Это утверждение и оценка (5.14) были анонсированы в работе [73] (см. также близкий результат в [364]).

Отметим, что рассуждения п. 7 из § 3.1 позволяют сформулировать условия на функции  $f, g$ , при выполнении которых коэффициенты  $a_k$  разложений (3.112) и (3.114) определяются явным образом, на основании утверждения теоремы 1 из § 3.3.

## 5.2 Расходимость рядов по собственным функциям

В этом параграфе, в дополнение к результатам § 5.1 о разложении (3.114), рассматривается случай, когда функции  $f, g$  не удовлетворяют условиям гладкости из теоремы 1 предыдущего параграфа. Пусть, для простоты, функция  $f(y) \equiv 0$ , а четная функция  $g$  принадлежит пространству  $W_p^1$  для некоторого значения  $p \in (1, \infty)$ :

$$f(y) \equiv 0, \quad g \in W_p^1, \quad g(\pm 1) = 0, \quad g(y) = g(-y). \quad (5.15)$$

Тогда, согласно теоремам 3.1.4 и 3.3.1 справедливо разложение (3.114) в смысле средних Абеля первого порядка:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ g(y) \end{pmatrix} = W_p^2 \oplus W_p^1 - \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=0} a_k \begin{pmatrix} z_k(y) \\ i\lambda_k z(y) \end{pmatrix} \exp(i\lambda_k x). \quad (5.16)$$

При этом на основании (3.22), теоремы 2 из § 3.1 и леммы 1 из § 5.1 для коэффициентов  $a_k$  получаем асимптотическое соотношение

$$a_k = \frac{i}{2\lambda_k^2} \int_{-1}^1 g(y) (\cosh \lambda_k \cosh \lambda_k y - y \sinh \lambda_k \sinh \lambda_k y) dy + O(k^{-4\sigma}), \quad k \rightarrow \infty, \quad \forall \sigma \in (-1, -1/p). \quad (5.17)$$

Далее множество корней  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  функции  $\Delta(\lambda)$  целесообразно разбить на два непересекающихся подмножества  $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^{\infty}$  и  $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^{\infty}$ , так что  $\lambda_k^- = -\lambda_k^+$  и [111]

$$\lambda_k^+ = \frac{1}{2} \ln 4\pi k + i\pi(k + k_0 + 3/4) + O(k^{-1} \ln k), \quad k \rightarrow \infty, \quad (5.18)$$

где  $k_0$  – некоторое целое число. Не уменьшая общности, можно положить  $k_0 = 0$ . Тогда, вводя в рассмотрение функции

$$z_k^{\pm}(y) = U(\lambda_k^{\pm}, y), \quad k = 1, 2, \dots,$$

получаем, что в случае вещественной функции  $g(y)$  для того, чтобы установить расходимость нерегуляризованного разложения (3.114) для пары  $f, g$  с условиями (5.15), достаточно показать, что разложение

$$g(y) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \{a_k^+ i \lambda_k^+ z_k^+(y)\}, \quad |y| < 1 \quad (5.19)$$

не является справедливым (в том или ином функциональном пространстве), где коэффициенты  $a_k^+$  определяются согласно (3.115) и допускают соотношение (5.17) с заменой  $\lambda_k$  на  $\lambda_k^+$ .

На основании (5.18) нетрудно получить равномерные по  $y \in [0, 1 - \epsilon]$ ,  $\epsilon \in (0, 1)$  асимптотики

$$\sinh \lambda_k^+ = \frac{1}{2} (4\pi k)^{y/2} \exp [i\pi(k + 3/4)y] (1 + O(k^{-y})),$$

$$\cosh \lambda_k^+ = \frac{1}{2} (4\pi k)^{y/2} \exp [i\pi(k + 3/4)y] (1 + O(k^{-y})), \quad k \rightarrow \infty, \quad (5.20)$$

откуда, в частности, имеем соотношение

$$z_k^+(y) = i\pi (4\pi)^{(1+|y|)/2} \exp [i\pi(k + 3/4)(1 + y)] (1 - y) k^{(3+y)/2} (1 + O(k^{-y})),$$

$$k \rightarrow \infty, \quad y \in [0, 1 - \epsilon]. \quad (5.21)$$

Рассмотрим функцию

$$g(y) = \begin{cases} (y_0^2 - y^2)^{\beta-1}, & |y| < y_0, \\ 0, & |y| \in [y_0, 1], \end{cases} \quad (5.22)$$

где  $y_0 \in (0, 1)$  и  $\beta > 2 - 1/p$  – некоторые параметры. Тогда, используя значения интегралов [207, с. 352]

$$\int_0^{y_0} (y_0^2 - y^2)^{\beta-1} \cosh(by) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{2y_0}{b} \right)^{\beta-1/2} \Gamma(\beta) I_{\beta-1/2}(by_0),$$

$$\int_0^{y_0} (y_0^2 - y^2)^{\beta-1} y \sinh(by) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} y_0 \left( \frac{2y_0}{b} \right)^{\beta-1/2} \Gamma(\beta) I_{\beta+1/2}(by_0),$$

где  $|\arg b| < \pi$  и  $I_\nu(z)$  – модифицированная функция Бесселя, из (5.17), (5.18) для коэффициентов  $a_k^+$ , соответствующих паре функций  $f(y) \equiv 0$  и  $g(y)$  из (5.22), получаем следующее представление:

$$\begin{aligned} a_k^+ &= i\sqrt{\pi}(2y_0)^{\beta-1/2} \Gamma(\beta) (\lambda_k^+)^{-(\beta+3/2)} \times \\ &\times \{ \cosh \lambda_k^+ I_{\beta-1/2}(\lambda_k^+ y_0) - y_0 \sinh \lambda_k^+ I_{\beta+1/2}(\lambda_k^+ y_0) \} + O(k^{-3}), \\ &k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.23)$$

При этом справедлива асимптотика [155, с. 157]

$$\begin{aligned} I_\nu(\lambda) &= (2\pi\lambda)^{-1/2} \{ \exp \lambda + \exp [-\lambda + i\pi(\nu + 1/2)] \} (1 + O(|\lambda|^{-1})), \\ &\lambda \rightarrow \infty, \quad 0 < \delta \leq \arg \lambda \leq \pi/2, \end{aligned}$$

следовательно

$$I_\nu(\lambda_k^+ y_0) = \frac{(4\pi)^{y_0}}{\sqrt{2\pi y_0}} \exp [i\pi(k + 3/4)y_0] k^{y_0/2} (\lambda_k^+)^{-1/2} [1 + O(k^{-y_0})], \quad k \rightarrow \infty.$$

Тогда из (5.23) имеем для  $a_k^+$  асимптотическое представление

$$a_k^+ = c_0 (-1)^k \exp(i\pi k y_0) k^{(y_0-3)/2-\beta} (1 + O(k^{-y_0})), \quad k \rightarrow \infty, \quad (5.24)$$

с некоторой постоянной  $c_0 = c_0(\beta, y_0) \neq 0$ .

Таким образом, объединяя (5.18), (5.21) и (5.24), получаем для любого  $y \in [0, 1 - \epsilon]$  соотношение

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(a_k^+ i \lambda_k^+ z_k^+(y)) &= c_1 (4\pi)^{y/2} (1-y) k^{(y_0+y)/2+1-\beta} \times \\ &\times \operatorname{Re} \{ \exp(i\theta) \exp(i\pi k y_0) \exp[i\pi(k + 3/4)y] \} \\ &(1 + O(k^{-\min(y_0, y)})) 1 + O(1), \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (5.25)$$

с некоторыми постоянными  $c_1 \neq 0$  и  $|\theta| \leq \pi$ , не зависящими от  $y \in [0, 1 - \epsilon]$ .

**Теорема 1.** Пусть функции  $g(y)$  имеет вид (5.22), причем параметры  $y_0 \in (0, 1)$ ,  $\beta \in (1 - 1/p, 1 + y_0)$ . Тогда для пары  $f(y) \equiv 0$ ,  $g(y)$  имеет место равенство (5.16), в то время как ряд из (3.114) является расходящимся в пространстве  $W_1^1 \oplus L_1$ .

*Доказательство.* Из предположения о сходимости ряда (3.114) в пространстве  $W_1^1 \oplus L_1$ , в частности, вытекает соотношение

$$\|\operatorname{Re}(a_k^+ i \lambda_k^+ z_k^+(y))\|_{L_1} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Кроме того, из выражения (5.25) получаем при

$$y \in [y_0, y_0 + 2\delta(1 - y_0)], \quad \delta \in (0, 1/2)$$

асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(a_k^+ i \lambda_k^+ z_k^+(y))| &= |c_1|(1 - y)(4\pi)^{y/2} k^{1+(y_0+y)/2-\beta} |\cos(\pi k y + \theta_k)| + \\ &+ O(k^{1-\beta+\delta(1-y_0)}) + O(1), \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

с некоторой вещественной последовательностью  $\theta_k$ . Поэтому (см. [302, с. 62]) для произвольного  $\delta \in (0, 1/2)$  имеем

$$\|\operatorname{Re}(a_k^+ i \lambda_k^+ z_k^+(y))\|_{L_1[-1,1]} \geq c_\delta k^{1+y_0-\beta}(1+O(1)) + O(k^{1-\beta+\delta}) + O(1), \quad k \rightarrow \infty,$$

с постоянной  $c_\delta > 0$ . Отсюда с учетом неравенства  $\beta < 1 + y_0$ , выбирая значение  $\delta \in (0, \beta - 1)$ , заключаем, что  $\|\operatorname{Re}(a_k^+ i \lambda_k^+ z_k^+(y))\|_{L_1[-1,1]}$  стремится к бесконечности при  $k \rightarrow \infty$ . Таким образом, ряд из (5.19) является расходящимся в пространстве  $L_1[-1, 1]$ . Кроме того, из неравенства  $\beta > 2 - 1/p$  вытекает включение  $g \in W_p^1[-1, 1]$ , следовательно, для пары функций  $f(y) \equiv 0$ ,  $g(y)$  справедливо разложение (5.16). Теорема доказана.

Отметим, что при  $y_0 \rightarrow 1$  и  $\beta \rightarrow 2$  функция  $g(y)$  из (5.22) принадлежит пространству  $W_r^1[-1, 1]$  для любого, наперед заданного  $r < \infty$ .

Таким образом, асимптотическая формула (5.17), полученная на основании утверждения теоремы 1 из § 3.3, позволяет исследовать случаи расходимости двукратного разложения (3.114). Отметим, что результаты о расходимости рядов по собственным функциям, связанных с решением бигармонического уравнения в полуполосе при различных граничных условиях на торце, были получены также в работах [363, 378, 426] (на основании использования соотношений биортогональности П. Ф. Папковича).

### 5.3 Разложение по собственным функциям в задаче о деформировании упругой полуполосы

В данном параграфе рассматривается вопрос о разложении по собственным функциям (4.21), связанным с построением решения граничной задачи о деформировании упругой полуполосы. Изучено влияние негладкости заданной нагрузки на асимптотику коэффициентов  $a_k$ ,  $k \rightarrow \infty$ , разложения (4.18) решения граничной задачи (4.1), (4.2) в ряд по собственным функциям. Знание асимптотики коэффициентов  $a_k$  позволяет указать случаи расходимости рядов по собственным функциям для напряжений на торце полуполосы. Сформулирован алгоритм регуляризации рядов по собственным функциям (4.21) в случае их расходимости.

Исследование разложения (4.18) с коэффициентами  $a_k$ , определенными выражением (4.19), согласно методике, изложенной для бигармонической задачи в § 5.1, приводит к следующему утверждению.

**Теорема 1.** Пусть для функций  $f$ ,  $g$  выполнены условия (4.3). Тогда для этой пары функций справедливо двукратное разложение (4.21), сходящееся в пространстве  $C[-h, h] \oplus C[-h, h]$  для любого  $h \in (0, 1)$ , причем выполняется оценка

$$\left\| f(y) - \sum_{|\lambda_k| < R_m} a_k U_1(\lambda_k, y) \right\|_{C[-h, h]} + \left\| g(y) - \sum_{|\lambda_k| < R_m} a_k i U_3(\lambda_k, y) \right\|_{C[-h, h]} \leq \frac{c}{m^{(1-h)/3}}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где последовательность  $R_m = \pi(m + 1/2)$ .

Отметим, что ряд, представляющий в (4.21) функцию  $f(y)$ , сходится и в точках  $y = \pm 1$ , однако его сумма равна  $f(1) + (\pi/2)g(1)$ . При получении этого утверждения определяющее значение имеют формулы (4.12), (4.13) для величины постоянной  $a$ . Ответ на вопрос о справедливости соотношения (4.21) для функции  $g(y)$  при  $y = \pm 1$  является тривиальным, так как  $U_3(\lambda_k \pm 1) = 0$ . Таким образом, разложение (4.21) справедливо при всех  $|y| \leq 1$  тогда и только тогда, когда  $g(\pm 1) = 0$ .

Рассмотрим, аналогично § 2 данной главы, вопрос о влиянии негладкости заданной пары функций  $f$ ,  $g$  на оценки коэффициентов  $a_k$  разложения (4.18). Для упрощения дальнейших выкладок примем, что касательная нагрузка отсутствует, т. е. функция  $g$  тождественно равна нулю, а четная функция  $f(y)$  удовлетворяет условиям

$$f \in L_p[-1, 1], \quad 1 < p < \infty, \quad f \in C^3[h, 1] \quad (5.26)$$

для некоторого  $h \in (0, 1)$ . При этих условиях остаются справедливыми утверждения теорем 1 и 2 из § 4.1, причем (см. рассмотрения § 3.1) для решения

граничной задачи (4.1), (4.2), определяемого выражениями (4.4), справедливо соотношение

$$\|\sigma_x(x, y) - f(y)\|_{L_p[-1,1]} + \|\tau_{xy}(x, y)\|_{L_p[-1,1]} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0.$$

При этом, из (4.19) для коэффициентов разложения (4.18) получаем выражение

$$a_k = \frac{F_0(\lambda_k)}{2\lambda_k \cosh^2 \lambda_k} + \frac{2\lambda_k^2}{\cosh^2 \lambda_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{(\lambda_k^2 + \beta_n^2)^2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.27)$$

где функция

$$\begin{aligned} F_0(\lambda) &= 2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\beta_n^2 - \lambda^2)}{(\beta_n^2 + \lambda^2)^2} \beta_n f_n = \\ &= -\frac{\lambda}{\cosh^2 \lambda} \int_{-1}^1 f(y) [(\cosh \lambda - \lambda \sinh \lambda) \cosh(\lambda y) + \\ &\quad + \lambda y \cosh \lambda \sinh(\lambda y)] dy. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Из (5.27) и (4.11), (4.13), вытекает, в частности, асимптотическая формула для коэффициентов  $a_k$ :

$$a_k = \frac{F_0(\lambda_k)}{2\lambda_k \cosh^2 \lambda_k} + \frac{f(1)}{\lambda_k^2} + O(k^{-3}), \quad k \rightarrow \infty. \quad (5.29)$$

При этом, в случае выполнения условия  $f \in C^3[-1, 1]$  получаем из (5.28) соотношение

$$\frac{F_0(\lambda_k)}{2\lambda_k \cosh^2 \lambda_k} = -\frac{f(1)}{\lambda_k^2} + O(k^{-3}), \quad k \rightarrow \infty, \quad (5.30)$$

откуда и из (5.29) следует оценка

$$a_k = O(k^{-3}), \quad k \rightarrow \infty,$$

которая вместе с (3.22) обеспечивает равномерную абсолютную сходимость рядов из разложения (4.21) на любом отрезке  $|y| \leq h$ ,  $h \in (0, 1)$ . Если же функция  $f(y)$  не является достаточно гладкой, то соотношение (5.30) не имеет места и тогда вопрос о сходимости рядов из (4.21) сводится, согласно асимптотической формуле (5.29), к вопросу о сходимости аналогичных рядов с коэффициентами  $a_k = a_{0,k}$ , где

$$a_{0,k} = \frac{F_0(\lambda_k)}{2\lambda_k \cosh^2 \lambda_k} + \frac{f(1)}{\lambda_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.31)$$

В обозначениях § 5.2 (см., в частности, (5.18)) справедливо следующее утверждение.

**Предложение 1.** Пусть для некоторых вещественных значений  $\mu, \beta$  и ненулевой комплексной постоянной  $c$  выполняется соотношение

$$a_{0,k}^+ = c(\lambda_k^+)^{-\beta} \exp(\mu\lambda_k^+) + o(1), \quad k \rightarrow \infty, \quad (5.32)$$

где  $\lambda^\beta = |\lambda|^\beta \exp(i \arg \lambda)$ ,  $\arg \lambda \in (0, \pi/2)$ . Тогда ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \{a_{0,k}^+ U_1(\lambda_k^+, y)\}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} \{a_{0,k}^+ U_3(\lambda_k^+, y)\} \quad (5.33)$$

расходятся поточечно при  $|y| \in [2\beta - \mu - 3, 1)$ , за исключением, возможно, конечного числа точек  $y_j$ .

Доказательство предложения 1 основано на использовании асимптотических формул (5.18) и (5.32), в результате чего вопрос о расходимости рядов (5.33) сводится к вопросу о расходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ c_0 (-1)^k k^{-d} \exp[i\pi(|y| + \mu)k] \right\}, \quad d = \beta - (\mu + 3 + |y|)/2,$$

где постоянная  $c_0 = c_0(y) \neq 0$ , для любого  $y \in (-1, 1)$  (см. [363, 426] и § 5.2).

Таким образом, чтобы получить примеры расходящихся рядов в разложении (4.21) на некоторых отрезках, примыкающих к точкам  $y = \pm 1$ , достаточно указать вещественную четную функцию  $f(y)$ , удовлетворяющую условиям (5.26), для которой коэффициенты  $a_{0,k}^+$  из выражения (5.31) имеют асимптотику (5.32) с параметрами  $\mu, \beta$ , для которых  $\beta - \mu/2 < 2$ . При этом, для расходимости рядов на всем интервале  $|y| < 1$  достаточно иметь неравенство  $\beta - \mu/2 < 3/2$ .

Рассмотрим некоторые типичные ситуации потери гладкости функции  $f(y)$ , аналогичные рассмотренным в § 5.2. Пусть функция

$$f(y) = \begin{cases} (y_0^2 - y^2)^\alpha - c, & |y| < y_0, \\ -c, & |y| \in [y_0, 1], \end{cases} \quad (5.34)$$

где  $y_0 \in (0, 1)$ ,  $\alpha \in (-1, 1)$ , а постоянная

$$c = \frac{\sqrt{\pi}}{2} y_0^{2\alpha+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+3/2)}$$

выбрана таким образом, чтобы обеспечить равенство нулю интеграла от функции  $f(y)$ . Тогда (см. § 5.2) из выражения (5.28) получаем равенство

$$F_0(\lambda) = -c_1(1/2 - \alpha)\lambda^{1/2-\alpha} \frac{I_{\alpha+1/2}(\lambda y_0)}{\cosh^2 \lambda} + 2c \frac{\lambda}{\cosh^2 \lambda} +$$



$$+c_1 \lambda^{3/2-\alpha} \frac{I_{\alpha+1/2}(\lambda y_0) \sinh \lambda}{\cosh^2 \lambda} - \frac{c_1}{2} y_0 \lambda^{3/2-\alpha} \frac{[I_{\alpha-1/2}(\lambda y_0) + I_{\alpha+3/2}(\lambda y_0)]}{\cosh \lambda}$$

с некоторой постоянной  $c_1 > 0$ .

Используя асимптотику (5.18), аналогично рассмотренным § 5.2, для коэффициентов  $a_{0,k}^+$  из (5.31) получаем соотношение (5.32) с постоянными

$$\mu = y_0, \quad \beta = \alpha + 3/2.$$

Таким образом, согласно предложению 1, ряды (4.21) в случае  $f(y)$ , заданной выражением (5.34), и  $g(y) \equiv 0$  будут расходящимися при

$$|y| \in [l, 1), \quad l := 2(\beta - \mu/2 - 3/2) = 2\alpha - y_0. \quad (5.35)$$

Проанализируем выражение (5.35). Пусть значение параметра  $\alpha \in (0, 1)$ , т. е.  $f(y)$  является непрерывной функцией, но ее производная терпит в точках  $y = \pm y_0$  бесконечный интегрируемый разрыв. Тогда всегда можно найти такое  $y_0 \in (0, 1)$ , для которого  $l = 2\alpha - y_0 < 1$ , а это означает, что ряды из разложения (4.21) будут расходящимися при  $|y| \in [l, 1)$ . Если же  $\alpha \in (0, 1/2)$ , то тогда имеем неравенство  $l < 1$  при любом  $y_0 \in (0, 1)$  – таким образом в этом случае всегда существуют интервалы, примыкающие к точкам  $y = \pm 1$ , на которых ряды (4.21) расходятся. Если взять  $\alpha \in (0, 1/2)$  и  $y_0 \in (2\alpha, 1)$ , то эти ряды будут расходиться на всем интервале  $|y| < 1$ . Пусть теперь  $\alpha = 0$ , т. е. функция  $f(y)$  имеет вид “ступеньки”. Тогда выполняется неравенство  $l(0, y_0) < 0$  для любого  $y_0 \in (0, 1)$  и, таким образом, в этом случае ряды (4.21) расходятся на всем интервале  $|y| < 1$ . Аналогичное утверждение имеет место и в случае  $\alpha \in (-1, 0)$ , т. е. когда функция  $f(y)$  терпит в точках  $y = \pm y_0$  бесконечный, интегрируемый со степенью  $p \in (1, |\alpha|^{-1})$  разрыв.

Рассмотрим вопрос о регуляризации соотношения (4.21) в случае негладкой функции  $f(y)$  и функции  $g(y) \equiv 0$ . Для решения этого вопроса достаточно определить такую пару функций  $f_0(y)$ ,  $g_0(y)$ , для которой соответствующее решение граничной задачи (4.1), (4.2) имеет при  $x > 0$ ,  $|y| \leq 1$  разложение (4.18) с коэффициентами  $a_k = a_{0,k}$ , определенными согласно выражениям (5.28), (5.31). Положим, в соответствии с (5.31), (4.7), (4.14), последовательности чисел

$$Y_n^0 = -\beta_n f_n - f(1), \quad Y_n^1 = Y_n - Y_n^0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.36)$$

и функции

$$X^0(s) = \frac{\cosh^2 s}{\Delta(s)} \left\{ -4s^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n f_n + f(1)}{(s^2 + \beta_n^2)^2} + 2s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n f_n}{s^2 + \beta_n^2} \right\} \equiv$$

$$\equiv \frac{\cosh^2 s}{\Delta(s)} \left\{ F_0(s) - f(1) \frac{\sinh s \cosh s - s}{\cosh^2 s} \right\}, \quad (5.37)$$

$$X^1(s) = X(s) - X^0(s), \quad s > 0.$$

При этом пара  $X^0(s)$ ,  $Y_n^0$  удовлетворяет первому из уравнений системы (4.7), поэтому исходное поле напряжений можно представить в виде суммы

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1,$$

где напряжения  $\sigma_x^j$ ,  $\sigma_y^j$ ,  $\tau_{xy}^j$  для значений индекса  $j = 0, 1$  имеют вид (4.4) с заменой функции  $X(s)$  на  $X^j(s)$  и последовательности  $Y_n$  на  $Y_n^j$ , причем выполняются граничные условия

$$\sigma_y^j(x, \pm 1) = \tau_{xy}^j(x, \pm 1) = 0, \quad x > 0, \quad j = 0, 1.$$

При этом, для  $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$ ,  $\tau_{xy}^0$  справедливо при  $x > 0$  разложение (4.18) с коэффициентами  $a_k = a_{0,k}$  из (5.28), (5.31) и верны равенства (см. (4.4), (5.28), (5.37))

$$\begin{aligned} \sigma_x^0(0, y) &= f(y), \\ \tau_{xy}^0(0, y) &= -f(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \beta_n^{-1} \sin(\beta_n y) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ F_0(s) - f(1) \frac{\sinh s \cosh s - s}{\cosh^2 s} \right] \frac{U_3(s, y)}{s \Delta(s)} ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ F_0(s) + \frac{2f(1)s}{\cosh^2 s} \right] \frac{U_3(s, y)}{s \Delta(s)} ds, \quad |y| < 1. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Проведенные рассмотрения позволяют сформулировать следующий алгоритм расчета напряжений в рамках метода собственных функций в случае негладкой функции  $f(y)$ , удовлетворяющей условиям (5.26), и функции  $g(y) \equiv 0$ . А именно, коэффициенты  $a_k$  разложения (4.18) определяются по формуле

$$a_k = a_{0,k} + a_{1,k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где значения  $a_{0,k}$  вычисляются явным образом согласно выражениям (5.28) и (5.31), а неизвестные значения  $a_{1,k}$  при практическом решении граничной задачи определяются численно (например, методом коллокаций), исходя из функциональных уравнений

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{1,k} U_1(\lambda_k, y) = 0, \quad |y| < 1,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{1,k} i U_3(\lambda_k, y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ F_0(s) + \frac{2f(1)s}{\cosh^2 s} \right] \frac{U_3(s, y)}{s \Delta(s)} ds, \quad |y| < 1. \quad (5.39)$$

При этом, ряды в уравнениях (5.39) являются сходящимися на всем интервале  $y \in (-1, 1)$ .

#### 5.4 Асимптотика коэффициентов разложения по собственным функциям в смешанной задаче для упругой полуполосы

В данном параграфе в рамках метода собственных функций рассматривается граничная задача (4.22), (4.23). При этом остаются справедливыми обозначения и условия из § 4.2 (см., в частности, (4.25)).

Пусть  $X(s)$ ,  $Y_n$  – ограниченное решение системы уравнений (4.29). Тогда непосредственно из (4.29) следует, что функция  $X(s)$  продолжается мероморфным образом на всю комплексную  $\lambda$ -плоскость согласно выражениям

$$X(\lambda) = \cosh^2 \lambda \frac{T(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad (5.40)$$

$$T(\lambda) = -2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n(\lambda)Y_n}{(\lambda^2 + \beta_n^2)^2} + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n f_n}{\lambda^2 + \beta_n^2}.$$

Полюсами четной функции  $X(\lambda)$  служат корни определителя  $\Delta(\lambda)$ , за исключением точки  $\lambda = 0$ . Подставляя (5.40) в выражения (4.26) и учитывая четность функции  $T(\lambda)$ , получаем выражения

$$u_x(x, y) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} T(s) \frac{U_x(s, y)}{\Delta(s)} \exp(isx) ds - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (Y_n x - f_n) \exp(-\beta_n x) \cos(\beta_n y), \quad (5.41)$$

$$u_y(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(s) \frac{U_y(s, y)}{\Delta(s)} \exp(isx) ds + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{[(3 - 4\nu)\beta_n^{-1} - x] Y_n + f_n\} \exp(-\beta_n x) \sin(\beta_n y).$$

Здесь первый из интегралов понимается в смысле главного значения по Коши, что связано с наличием полюса первого порядка функции  $U_x(\lambda, y)$  при  $\lambda = 0$ .

Основная идея последующих рассмотрений (как и в § 3.3) состоит в применении теоремы Коши к интегралам в (5.41). Пусть контуры

$$\Gamma_m := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = R_m, \operatorname{Im} \lambda \geq 0\},$$

где  $R_m = \pi(m + 1/4)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Тогда при всех достаточно больших натуральных  $m$  имеем равенства

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y) &= \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_m} T(\lambda) \frac{U_x(\lambda, y)}{\Delta(\lambda)} \exp(i\lambda x) d\lambda + \operatorname{Res}_{\lambda=0} T(\lambda) \frac{U_x(\lambda, y)}{\Delta(\lambda)} + \\
 &+ 2 \sum_{n: \beta_n < R_m} \operatorname{Res}_{\lambda=i\beta_n} T(\lambda) \frac{U_x(\lambda, y)}{\Delta(\lambda)} + 2 \sum_{k: 0 < |\lambda_k| < R_m} \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_k} T(\lambda) \frac{U_x(\lambda, y)}{\Delta(\lambda)} + \\
 &+ \frac{1}{\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{-R_m} + \int_{-R_m}^{\infty} \right\} T(s) \frac{U_x(s, y)}{\Delta(s)} \exp(isx) ds - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (Y_n x - f_n) \exp(-\beta_n x) \cos(\beta_n y), \tag{5.42}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_y(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_m} T(\lambda) \frac{U_y(\lambda, y)}{\Delta(\lambda)} \exp(i\lambda x) d\lambda + \\
 &+ 2i \sum_{n: \beta_n < R_m} \operatorname{Res}_{\lambda=i\beta_n} T(\lambda) \frac{U_y(\lambda, y)}{\Delta(\lambda)} + 2i \sum_{k: 0 < |\lambda_k| < R_m} \operatorname{Res}_{\lambda=i\beta_n} T(\lambda) \frac{U_y(\lambda, y)}{\Delta(\lambda)} + \\
 &+ \frac{1}{\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{-R_m} + \int_{-R_m}^{\infty} \right\} T(s) \frac{U_y(s, y)}{\Delta(s)} \exp(isx) ds + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{[(3 - 4\nu)\beta_n^{-1} - x] Y_n + f_n\} \exp(-\beta_n x) \sin(\beta_n y).
 \end{aligned}$$

При этом использование определений (4.27), (5.40) и равенств

$$U_x(i\beta_n, y) = -i(-1)^n \cos \beta_n y, \quad U_y(i\beta_n, y) = -(-1)^n \sin \beta_n y,$$

$$\left. \frac{\partial U_x(\lambda, y)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=i\beta_n} = 2(-1)^n (1 - \nu) \beta_n^{-1} \cos \beta_n y,$$

$$\left. \frac{\partial U_y(\lambda, y)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=i\beta_n} = i(-1)^n (1 - 2\nu) \beta_n^{-1} \sin \beta_n y,$$

$$\Delta(i\beta_n) = i\beta_n, \quad \Delta'(i\beta_n) = 0, \quad Q(i\beta_n) = \beta_n^2, \quad Q'(i\beta_n) = -2i(1 - \nu)\beta_n,$$

приводит к следующим выражениям для вычетов

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{Res}_{\lambda=i\beta_n} T(\lambda) \frac{U_x(\lambda, y)}{\Delta(\lambda)} \exp(i\lambda x) &= \\
 &= (-1)^n (Y_n x - f_n) \exp(-\beta_n x) \cos(\beta_n y), \tag{5.43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2i \operatorname{Res}_{\lambda=i\beta_n} T(\lambda) \frac{U_y(\lambda, y)}{\Delta(\lambda)} \exp(i\lambda x) &= \\
 &= (-1)^{n+1} \{[(3 - 4\nu)\beta_n^{-1} - x] Y_n + f_n\} \exp(-\beta_n x) \sin(\beta_n y). \tag{5.44}
 \end{aligned}$$

Кроме того, использование равенств (4.27), (4.32) и (5.40) позволяет показать, что для любых  $x > 0$ ,  $y \in (-1, 1)$  справедливо предельное соотношение

$$\left| \int_{\Gamma_m} T(\lambda) \frac{U_x(\lambda, y)}{\Delta(\lambda)} \exp(i\lambda x) d\lambda \right| + \left| \int_{\Gamma_m} T(\lambda) \frac{U_y(\lambda, y)}{\Delta(\lambda)} \exp(i\lambda x) d\lambda \right| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.45)$$

Таким образом, на основании (5.43), (5.44), (5.45) получаем из (5.42) разложение вектора смещений по однородным решениям, которое в вещественной форме принимает вид (см. § 5.2 относительно последовательности  $\lambda_k^+$ )

$$u_x(x, y) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \{ a_k^+ U_x(\lambda_k^+, y) \exp(i\lambda_k^+ x) \}, \quad (5.46)$$

$$u_y(x, y) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \{ a_k^+ i U_y(\lambda_k^+, y) \exp(i\lambda_k^+ x) \},$$

где коэффициенты  $a_k^+$  определяются выражениями

$$a_0 = \operatorname{Res}_{\lambda=0} T(\lambda) \frac{U_x(\lambda, x)}{\Delta(\lambda)} \exp(i\lambda x), \quad a_k = \frac{2T(\lambda_k^+)}{\Delta(\lambda_k^+)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.47)$$

В развернутом виде из (5.47) получаем равенства

$$a_0 = (1 - \nu) \left[ 2\nu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{\beta_n^2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(y) dy \right],$$

$$a_k^+ = \frac{\lambda_k^+}{\cosh^2 \lambda_k^+} \times$$

$$\times \left[ -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n(\lambda_k^+) Y_n}{(\lambda_k^{+2} + \beta_n^2)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n f_n}{\lambda_k^{+2} + \beta_n^2} \right], \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.48)$$

С помощью формул (4.32), (5.18), (5.48) можно установить асимптотику коэффициентов

$$a_k^+ = \frac{\hat{a}}{(\lambda_k^+)^{\alpha} \cosh^2 \lambda_k^+} + O(k^{-2} (\ln k)^{-1/p'}), \quad k \rightarrow \infty, \quad (5.49)$$

где  $1/p + 1/p' = 1$  и постоянная

$$\hat{a} = \frac{b}{2} \left[ \exp(i\pi\alpha/2) + \frac{\alpha + 1 - 2\nu}{\cos \pi\alpha/2} \right],$$

и считается, что  $\lambda^\alpha = |\lambda|^\alpha \exp(i \arg \lambda)$ , при  $\arg \lambda \in (0, \pi/2)$ .

При  $x = 0$  из (5.46) получаем разложение заданного вектора смещений на торце полуполосы в ряд по собственным функциям:

$$\begin{pmatrix} f(y) \\ g(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ a_k^+ \begin{pmatrix} U_x(\lambda_k^+, y) \\ iU_y(\lambda_k^+, y) \end{pmatrix} \right\}, \quad |y| < 1. \quad (5.50)$$

При этом, детальный анализ проведенных рассмотрений, связанных с переходом от представления  $\vec{u} = \{u_x, u_y\}$  в виде (4.26) к представлению (5.46) (см. соответствующие рассуждения из § 5.1), показывают, что разложение (5.50) справедливо в пространстве  $C \oplus C$  и верна оценка для скорости сходимости:

$$\begin{aligned} & \left\| f(y) - a_0 - 2 \sum_{|\lambda_k^+| < R_m} \operatorname{Re} \{ a_k^+ U_x(\lambda_k^+, y) \} \right\|_{C[-1,1]} + \\ & + \left\| g(y) - 2 \sum_{|\lambda_k^+| < R_m} \operatorname{Re} \{ a_k^+ i U_y(\lambda_k^+, y) \} \right\|_{C[-1,1]} \leq \frac{c}{m^\alpha}. \end{aligned}$$

Из (5.46) получаем для поля напряжений представление (определение функций  $U_j(\lambda, y)$ ,  $j = 1, 2, 3$  дано выражениями (4.6))

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_x(x, y) &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \{ a_k^+ i U_1(\lambda_k^+, y) \exp(i \lambda_k^+ x) \}, \\ \frac{1}{2G} \sigma_y(x, y) &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \{ a_k^+ i U_2(\lambda_k^+, y) \exp(i \lambda_k^+ x) \}, \\ \frac{1}{2G} \tau_{xy}(x, y) &= -2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \{ a_k^+ U_3(\lambda_k^+, y) \exp(i \lambda_k^+ x) \} \end{aligned} \quad (5.51)$$

– возможность почленного дифференцирования рядов из (5.46) при  $x > 0$  вытекает из условий (4.25) и оценки (5.49). При этом установленная асимптотическая формула (5.49) для коэффициентов  $a_k^+$  играет определяющую роль при анализе сходимости рядов (5.51) на торце полуполосы  $x = 0$ ,  $|y| < 1$ . Как отмечалось в [365], эти ряды расходятся на интервалах  $|y| \in (2\alpha - 1, 1)$ , если только поле напряжений имеет особенность в угловых точках (см. (4.34)). Знание асимптотики (5.49) позволяет строго доказать этот факт. Из (4.6), (4.25) и (5.49), аналогично рассмотрению § 5.2, § 5.3 (см., в частности, предложение 1 из § 5.3), следует, что вопрос о сходимости рядов из (5.51) при  $x = 0$ ,  $|y| < 1$  сводится (возможно, за исключением конечного числа точек  $y_j$ ) к вопросу о

сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-d} \exp(i\pi k|y|), \quad d = \alpha - (1 + |y|)/2,$$

который расходится при  $d \leq 0$ , т. е. когда  $|y| \geq 2\alpha - 1$ . Так как  $\alpha \in (1/2, 1)$ , то ряды из (5.51) будут расходиться на интервалах конечной длины, если только постоянная  $a \neq 0$ .

Факт расходимости рядов по однородным решениям для напряжений на торце  $x = 0$  обуславливает вопрос о регуляризации этих рядов. Наличие асимптотики (5.49) для коэффициентов  $a_k^+$  позволяет провести такую регуляризацию, в результате чего появляется возможность получить в рамках метода собственных функций расчетные формулы для напряжений на торце полуполосы. Покажем это на примере касательного напряжения  $\tau_{xy}$ .

Положим коэффициенты

$$a_{1,k}^+ = a_k^+ - \frac{\hat{a}}{(\lambda_k^+)^{\alpha} \cosh^2 \lambda_k^+}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда при  $x > 0$ ,  $|y| < 1$  имеем выражение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \tau_{xy}(x, y) = & -2\operatorname{Re} \left\{ \hat{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_3(\lambda_k^+, y)}{(\lambda_k^+)^{\alpha} \cosh^2 \lambda_k^+} \exp(i\lambda_k^+ x) \right\} - \\ & - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ a_{1,k}^+ U_3(\lambda_k^+, y) \exp(i\lambda_k^+ x) \right\}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

так что второй ряд в (5.52), на основании (4.25), (4.27) и (5.49), допускает почленный предельный переход при  $x \rightarrow 0$ ,  $|y| < 1$ . Далее, так как  $U_3(0, y) \equiv 0$  и  $\Delta'(\lambda) = 2 \cosh^2 \lambda$ , то по теореме Коши получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_3(\lambda_k^+, y)}{(\lambda_k^+)^{\alpha} \cosh^2 \lambda_k^+} \exp(i\lambda_k^+ x) = \\ & = -\frac{1}{\pi i} \left\{ \int_{i\infty}^0 + \int_0^{\infty} \right\} \frac{U_3(\lambda, y)}{\lambda^{\alpha} \Delta(\lambda)} \exp(i\lambda x) d\lambda. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Тогда, используя (4.6), (5.53), имеем при  $|y| < 1$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_3(\lambda_k^+, y)}{(\lambda_k^+)^{\alpha} \cosh^2 \lambda_k^+} \exp(i\lambda_k^+ x) = \\ & = -\frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{(s \sinh s - \cosh s) \sinh(sy) - sy \cosh s \cosh(sy)}{s^{\alpha} (\sinh s \cosh s + s)} ds - \end{aligned}$$

$$-\frac{\exp(-i\lambda\alpha/2)}{\pi} \int_0^\infty \frac{(s \sin s + \cos s) \sin(sy) + sy \cos s \cos(sy)}{s^\alpha (\sin s \cos s + s)} ds,$$

что с учетом (5.52) приводит к выражению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2G} \tau_{xy}(0, y) = \\ &= -\frac{b \sin \pi\alpha/2}{\pi} \int_0^\infty \frac{(s \sinh s - \cosh s) \sinh(sy) - sy \cosh s \cosh(sy)}{s^\alpha (\sinh s \cosh s + s)} ds + \\ &+ \frac{b(2 + \alpha - 2\nu)}{\pi} \int_0^\infty \frac{(s \sin s + \cos s) \sin(sy) + sy \cos s \cos(sy)}{s^\alpha (\sin s \cos s + s)} ds - \\ & - 2 \sum_{k=1}^\infty \operatorname{Re} \{ a_{1,k}^+ U_3(\lambda_k^+, y) \}, \quad |y| < 1. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Выражение (5.54) обладает необходимой устойчивостью – входящие в него интегралы и ряд являются сходящимися при  $|y| < 1$ . При этом ряд из (5.54) сходится на всем отрезке  $|y| \leq 1$  и особенности напряжения  $\tau_{xy}(0, y)$  при  $y \pm 1$  содержатся в интегральных слагаемых (5.54). Анализ этих интегралов при  $y \rightarrow 1$  дает в точности выражение (4.34). При этом постоянная  $b$ , входящая в (5.54), может быть определена в рамках метода собственных функций исходя из асимптотической формулы (5.49) при численном решении конечной алгебраической системы уравнений, соответствующей равенствам (5.50).

Выражения, аналогичные (5.54), можно получить и для  $\sigma_x(0, y)$ ,  $\sigma_y(0, y)$  [64]. Отметим, что другие приемы, позволяющие в рамках метода собственных функций учесть локальные особенности поля напряжений, были указаны в работах [32, 198, 383].

### 5.5 Бигармоническое уравнение в полуполосе с криволинейным торцом

В данном параграфе продолжается рассмотрение граничной задачи (3.134). Изучается вопрос об условиях на функции  $l(y)$ ,  $f(y)$ ,  $g(y)$ , при выполнении которых справедливо предположение о сходимости ряда (3.160) (см. теорему 4 из § 3.5) вплоть до граничной кривой  $\Gamma$ . Выполнение этого предположения позволяет свести вопрос о нахождении коэффициентов  $a_k$  к задаче удовлетворения граничным условиям (3.134) на кривой  $\Gamma$ . Такого рода предположения в задачах математической физики для областей с неровной границей принято называть гипотезой Рэлея [9, 16].

Таким образом, речь идет о справедливости двукратного разложения

$$f(y) = \sum_{k=1}^\infty a_k z_k(y) \exp[i\lambda_k l(y)],$$



$$g(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{(i\lambda_k z_k(y) - l'(y)z_k'(y))}{(1 + l'^2(y))^{1/2}} \exp [i\lambda_k l(y)], \quad (5.55)$$

$$|y| < 1, \quad \text{Im } \lambda_k > 0.$$

Вопрос о справедливости разложения (5.55) представляет и самостоятельный интерес в рамках изучения базисных свойств собственных функций (точнее их части, соответствующей собственным значениям из полуплоскости  $\text{Im } \lambda > 0$ ) пучка дифференциальных операторов  $\mathcal{L}(\lambda)$ .

При рассмотрении вопроса о справедливости разложения (5.55) используем общий подход, развитый Р. Милларом [393, 394]. Этот подход нашел широкое применение в задачах акустики и электродинамики [9, 371, 421]. Он основан на исследовании свойств аналитического продолжения в комплексную плоскость решения граничного интегрального уравнения, к которому тем или иным способом сводится исходная граничная задача математической физики. При этом коэффициенты соответствующего разложения в ряд выражаются в виде интегралов от решения интегрального уравнения (применительно к граничной задаче (3.134) см. формулу (3.161)) и возможность аналитического продолжения его решений позволяет получить подходящие оценки для коэффициентов  $a_k$ . Отметим, что специфика ряда (3.160) такова, что если ряд сходится в  $\bar{\Pi}_+$ , то тогда он будет сходящимся и при всех

$$x > L_0 := \min l(y), \quad |y| \leq 1.$$

При реализации общей схемы Миллара естественным образом используем результаты § 3.4 и § 3.5.

Из оценок (3.140) для корней  $\lambda_k$  вытекают оценки (см. [362, с. 291])

$$|\lambda_k^n z_k^{(j)}(y) \exp(i\lambda_k x)| \leq ck^{n+j+1}(\ln k + 1)^{-1} \exp(-\pi kx/2), \quad (5.56)$$

$$x \geq 0, \quad |y| \leq 1, \quad n, j = 0, 1; \quad k = 1, 2, \dots$$

Кроме того, из выражений (3.161) для коэффициентов  $a_k$  разложения решения  $u(x, y)$  граничной задачи (3.134) в ряд (3.160) получаем неравенство

$$|a_k| \leq \frac{c}{k} \sum_{j=1}^8 \{|\Psi_k^+(p_j)| + |\Psi_k^-(p_j)|\}, \quad (5.57)$$

где функционалы

$$\Psi_k^\pm(p) = \int_{-1}^1 p(t) \exp[-i\lambda_k(l(t) \mp it)] dt$$

и множество функций (занумерованное в произвольном порядке)

$$\{p_j(t)\}_{j=1}^8 = \{t^n (l'(t))^m q_k(t)\}, \quad n, m = 0, 1; \quad k = 1, 2.$$

Для односвязной области  $U \subset \mathbb{C}$  с границей  $\partial U$ , являющейся замкнутой жордановой кривой, введем в рассмотрение банахово пространство  $\mathcal{A}(U)$ , состоящее из аналитических в  $U$  и непрерывных в ее замыкании  $\bar{U}$  функций с нормой

$$\|z(\mu)\|_{\mathcal{A}(U)} := \sup_{\mu \in \bar{U}} |z(\mu)|.$$

**Лемма 1.** Пусть функция  $l$  аналитична в некоторой окрестности  $V \subset \mathbb{C}$  отрезка  $[-1, 1]$  и функции

$$\chi_{\pm}(\mu) = l(\mu) \mp i\mu, \quad \mu \in V.$$

Предположим, что симметричная относительно вещественной оси односвязная область  $U \subset V$ ,  $(-1, 1) \subset U$  обладает свойствами:  $\partial U$  – простая жорданова кривая, пересекающаяся с отрезком  $|t| \leq 1$  в точках  $t = \pm 1$ , причем

$$\operatorname{Re}(1 \mp \mu) \geq c|\operatorname{Im} \mu|, \quad \mu \in U, \quad |\mu \mp 1| < \epsilon, \quad (5.58)$$

для некоторых  $\epsilon > 0$ ,  $c > 0$ . Тогда, если  $l(\pm 1) = l'(\pm 1) = 0$ ,

$$\chi_+(\mu) \neq \chi_+(t), \quad t \neq \mu \in \bar{U}, \quad t \in [-1, 1], \quad (5.59)$$

и верны оценки

$$|\operatorname{Im} \chi_+(\mu)| < 1, \quad \pm 1 \neq \mu \in \bar{U}, \quad (5.60)$$

то оператор  $A$  из (3.172) непрерывно действует из пространства  $\mathcal{B}$  в пространство  $\mathcal{A}(U) \oplus \mathcal{A}(U)$ .

*Доказательство.* Достаточно показать, что операторы  $A_{nk}^j$  непрерывно действуют из  $C_0 = C_0[-1, 1]$  в  $\mathcal{A}(U)$ . Отметим равенства

$$\begin{aligned} r^2(l(\mu), \mu; t) &= (\chi_-(\mu) - \chi_-(t))(\chi_+(\mu) - \chi_+(t)), \\ r_1^2(l(\mu), \mu; t) &= ((\chi_-(\mu) - i) - i(1-t) - l(t))((\chi_+(\mu) + i) + i(1-t) - l(t)), \\ r_2^2(l(\mu), \mu; t) &= ((\chi_-(\mu) + i) + i(1+t) - l(t)) \times \\ &\quad \times ((\chi_+(\mu) - i) - i(1+t) - l(t)). \end{aligned} \quad (5.61)$$

Из первого равенства (5.61) и условия (5.59) с учетом соотношения

$$\chi_+(\bar{\mu}) = \overline{\chi_-(\mu)}, \quad \mu \in \bar{U},$$

вытекающего из вещественности функции  $l(y)$ ,  $|y| \leq 1$ , на основании выражений (3.150) следует, что ядра  $\mathcal{A}_{nk}^0(\mu, t)$  непрерывны при  $(\mu, t) \in \bar{U} \times [-1, 1]$  и аналитичны по  $\mu \in U$  при каждом фиксированном  $t \in [-1, 1]$ . Тогда [257, § 2.8] операторы  $A_{nk}^0$ ,  $n, k = 1, 2$  непрерывно действуют из пространства непрерывных функций  $C[-1, 1]$  в пространство  $\mathcal{A}(U)$ .

Рассмотрим свойства операторов  $A_{nk}^1$ ,  $n, k = 1, 2$ . Из (5.60) имеем оценку

$$|\operatorname{Im} \chi(\mu)| < 1; \quad \pm 1 \neq \mu \in \bar{U}. \quad (5.62)$$

Введем в рассмотрение функции

$$d_{\pm}(\mu) = \min \{1 \mp \operatorname{Im} \chi_{-}(\mu), 1 \pm \operatorname{Im} \chi_{+}(\mu)\}.$$

Тогда из (5.58), (5.60), (5.62) и соотношений

$$l(\mu) = O(|1 \mp \mu|^2), \quad \mu \rightarrow \pm 1$$

следует утверждение о существовании такой постоянной  $c > 0$ , что выполняются неравенства

$$d_{+}(\mu) \geq c|1 - \mu|, \quad d_{-}(\mu) \geq c|1 + \mu|, \quad \mu \in \bar{U}. \quad (5.63)$$

Далее, из второго и третьего равенств из (5.61) и (5.63) получаем оценки

$$\begin{aligned} |r_1^2(l(\mu), \mu; t)| &\geq c(1 - t + d_{+}(\mu)) \geq c((1 - t)^2 + |1 - \mu|^2), \\ |r_2^2(l(\mu), \mu; t)| &\geq c(1 + t + d_{-}(\mu)) \geq c((1 + t)^2 + |1 + \mu|^2), \end{aligned} \quad (5.64)$$

справедливые при всех  $\mu \in \bar{U}$  и  $|t| < 1$ . Тогда из (5.64) на основании анализа выражений (3.150), (3.151) для ядер  $\mathcal{A}_{nk}^1(\mu, t)$ ,  $n, k = 1, 2$  имеем оценки

$$|\mathcal{A}_{nk}^1(\mu, t)| \leq c \left\{ 1 + \frac{|1 - \mu|}{(1 - t)^2 + |1 - \mu|^2} + \frac{|1 + \mu|}{(1 + t)^2 + |1 + \mu|^2} \right\}. \quad (5.65)$$

Из оценок (5.65) следует, что операторы  $A_{nk}^1$  непрерывно действуют из пространства  $C$  в пространство  $L_{\infty}(\bar{U})$ . Однако, если функция  $p \in C_0^{\infty}$ , то тогда  $A_{nk}^1 p \in \mathcal{A}(U)$  (см. (3.151), (5.61)). Следовательно, так как многообразие  $C_0^{\infty}$  плотно вложено в пространство  $C_0$ , то получаем, что операторы  $A_{nk}^1$  непрерывно действуют из  $C_0$  в  $\mathcal{A}(U) \subset L_{\infty}(\bar{U})$ .

Рассмотрим операторы  $A_{nk}^2$ ,  $n, k = 1, 2$ . Из свойств функции Грина  $G(y, t; \lambda)$  и определений функций  $H_j^0(y, t; \lambda)$ ,  $j = 1, 2, 3$  нетрудно заключить, что при каждом  $t \in [-1, 1]$  и  $\lambda \geq 0$  функции  $H_j^0(y, t; \lambda)$  аналитичны по  $y = \mu \in C$ , причем выполняются оценки

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial \mu^k} H_j^0(\mu, t; \lambda) \right| \leq c(\lambda + 1)^{k+3} \exp(-3\lambda) \exp(\lambda |\operatorname{Re} \mu|),$$

$$\mu \in C, \quad \lambda \geq 0, \quad |t| \leq 1.$$

Отсюда и из определения функций  $\chi_{\pm}(\mu)$  получаем (см. (5.60), (5.62))

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\partial^k}{\partial \mu^k} H_j^0(\mu, t; s) \right| (s + 1)^n |\exp[\pm isl(\lambda)]| ds \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^\infty (s+1)^{k+n+3} \exp(-3s) \exp[s \max |\operatorname{Im} \chi_\pm(\mu)|] \leq \\ &\leq \int_0^\infty (s+1)^{k+n+3} \exp(-2s) ds < \infty, \quad \mu \in \bar{U}, \quad k, n = 0, 1. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Из оценок (5.66) и определения ядер  $\mathcal{A}_{nk}^2$  на основании утверждения об аналитичности функций, определенных посредством интегралов [257, § 2.8], заключаем, что ядра  $\mathcal{A}_{nk}^2(\mu, t)$  являются аналитическими по  $\mu \in U$  функциями, принадлежащими  $\mathcal{A}(U)$  для любого  $t \in [-1, 1]$ , причем

$$\sup_{\mu \in U, |t| \leq 1} |\mathcal{A}_{nk}^2| \leq c, \quad n, k = 1, 2.$$

Тогда, снова используя [257, § 2.8], получаем, что операторы  $A_{nk}^2$  непрерывно действуют из  $C$  в пространство  $\mathcal{A}(U)$ . Лемма доказана.

На основании леммы 1 выводится следующее утверждение.

**Следствие 1.** Пусть выполнены условия леммы 1, причем

$$l'(\mu) \neq i, \quad \mu \in \bar{U}.$$

Тогда, если

$$f \in \mathcal{A}(U), \quad g \in \mathcal{A}(U), \quad f(\pm 1) = f'(\pm 1) = g(\pm 1) = 0,$$

то решение  $q \in \mathcal{B}$  уравнения (3.172) с правой частью  $h$  из (3.173) принадлежит пространству  $\mathcal{A}(U) \oplus \mathcal{A}(U)$ .

**Следствие 2.** При выполнении условий следствия 1 и выполнении неравенства

$$\operatorname{Re} \chi_+(\mu) \leq 0, \quad \forall \mu \in \partial U, \quad \operatorname{Im} \mu \leq 0 \quad (5.67)$$

для коэффициентов  $a_k$  из (3.161) справедливы оценки

$$|a_k| \leq ck^{-1/2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.68)$$

*Доказательство.* В силу соотношения  $\chi_+(\bar{\mu}) = \bar{\chi}_-(\mu)$  и (5.67) имеем

$$\operatorname{Re} \chi_-(\mu) \leq 0, \quad \forall \mu \in \partial U, \quad \operatorname{Im} \mu \geq 0.$$

Тогда, используя аналитичность функций  $\chi_\pm(\mu)$  и неравенства

$$|\operatorname{Im} \chi_\pm(\mu)| \leq 1, \quad \mu \in \bar{U},$$

по теореме Коши для любой функции  $p(\mu) \in \mathcal{U}$  получаем оценки

$$|\Psi_k^\pm(p)| \leq \|p\|_{\mathcal{A}(U)} \left\{ \int_{\partial U \cap \mp \operatorname{Im} \mu \geq 0} \exp(|\operatorname{Im} \chi_\pm(\mu)| |\operatorname{Re} \lambda_k|) |d\mu| \right\} \leq$$

$$\leq ck^{1/2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда утверждение (5.68) вытекает из следствия 1 и (5.57).

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия леммы 1, причем

$$l(y) > 0, \quad |y| < 1, \quad l'(\mu) \neq i, \quad \mu \in \bar{U},$$

$$\operatorname{Re} \chi_+(\mu) \leq 0, \quad \forall \mu \in \partial U, \quad \operatorname{Im} \mu \leq 0.$$

Тогда для любых функций  $f \in \mathcal{A}(U)$ ,  $g \in \mathcal{A}(U)$  с  $f(\pm 1) = f'(\pm 1) = g(\pm 1) = 0$  решение  $u(x, y)$  граничной задачи (3.134) допускает разложение в ряд (3.160), сходящийся при всех  $(x, y) \in \bar{\Pi}_+$ . Для пары  $f, g$  справедливо разложение (5.55), сходящееся в пространствах  $C^n[-y_0, y_0] \oplus C^n[-y_0, y_0]$  для любых  $y_0 \in (0, 1)$  и  $n = 0, 1, \dots$

*Доказательство.* Из оценок (5.56) и (5.68) получаем, что ряд из (3.160) сходится при всех  $x > 0$ ,  $|y| \leq 1$  и допускает почленное дифференцирование по  $x, y$  любое число раз. Так как по условию  $l(y) > 0$  при  $|y| < 1$ , то это означает, что разложение (3.160) представляет собой функцию  $u(x, y)$  при всех  $(x, y) \in \bar{\Pi}_+$  (с учетом  $z_k(\pm 1) = z'_k(\pm 1) = 0$ ). Отсюда, в частности, с учетом теоремы 4 из § 3.5 получаем утверждение о справедливости для пары функций  $f, g$  разложения (5.55).

Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос о справедливости гипотезы Рэлея для решения задачи (3.134) в зависимости от величины параметра  $\delta$ , задающего отклонение кривой  $\Gamma = \Gamma_\delta$  от прямолинейного торца  $x = 0$ ,  $|y| < 1$ . Пусть функция  $l(y) = \delta l_1(y)$ , где  $l_1$  – аналитическая в некоторой окрестности  $V$  отрезка  $[-1, 1]$  функция, причем

$$l_1(\pm 1) = l'_1(\pm 1) = 0, \quad l_1(y) > 0, \quad |y| < 1,$$

и  $\delta > 0$ . Тогда справедливо следующее утверждение.

**Следствие 3.** Найдется такое  $\delta_0 > 0$ , что при любом значении  $\delta \in (0, \delta_0)$  для пары функций  $f, g$ , аналитических в  $V$  и удовлетворяющих условиям (3.135), справедливо двукратное разложение (3.160), сходящееся при всех  $(x, y) \in \bar{\Pi}_+$ .

*Доказательство.* Достаточно доказать существование такого  $\delta_0$ , что при всех  $\delta \in (0, \delta_0)$  функции

$$\chi_\pm(\mu; \delta) := \delta l_1(\mu) \mp i\mu, \quad \mu \in V,$$

удовлетворяют условиям теоремы 1.

Пусть области  $V_j$  :

$$V_0 = \{\mu \in \mathbb{C} : |b^{-1} \operatorname{Im} \mu \pm \operatorname{Re} \mu| < 1\} \subset V_1 \subset V_2 \subset V$$

с достаточно малой постоянной  $b > 0$ . В частности,  $U = V_0$  удовлетворяет условию (5.58) с  $c = b^{-1}$  и

$$1 \pm \operatorname{Re} \mu \geq (1 + b)^{-1} |1 \pm \mu|, \quad \mu \in \bar{V}_0.$$

Полагая  $d = \operatorname{dist}(V_1, \partial V_2)$ , на основании теоремы Коши получаем

$$|\chi_+(\mu_1; \delta) - \chi_+(\mu_2; \delta)| \geq 1 - 2\delta(2\pi d^2)^{-1} \|l_1\|_{L_1(\partial V_2)}, \quad \mu_1, \mu_2 \in V_1, \quad (5.69)$$

$$|l_1(\mu)| \leq (2\pi d^2)^{-1} \|l_1\|_{L_1(\partial V_2)} \cdot |\mu \pm 1|, \quad \mu \in V_1. \quad (5.70)$$

Из (5.69) следует, что при

$$\delta \in (0, \pi d^2 / \|l_1\|_{L_1(\partial V_2)})$$

функция  $\chi_+(\mu; \delta)$  является однолистной в области  $V_1$ , в частности, выполняются условия (5.59) и  $\delta l'(\mu) \neq i$  для  $\mu \in \bar{U} = \bar{V}_0$ . Из (5.70) имеем оценку

$$|\delta l_1(\mu)| \leq \frac{\delta(b+1)}{2\pi d^2} \|l_1\|_{L_1(\partial V_2)} \cdot (1 \pm \operatorname{Re} \mu), \quad \mu \in \bar{V}_0,$$

откуда следует условие (5.60) для  $U = V_0$  и выполнение условия (5.67) для  $\mu \in \partial V_0$ ,  $\operatorname{Im} \mu \leq 0$  при достаточно малых  $\delta$  (с учетом уравнения кривой  $\partial V_0$ ). Следствие доказано.

Рассмотрим пример. Пусть функция

$$l(y) = \delta(1 + \cos(\pi y)), \quad |y| \leq 1. \quad (5.71)$$

Согласно [171, 172] функция  $l$  удовлетворяет условиям теоремы 1 при  $\delta \in (0, \delta_0)$ , где

$$\pi \delta_0 = 2\nu(\nu^2 - 1)^{-1} \approx 0,448, \quad (5.72)$$

где  $\nu > 1$  – единственный корень уравнения

$$\ln \nu = \frac{\nu + 1}{\nu - 1}, \quad \nu > 1.$$

При этом область  $U$  из теоремы 1 определяется соотношениями

$$U : \delta(1 + \cosh(\pi\tau) \cosh(\pi s)) < \tau, \quad \mu = s + i\tau, \quad |s| \leq 1.$$

Таким образом, аналогично соответствующим результатам для решений уравнения Гельмгольца [9, с. 16-19], [284, 394], получаем, что при  $\delta \in (0, \delta_0)$  для функций  $f \in \mathcal{A}(U)$ ,  $g \in \mathcal{A}(U)$  с условиями (3.135) справедливо двукратное разложение (5.55) с функцией  $l(y)$  из (5.71).

### 5.6 Ограниченная применимость гипотезы Рэлея в задаче об отражении волны Рэлея–Лэмба от криволинейного торца волновода

**5.6.1** Рассматривается плоская задача об отражении гармонической продольной волны Рэлея–Лэмба [91, § 4.2] от криволинейного торца полубесконечного однородного изотропного упругого слоя  $X > Hl(Y/d)$ ,  $|Y| < d$  со свободной от напряжений границей. Здесь функция  $l(y) = l(-y)$ ,  $y \in [-1, 1]$  и параметр  $H > 0$ , а временной множитель  $e^{-i\omega t}$  далее опускаем. Кроме того, будем использовать обозначения из § 4.3. Таким образом, рассматривается граничная задача

$$\begin{aligned} \Delta \vec{u} + (1 - 2\nu)^{-1} \nabla \operatorname{div} \vec{u} + G^{-1} \rho \omega^2 \vec{u} &= 0, \quad x > \delta l(y), \quad |y| < 1, \\ \sigma_y(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1) &= 0, \quad x > \delta l(1), \\ (\sigma_x + \sigma_x^i) n_x + (\tau_{xy} + \tau_{xy}^i) n_y &= 0, \quad (x, y) \in \Gamma_\delta, \\ (\tau_{xy} + \tau_{xy}^i) n_x + (\sigma_y + \sigma_y^i) n_y &= 0, \quad (x, y) \in \Gamma_\delta, \end{aligned} \quad (5.73)$$

где  $\delta = H/d$  и  $\sigma_x^i, \sigma_y^i, \tau_{xy}^i$  – поле напряжений падающей из бесконечности волны Рэлея–Лэмба, а кривая и нормаль к ней  $\vec{n} = (n_x, n_y)$  задаются выражениями

$$\Gamma_\delta = \{(x, y) : x = \delta l(y), |y| < 1\}, \quad (n_x, n_y) = \frac{(1, -\delta l'(y))}{(1 + \delta^2 l'^2(y))^{1/2}}.$$

Искомые напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  выражаются через смещения  $u_x, u_y$  согласно равенствам (2.78). Граничная задача (5.73) дополняется условиями излучения на бесконечности, конкретный вид которых здесь не важен.

При  $x > L := \delta \max l(y)$ ,  $|y| \leq 1$  отраженное поле напряжений допускает разложение в ряд по нормальным волнам

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \begin{pmatrix} U_1(\lambda_k, y) \\ U_2(\lambda_k, y) \\ U_3(\lambda_k, y) \end{pmatrix} e^{i\lambda_k x}, \quad \operatorname{Im} \lambda_k > 0, \quad (5.74)$$

где функции

$$\begin{aligned} U_1(\lambda, y) &= \frac{i}{2p_2} [(\lambda^2 + p_2^2)(\lambda^2 + \Omega_0^2) \sinh p_2 \cosh p_1 y - \\ &\quad - 2\lambda^2 p_1 p_2 \sinh p_1 \cosh p_2 y], \\ U_2(\lambda, y) &= -\frac{i}{4p_2} [(\lambda^2 + p_2^2)^2 \sinh p_2 \cosh p_1 y - 4\lambda^2 p_1 p_2 \sinh p_1 \cosh p_2 y], \\ U_3(\lambda, y) &= \frac{\lambda p_1 (\lambda^2 + p_2^2)}{2p_2} [\sinh p_2 \sinh p_1 y - \sinh p_1 \sinh p_2 y], \end{aligned} \quad (5.75)$$

и  $\lambda_k$  – корни дисперсионного определителя Рэлея–Лэмба:

$$\Delta(\lambda) = 4\lambda^2 p_1 p_2 \coth p_2 - (\lambda^2 + p_2^2)^2 \coth p_1$$

с  $\text{Im } \lambda_k \geq 0$ . Определение  $p_j = p_j(\lambda)$  и  $\Omega_0$  см. в § 4.3. При этом, в (5.74) для  $\text{Im } \lambda_k = 0$  выбирается один из корней  $\pm \lambda_k$  определителя  $\Delta(\lambda)$ , в соответствии с принятым, исходя из физической постановки задачи, принципом излучения на бесконечности. Далее, не уменьшая общности, считаем, что  $\lambda_k > 0$  при  $k = 1, \dots, N$  и  $\text{Im } \lambda_k > 0$  для  $k > N$ . Такая ситуация имеет место, например, когда условия излучения формулируются на основе принципа предельного поглощения и на данной частоте отсутствует явление “обратной” волны [11]. Тогда поле напряжений падающей волны задается выражением

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^i \\ \sigma_y^i \\ \tau_{xy}^i \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} U_1(-\lambda_{k_0}, y) \\ U_2(-\lambda_{k_0}, y) \\ U_3(-\lambda_{k_0}, y) \end{pmatrix} e^{-i\lambda_{k_0} x}, \quad (5.76)$$

где  $\lambda_{k_0}$  – один из множества положительных корней  $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$  и постоянная  $a_0 \neq 0$ .

Содержание гипотезы Рэлея в рассматриваемой ситуации заключается в предположении, что разложение (5.74) справедливо вплоть до граничной кривой  $\Gamma_\delta$ . Обзор работ, связанных с обсуждением гипотезы Рэлея как с теоретической так и с прикладной точек зрения, в различных задачах дифракции акустических и электромагнитных волн на неровных поверхностях имеется в [9, с. 13–32]. Отметим работы [401] и [393, 394], имеющие принципиальный характер. А именно, в [401] впервые строго установлен факт ограниченной применимости гипотезы Рэлея, а достаточные условия справедливости этой гипотезы в случае периодической поверхности впервые получены в статьях [393, 394].

В данном параграфе на основании методики статьи [401] исследуется вопрос о необходимых условиях справедливости гипотезы Рэлея в задаче об отражении волны Рэлея–Лэмба от криволинейного торца волновода. Для определенного класса аналитических функций  $l$ , описывающих криволинейный торец волновода, получено абстрактное утверждение о таких условиях. Приведен пример использования этого абстрактного утверждения для случая синусоидальной границы волновода.

**5.6.2** Пусть функция  $l$  является целой функцией переменного  $\mu \in \mathbb{C}$ . Предположим, что разложение (5.74) справедливо при всех  $x \geq \delta l(y)$ ,  $|y| \geq 1$ . Тогда из (5.74) для  $|y| \leq 1$  имеем равенства

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left\{ U_1(\lambda_k, y) - \delta l'(y) U_3(\lambda_k, y) \right\} e^{i\lambda_k \delta l(y)} = \\ & = -a_0 \left\{ U_1(-\lambda_{k_0}, y) - \delta l'(y) U_3(-\lambda_{k_0}, y) \right\} e^{-i\lambda_{k_0} \delta l(y)}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left\{ U_3(\lambda_k, y) - \delta l'(y) U_2(\lambda_k, y) \right\} e^{i\lambda_k \delta l(y)} = \\ & = -a_0 \left\{ U_1(-\lambda_{k_0}, y) - \delta l'(y) U_3(-\lambda_{k_0}, y) \right\} e^{-i\lambda_{k_0} \delta l(y)}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Дальнейшие рассуждения относительно справедливости разложения (5.77) связаны с выходом в комплексную плоскость. Для определенности рассмотрим первое из соотношений (5.77). Вводя для удобства обозначение  $\lambda_0 = -\lambda_{k_0}$ , определим функции

$$\begin{aligned} G(\lambda, \mu) &= U_1(\lambda, \mu) - \delta l'(\mu) U_3(\lambda, \mu), \quad \mu \in \mathbb{C}, \\ F_0(\mu) &= - \sum_{k=1}^N a_k G(\lambda_k, \mu) e^{i\lambda_k \delta l(\mu)}, \quad \mu \in \mathbb{C}, \\ F_1(\mu) &= \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k G(\lambda_k, \mu) e^{i\lambda_k \delta l(\mu)}, \quad \mu \in [-1, 1]. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Тогда первое из равенств (5.77) можно записать в виде

$$F_1(\mu) = F_0(\mu), \quad |\operatorname{Re} \mu| \leq 1, \quad \operatorname{Im} \mu = 0. \quad (5.79)$$

При этом  $F_0$  является целой функцией, а  $F_1$  согласно (5.78) определена на данном этапе только на отрезке  $[-1, 1]$ .

Таким образом, при наложенных условиях на функцию  $l$ , из предположения, что разложение (5.74) справедливо при всех  $x \geq \delta l(y)$ ,  $|y| \geq 1$ , вытекает, что функция  $F_1$  допускает аналитическое продолжение в комплексную плоскость. Для того, чтобы установить возможность такого аналитического продолжения ряда, определяющего функцию  $F_1$ , оценим величины коэффициентов  $a_k$  при  $k \rightarrow \infty$ , исходя из предположения о сходимости этого ряда на отрезке  $\mu \in [-1, 1]$ . Из этого предположения в качестве необходимого условия получаем соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k G(\lambda_k, y)| e^{-\operatorname{Im} \lambda_k \delta l(y)} = 0, \quad |y| \leq 1. \quad (5.80)$$

Далее, для корней определителя Рэля–Лэмба из верхней полуплоскости справедлива асимптотика [227]

$$\lambda_k^+ = \frac{1}{2} \ln 4\pi k + i\pi(k + m_0 - 1/4) + O(k^{-1} \ln k), \quad k \rightarrow \infty, \quad (5.81)$$

где  $m_0$  – некоторое целое число и считается, что

$$\{\lambda_k\} = \{\lambda_k^+\}_{k=1}^{\infty} \cup \{-\bar{\lambda}_k^+\}_{k=1}^{\infty}, \quad \operatorname{Re} \lambda_k^+ \geq 0.$$

Из (5.81), в частности, имеем оценки

$$|\operatorname{Re} \lambda_k| \leq c \ln k, \quad c_0 k \leq \operatorname{Im} \lambda_k \leq c_1 k, \quad k \geq N + 1, \quad (5.82)$$

с некоторыми положительными постоянными  $c$  и  $c_0, c_1$ . Подставляя асимптотическую формулу (5.81) в выражения (5.75) для функций  $U_1, U_3$ , можно получить при  $|y| < 1$  и  $k \rightarrow \infty$  соотношение (довольно громоздкие выкладки опускаем)

$$\begin{aligned} & |G(\lambda_k^+, y)| = \\ & = (\Omega_2^2 - \Omega_1^2) 2^{|y|-2} (1 + \delta^2 l'^2(y))^{1/2} (\pi k)^{2+(1+|y|)/2} [(1 - |y|) + O(k^{-|y|})]. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Тогда, вводя обозначение  $L_0 = \min l(y)$ ,  $|y| \leq 1$ , на основании соотношений (5.80)–(5.83) получаем, что для любого  $y \neq 0$  из интервала  $(-1, 1)$ , является верным равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| k^{2+(1+|y|)/2} e^{-c_1 k \delta (l(y) - L_0)} e^{-\operatorname{Im} \lambda_k \delta L_0} = 0,$$

откуда заключаем, что для любого  $\epsilon > 0$  выполняется соотношение

$$|a_k| = O\left(e^{\epsilon k} e^{\operatorname{Im} \lambda_k \delta L_0}\right), \quad k \rightarrow \infty. \quad (5.84)$$

Далее, согласно (5.82) имеем при  $k > N$  оценку

$$|e^{\pm p_j(\lambda_k) \mu} e^{i \lambda_k \delta l(\mu)}| \leq e^{c_2 |\mu|} e^{c |\operatorname{Im} \chi_{\pm}(\mu; \delta)| \ln k} e^{-\operatorname{Im} \lambda_k \operatorname{Re} \chi_{\pm}(\mu; \delta)}, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad (5.85)$$

где функции

$$\chi_{\pm}(\mu; \delta) = \delta l(\mu) \mp i \mu.$$

Тогда, на основании (5.78), (5.82), (5.84) и определения  $G(\lambda, \mu)$  получаем, что функция  $F_1$  аналитически продолжается в любую такую связную, симметричную относительно вещественной оси, окрестность  $U$  вещественного интервала  $I = \{y : l(y) > L_0, |y| < 1\}$ , для которой

$$\operatorname{Re} \chi_{\pm}(\mu; \delta) > \delta L_0, \quad \mu \in U. \quad (5.86)$$

При этом для любого  $\epsilon > 0$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} & |F_1(\mu)| \leq c(\epsilon) (1 + \delta |l'(\mu)|) e^{c_2 |\mu|} \times \\ & \times \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{\epsilon k} \left\{ e^{c |\operatorname{Im} \chi_{-}(\mu; \delta)| \ln k} e^{-c_0 (\operatorname{Re} \chi_{+}(\mu; \delta) - \delta L_0) k} + \right. \\ & \left. + e^{c |\operatorname{Im} \chi_{+}(\mu; \delta)| \ln k} e^{-c_0 (\operatorname{Re} \chi_{+}(\mu; \delta) - \delta L_0) k} \right\}, \quad \mu \in U. \end{aligned} \quad (5.87)$$

**Теорема 1.** Пусть  $l$  – четная целая функция экспоненциального типа и  $l(\pm 1) = 0$ . Предположим, что найдется такая связная кривая  $\gamma$ , выходящая из

интервала  $(-1, 1)$  и уходящая на бесконечность, для точек которой выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} l(\mu) > L_0, \quad \mu \in \gamma, \quad (5.88)$$

причем

$$\frac{\operatorname{Re} l(\mu)}{\operatorname{Im} l(\mu)} \rightarrow 0, \quad \frac{\operatorname{Im} l(\mu)}{|\mu|} \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow \infty, \quad \mu \in \gamma. \quad (5.89)$$

Тогда найдется такое  $\delta_0 > 0$ , что для любого  $\delta > \delta_0$  не существует таких постоянных  $a_0 \neq 0$  и  $a_k \in \mathbb{C}$ ,  $k \geq 1$  с оценкой (5.84), для которых выполняется равенство (5.79).

*Доказательство.* Из условия (5.89) получаем соотношение

$$|\mu|^{-1} \operatorname{Re} l(\mu) \rightarrow +\infty, \quad \mu \rightarrow \infty, \quad \mu \in \gamma.$$

Тогда с учетом условия (5.88) заключаем, что найдется такое  $\delta_0 > 0$ , для которого при всех  $\delta > \delta_0$  выполняется неравенство

$$\delta \operatorname{Re} l(\mu) > |\mu| + \delta_0 L_0, \quad \mu \in \gamma. \quad (5.90)$$

Тогда в силу непрерывности функций  $\chi_{\pm}(\mu; \delta)$  получаем, что для любого  $\delta > \delta_0$  найдется такое открытое множество комплексной плоскости  $U_{\delta}$  с включением  $\gamma \in U_{\delta}$ , для которого  $y_1, y_2 \in U_{\delta}$  при некоторых  $y_1, y_2 \in (-1, 1)$ ,  $y_1 \neq y_2$  и  $\operatorname{Re} \chi_{\pm}(\mu; \delta) > \delta L_0$  при  $\mu \in U_{\delta}$ . Тогда, в частности, функция  $F_1$  допускает аналитическое продолжение в область  $U_{\delta}$  и выполняется оценка (5.87). Покажем, что в этой ситуации справедливо соотношение

$$|F_1(\mu)| \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow \infty, \quad \mu \in \gamma. \quad (5.91)$$

Действительно, зафиксируем некоторые  $\epsilon > 0$  и достаточно малое  $\epsilon_0 > 0$ . Тогда при всех  $\mu \in \gamma$  с  $|\mu| \geq 1$ , таких, что выполняется неравенство

$$|\mu| + \delta |\operatorname{Im} l(\mu)| \leq \epsilon_0 \delta (\operatorname{Re} l(\mu) - L_0),$$

используя вытекающую из условий теоремы оценку  $|l'(\mu)| \leq e^{c_3 |\mu|}$  (справедливую в силу определения целой функции экспоненциального типа), получаем неравенство

$$\begin{aligned} |F_1(\mu)| &\leq c(\epsilon) e^{(c_2+c_3)|\mu|} \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{\epsilon k} e^{(c_0+c)\epsilon(|\mu|+\delta|\operatorname{Im} l(\mu)|)} e^{-c_0 k (\operatorname{Re} l(\mu) - L_0)} \leq \\ &\leq c(\epsilon) e^{(c_2+c_3)|\mu|} \sum_{k=1}^{\infty} e^{\epsilon k} e^{-(c_0/\epsilon_0 - c_0 - c)\epsilon k \delta |\mu|}, \end{aligned}$$

и, выбирая значение  $\epsilon_0 > 0$  из условия

$$r := c_0(\epsilon_0^{-1} - 1) - c - \epsilon \geq 2(c_2 + c_3)$$

получаем неравенство

$$|F_1(\mu)| \leq c(\epsilon) \frac{e^{(c_2+c_3)|\mu|} e^{-r|\mu|}}{1 - e^{-r|\mu|}}, \quad \mu \in \gamma,$$

откуда заключаем, что справедливо соотношение (5.91).

Так как  $\lambda_k \in \mathbb{R}$  при  $k = 0, 1, \dots, N$ , то, с учетом определения функции  $G(\lambda, \mu)$ , имеем при достаточно больших по модулю  $\mu \in \gamma$  оценку снизу

$$|F_0(\mu)| \geq |a_0 G(\lambda_0, \mu)| e^{-\lambda_0 \delta \operatorname{Im} l(\mu)} - e^{-c_3 |\mu|} \sum_{k=1}^N |a_k| e^{-\lambda_k \delta \operatorname{Im} l(\mu)}. \quad (5.92)$$

Далее, поскольку функция  $G(\lambda_0, \mu)$  является функцией экспоненциального типа, то найдутся такие постоянная  $c_4 > 0$  и последовательность  $r_n \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$  [109, с. 236], для которых выполняется оценка

$$\min_{|\mu|=r_n} |G(\lambda_0, \mu)| \geq e^{-c_4 r_n} \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.93)$$

Так как по предположению  $\lambda_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, N$  и  $\lambda_0 < 0$ , из условия (5.89) и неравенств (5.92), (5.93) получаем, что найдется такая последовательность точек  $\mu_n \in \gamma$  с  $|\mu_n| = r_n$ , для которой  $|F_0(\mu_n)| \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Таким образом,

$$\overline{\lim}_{\mu \rightarrow \infty, \mu \in \gamma} |F_0(\mu)| = \infty. \quad (5.94)$$

Тогда утверждение теоремы вытекает из сопоставления соотношений (5.91), (5.94) и (5.89) с учетом аналитичности функций  $F_0(\mu)$ ,  $F_1(\mu)$ ,  $\mu \in U_\delta$  и включения  $\gamma \in U_\delta$ .

Теорема доказана.

Таким образом, так как равенство (5.79) является следствием предположения о справедливости гипотезы Рэлея, то при выполнении условий на функцию  $l$  из теоремы 1 найдется такое  $\delta_0 > 0$ , для которого при любом  $\delta > \delta_0$  гипотеза Рэлея в рассматриваемой задаче теории упругости (5.73) не является справедливой.

**5.6.3** Приведем пример на использование доказанной теоремы. Рассмотрим, аналогично § 5, конкретный пример криволинейного торца волновода  $\Gamma_\delta$  с аналитической функцией экспоненциального типа:

$$l(\mu) = 1 + \cos \pi \mu. \quad (5.95)$$

Тогда для  $\mu = s + i\tau$  имеем выражения

$$\operatorname{Re} l(\mu) = 1 + \cos \pi s \cosh \pi \tau, \quad \operatorname{Im} l(\mu) = -\sin \pi s \sinh \pi \tau.$$

Для произвольного  $\alpha \in (0, 1/2)$  определим кривую

$$\gamma_\alpha = \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu = -\alpha(\operatorname{Im} \mu + 1)^{-1}, \operatorname{Im} \mu \geq 0\}. \quad (5.96)$$

Тогда  $\operatorname{Re} \mu \in (-1/2, 0)$  при  $\mu \in \gamma_\alpha$ , так что

$$\operatorname{Re} l(\mu) > 1, \quad \mu \in \gamma_\alpha, \quad (5.97)$$

и  $\operatorname{Im} l(\mu) > 0$  для  $\mu \in \gamma_\alpha$ . При этом имеем соотношения

$$\operatorname{Re} \mu = s \rightarrow 0, \quad \operatorname{Im} \mu = \tau \rightarrow +\infty, \quad \mu \rightarrow \infty, \quad \mu \in \gamma_\alpha,$$

и тогда для  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $\mu \in \gamma_\alpha$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{Re} l(\mu)}{\operatorname{Im} l(\mu)} &\geq \cot \pi |s| \coth \pi \tau \rightarrow +\infty, \\ \frac{\operatorname{Im} l(\mu)}{|\mu|} &\geq 2|s|(s^2 + \tau^2)^{-1/2} \sinh \pi \tau \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Оценки (5.97), (5.98) показывают (см. условие (5.89)), что функция  $l$ , определенная согласно (5.95), удовлетворяет условиям теоремы 1. Таким образом, найдется такое  $\delta_0 > 0$ , для которого при любом  $\delta > \delta_0$  предположение о продолжении разложения (5.74) вплоть до криволинейного участка границы  $x = \delta l(y)$ ,  $|y| < 1$  не является справедливым. Найдем указанное значение  $\delta_0$ . Для этого согласно (5.90), (5.96) требуется определить число  $\delta_\alpha > 0$ , исходя из условий

$$\delta(1 + \cos \pi s \cosh \pi \tau) > \tau, \quad s = -\alpha(\tau + 1)^{-1}, \quad \tau \geq 0, \quad \forall \delta > \delta_\alpha. \quad (5.99)$$

Тогда так как для  $\mu = s + i\tau \in \gamma_\alpha$  выполняется оценка  $\cos \pi s \geq 1 - 2\alpha$ , то неравенство (5.99) заведомо выполняется, если

$$\delta(1 + (1 - 2\alpha) \cosh \pi \tau) > \tau, \quad \tau \geq 0, \quad \forall \delta > \delta_\alpha. \quad (5.100)$$

При этом, в силу произвольности значения  $\alpha \in (0, 1/2)$  из определения (5.96), из (5.100) получаем, что число

$$\delta_0 = \inf_{\alpha \in (0, 1/2)} \delta_\alpha$$

определяется условием

$$\delta(1 + \cosh \pi \tau) > \tau, \quad \tau \geq 0, \quad \forall \delta > \delta_0. \quad (5.101)$$

В свою очередь, анализ условия (5.101) показывает (см. [393], [407]), что  $\pi \delta_0 \approx 0.448$  и  $\delta_0$  определяется согласно (5.72).

Таким образом, рассмотрение вопроса о необходимых условиях справедливости гипотезы Рэлея в задаче об отражении волны Рэлея–Лэмба от криволинейного торца волновода в форме синусоиды приводит к такому же результату, как в задаче о дифракции плоской акустической волны на периодической синусоидальной поверхности [401].

### 5.7 Однородные решения в задаче о равновесии упругого цилиндра

Рассмотрим конечный упругий цилиндр радиуса  $\rho_0$ , длины  $2H$ , находящийся под действием осесимметричных нормальных и касательных нагрузок на граничной поверхности. Далее считаем, что изотропный материал цилиндра характеризуется модулем сдвига  $G$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Помещая начало цилиндрической системы координат  $(\rho, \zeta, \omega)$  в центре цилиндра и рассматривая для простоты выкладок случай симметричной относительно плоскости  $\zeta = 0$  деформации цилиндра, записываем граничные условия в виде

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2Gf(z), \quad \tau_{rz} = 2Gg(z), \quad r = 1, \\ \sigma_z &= 2G\phi(r), \quad \tau_{rz} = \pm 2G\chi(r), \quad z = \pm h,\end{aligned}\tag{5.102}$$

где безразмерные координаты  $r = \rho/\rho_0$ ,  $z = \zeta/\rho_0$ ,  $h = H/\rho_0$ , причем  $f(-z) = f(z)$ ,  $g(-z) = -g(z)$ ,  $z \in (-h, h)$ . Радиальная  $u_r(r, z)$  и осевая  $u_z(r, z)$  компоненты безразмерного (отнесенного к  $\rho_0$ ) вектора смещений удовлетворяют уравнениям Ламе

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0, \\ \theta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{5.103}$$

Согласно методу однородных решений представление вектора смещений  $\vec{u} = \{u_r, u_z\}$ , являющегося решением граничной задачи (5.102)–(5.103), может быть двояким. Первое из них основано на разложении по однородным решениям Шиффа-Проконова [205, 411] для свободной от напряжений боковой поверхности  $r = 1$ :

$$\begin{aligned}u_r(r, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m \psi_r(r, \beta_m) \cos \beta_m z + u_r^c(r, z), \\ u_z(r, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m \psi_z(r, \beta_m) \sin \beta_m z + u_z^c(r, z),\end{aligned}\tag{5.104}$$

где функции

$$\psi_r(r, \beta) = \{-\beta r I_1(\beta) I_0(\beta r) + [2(1 - \nu) I_1(\beta) + \beta I_0(\beta)] I_1(\beta r)\} / \beta^2, \quad (5.105)$$

$$\psi_z(r, \beta) = \{\beta r I_1(\beta) I_1(\beta r) + [2(1 - \nu) I_1(\beta) - \beta I_0(\beta)] I_0(\beta r)\} / \beta^2,$$

и  $\beta_m$  – корни уравнения Шиффа

$$t(\beta) := \beta^2 [I_0^2(\beta) - I_1^2(\beta)] - 2(1 - \nu) I_1^2(\beta) = 0, \quad (5.106)$$

расположенные в верхней полуплоскости и занумерованные в порядке возрастания их модулей, причем  $\beta_0 = 0$  и  $\text{Im } \beta_m > 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . При этом частное решение  $u^c = \{u_r^c, u_z^c\}$  “снимает” неоднородные граничные условия на боковой поверхности цилиндра и может быть построено в явном виде различными способами. Один из таких способов состоит в рассмотрении периодического деформирования бесконечного цилиндра  $0 \leq r \leq 1$ ,  $|z| < \infty$  с периодически продолженными нормальной  $f$  и касательной  $g$  нагрузками.

Второе представление решения граничной задачи (5.102)–(5.103) в рамках метода однородных решений основано на разложении вектора смещений по функциям Дуголла-Лурье [159, 348] в случае свободных от напряжений торцов цилиндра  $z = \pm h$ :

$$\begin{aligned} u_r(r, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} l_m v_r(z, \xi_m) J_1(\xi_m r) + u_r^s(r, z), \\ u_z(r, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} l_m v_z(z, \xi_m) J_0(\xi_m r) + u_z^s(r, z), \end{aligned} \quad (5.107)$$

где функции

$$\begin{aligned} \xi^2 v_r(z, \xi) &= \\ &= \xi z \sinh h\xi \sinh hz + ((1 - 2\nu) \sinh h\xi - h\xi \cosh h\xi) \cosh \xi z, \\ \xi^2 v_z(z, \xi) &= \\ &= -\xi z \sinh h\xi \cosh hz + [2(1 - 2\nu) \sinh h\xi + h\xi \sinh h\xi] \sinh \xi z, \end{aligned} \quad (5.108)$$

а  $\xi_m$  – корни дисперсионного уравнения Дуголла:

$$\Delta(\xi) := \sinh 2h\xi + 2h\xi = 0, \quad (5.109)$$

расположенные в верхней полуплоскости  $\text{Im } \xi \geq 0$  и пронумерованные в порядке возрастания их модулей, так что  $\xi_0 = 0$  и  $\text{Im } \xi_m > 0$  при  $m = 1, 2, \dots$ . Частное решение  $u^s = \{u_r^s, u_z^s\}$  позволяет сделать однородными исходные граничные условия на торцах цилиндра  $z = \pm h$ . Такое решение  $u^s$  может быть

построено на основании использования известных решений для бесконечного слоя [159].

Пусть  $\sigma_z^c$ ,  $\sigma_r^c$ ,  $\tau_{rz}^c$  и  $\sigma_z^s$ ,  $\sigma_r^s$ ,  $\tau_{rz}^s$  – поля напряжений, соответствующие векторам смещений  $u^c$  и  $u^s$  соответственно. Тогда выполнение остальных граничных условий из (5.102), при использовании представления (5.104) или, соответственно, представления (5.107), непосредственным образом приводит к функциональным уравнениям

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} c_m \{ \beta_m r I_1(\beta_m) I_1(\beta_m r) - \\ & - [\beta_m I_0(\beta_m) - 2I_1(\beta_m)] I_0(\beta_m r) \} / \beta_m \cos \beta_m h = \\ & = \phi(r) - \frac{\sigma_z^c(r, h)}{2G}, \end{aligned} \quad (5.110)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} c_m [r I_1(\beta_m) I_0(\beta_m r) - I_0(\beta_m) I_1(\beta_m r)] \sin \beta_m h = \\ & = \chi(r) - \frac{\tau_{rz}^c(r, h)}{2G}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} l_m \{ \xi_m^{-2} J_1(\xi_m) [\xi_m z \sinh \xi_m h \sinh \xi_m z + \\ & + [(1 - 2\nu) \sinh \xi_m h - \xi_m h \cosh \xi_m h] \cosh \xi_m z] + \\ & + \xi_m^{-1} J_0(\xi_m) [\xi_m z \sinh \xi_m h \sinh \xi_m z + \\ & + (\sinh \xi_m h - \xi_m h \cosh \xi_m h) \cosh \xi_m z] \} = \\ & = f(z) - \frac{\sigma_z^s(1, z)}{2G}, \end{aligned} \quad (5.111)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} l_m (z \sinh \xi_m h \cosh \xi_m z - h \cosh \xi_m h \sinh \xi_m z) J_1(\xi_m) = \\ & = g(z) - \frac{\tau_{rz}^s(1, z)}{2G}. \end{aligned}$$

При этом определение комплекснозначных коэффициентов  $c_m$ ,  $l_m$ , удовлетворяющих соотношениям (5.110) или (5.111), составляет основную трудность при практической реализации схемы метода однородных решений. В данном параграфе излагается оригинальный подход к определению этих коэффици-



ентов, основанный на аналитической связи между представлениями решений граничных задач теории упругости по методам суперпозиции и однородных решений.

Пусть  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$  – положительные корни функции Бесселя  $J_1(\lambda)$  и  $k_n = \pi n/h$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , так что справедливы разложения

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos k_n z, & g(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin k_n z, \\ \phi(r) &= \phi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j J_0(\lambda_j r), & \chi(r) &= \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j J_1(\lambda_j r) \end{aligned} \quad (5.112)$$

с известными выражениями для коэффициентов этих разложений. Тогда согласно общей схеме метода суперпозиции компоненты вектора смещений можно представить в виде

$$\begin{aligned} u_r &= Br + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \psi_r(r, k_n) \cos k_n z - \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j h \nu_r(z, \lambda_j) J_1(\lambda_j r)}{4 J_0(\lambda_j) \sinh^2 \lambda_j h} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\chi_j J_1(\lambda_j r) \cosh \lambda_j z}{\lambda_j \sinh \lambda_j h} - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n I_1(k_n r) \cos k_n z}{k_n I_1(k_n)}, \\ u_z &= Az + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \psi_z(r, k_n) \sin k_n z - \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j h \nu_z(z, \lambda_j) J_0(\lambda_j r)}{4 J_0(\lambda_j) \sinh^2 \lambda_j h} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\chi_j J_0(\lambda_j r) \sinh \lambda_j z}{\lambda_j \sinh \lambda_j h} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n I_0(k_n r) \cos k_n z}{k_n I_1(k_n)}, \end{aligned} \quad (5.113)$$

где  $x_n$ ,  $y_n$  ( $n, j = 1, 2, \dots$ ) – неизвестные коэффициенты и постоянные

$$A = \frac{1-2\nu}{1-3\nu} \left[ \phi_0 + \frac{2}{h} \int_0^h z g(z) dz - 2\nu f_0 - \frac{2\nu}{h} \int_0^1 r^2 \chi(r) dr \right],$$

$$B = \frac{1-2\nu}{1-3\nu} \left[ -\phi_0 - \frac{2}{h} \int_0^h z g(z) dz + (1-\nu) f_0 + \frac{(1-\nu)}{h} \int_0^1 r^2 \chi(r) dr \right].$$

Поле напряжений, соответствующее представлению (5.113), удовлетворяет граничным условиям (5.102) для касательных напряжений. Из граничного условия

для  $\sigma_r$  получаем следующее соотношение между неизвестными  $x_n$  и  $y_j$ :

$$x_n = \frac{1}{t_n} \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j k_n^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} + \Phi_n \right], \quad (5.114)$$

где последовательности

$$t_n = \frac{t(k_n)}{4k_n^2 I_1^2(t_n)}, \quad \Phi_n = (-1)^n f_n - \frac{(-1)^n g_n}{k_n} \left[ 1 - \frac{k_n I_0(k_n)}{I_1(k_n)} \right] - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\lambda_j \chi_j J_0(\lambda_j)}{h(k_n^2 + \lambda_j^2)},$$

а из граничного условия (5.102) для  $\sigma_z$  находим

$$y_j = \frac{1}{s_j} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n \lambda_j^2}{(k_n^2 + \lambda_j^2)^2} + \Psi_j \right], \quad (5.115)$$

где

$$s_j = \frac{h\Delta(\lambda_j)}{8\lambda_j \sinh^2 \lambda_j h}, \quad \Psi_j = -\phi_j J_0(\lambda_j) - \chi_j J_0(\lambda_j) \coth \lambda_j h + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n k_n g_n}{(k_n^2 + \lambda_j^2)}.$$

В работе [87] было доказано, что система алгебраических уравнений (5.114), (5.115) является регулярной и при выполнении условий  $f, g \in C^3[-h, h]$ ,  $\phi, \chi \in C^3[0, 1]$ ,  $g(h) = \chi(1)$  система имеет единственное ограниченное решение  $x_n, y_j$ . Более детальное исследование этой системы согласно методике, изложенной в § 3.2, позволяет установить, что для любого  $\epsilon > 0$  справедливы асимптотические выражения для неизвестных

$$x_n = a + O(n^{-1+\epsilon}), \quad n \rightarrow \infty, \quad y_j = a + O(j^{-1+\epsilon}), \quad j \rightarrow \infty, \quad (5.116)$$

где  $a$  – некоторая постоянная, зависящая от граничных данных в равенствах (5.102).

Введем в рассмотрение вектор-функции

$$\begin{aligned} \psi(r, z; k) &= \left\{ \begin{array}{l} \psi_r(r, k) \cos kz \\ \psi_z(r, k) \sin kz \end{array} \right\}, \\ v(r, z; \lambda) &= \left\{ \begin{array}{l} v_r(z, \lambda) J_1(\lambda r) \\ v_z(z, \lambda) J_0(\lambda r) \end{array} \right\}, \\ Q(r, z) &= \left\{ \begin{array}{l} Br \\ Az \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (5.117)$$

каждая из которых является решением однородных уравнений Ламе (5.103). Используя равенства (5.117) и выражая вектор смещений (5.113) только через

неизвестные  $y_j$ , получаем

$$\begin{aligned}
 u &= u_0^c + u^c, \\
 u^c &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2 f_n}{t(k_n)} \psi(r, z; k_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n g_n}{k_n I_1(k_n)} v(r, z; ik_n) - \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n g_n (I_1(k_n) - k_n I_0(k_n))}{t(k_n) I_1(k_n)} \psi(r, z; k_n) + Q(r, z), \\
 u_0^c &= \sum_{j=1}^{\infty} y_j \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k_n^4}{t(k_n) (k_n^2 + \lambda_j^2)^2} \psi(r, z; k_n) \right\} + \\
 &+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\chi_j}{J_0(\lambda_j) \sinh \lambda_j h} \psi(r, z; i\lambda_j) - \\
 &- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j h}{4J_0(\lambda_j) \sinh^2 \lambda_j h} v(r, z; \lambda_j) - \\
 &- \sum_{j=1}^{\infty} 2\lambda_j \chi_j J_0(\lambda_j) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k_n^2}{ht(k_n) (k_n^2 + \lambda_j^2)} \psi(r, z; k_n) \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.118}$$

Кроме того, подставляя выражения  $y_j$  через  $x_n$  из равенств (5.115) в равенства (5.113), получаем выражения

$$u = u_0^s + u^s, \text{ eq : 5.7.18a} \tag{5.119}$$

$$\begin{aligned}
 u^s &= Q(r, z) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\chi_j}{J_0(\lambda_j) \sinh \lambda_j h} \psi(r, z; i\lambda_j) + \\
 &+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\lambda_j \chi_j \coth \lambda_j h}{\Delta(\lambda_j)} v(r, z; \lambda_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\lambda_j \phi_j}{\Delta(\lambda_j)} v(r, z; \lambda_j), \\
 u_0^s &= - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\lambda_j^3 v(r, z; \lambda_j)}{\Delta(\lambda_j) J_0(\lambda_j) (k_n^2 + \lambda_j^2)} \right\} + \\
 &+ \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n \psi(r, z; k_n) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n g_n}{k I_1(k_n)} v(r, z; ik_n) - \\
 &- 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j v(r, z; \lambda_j)}{\Delta(\lambda_j) J_0(\lambda_j) (k_n^2 + \lambda_j^2)} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.120}$$

Отметим что вектор-функция  $u^c$  удовлетворяет граничным условиям (5.102) на боковой поверхности цилиндра, а вектор-функция  $u^s$  – граничным условиям (5.102) на торцах цилиндрической поверхности. Таким образом, вектор-функции  $u_0^c$ ,  $u_0^s$  допускают разложения в ряды по соответствующим одно-

родным решениям (5.104), (5.107):

$$u_0^c = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \psi(r, z; \beta_m), \quad (5.121)$$

$$u_0^s = \sum_{m=0}^{\infty} l_m v(r, z; \xi_m). \quad (5.122)$$

Для перехода от представления (5.118) функции  $u_0^c$  к представлению (5.121) используем преобразование Зоммерфельда–Ватсона по отношению к внутренним суммам в двойных рядах. Эти суммы имеют вид

$$S_p(r, z; \lambda_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k_n^{2p}}{t(k_n)(k_n^2 + \lambda_j^2)^p} \psi(r, z; k_n), \quad p = 1, 2. \quad (5.123)$$

В силу четности по  $k$  функций  $t(k)$ ,  $\psi(r, z; k)$  на основании теоремы Коши о вычетах имеем равенства

$$\begin{aligned} S_p(r, z; \lambda_j) &= \\ &= -\frac{h}{2} S_{0,p}(r, z; \lambda_j) - \frac{h}{2\pi i} \int_{i\delta-\infty}^{i\delta+\infty} \frac{\mu^{2p} \psi(r, z; \mu)}{t(\mu)(\mu^2 + \lambda_j^2)^p \sin h\mu} d\mu, \end{aligned} \quad (5.124)$$

где вычеты в точке  $\mu = 0$ :

$$\begin{aligned} S_{0,1}(r, z; \lambda_j) &= \operatorname{Res}_{\mu=0} \frac{\mu^2 \psi(r, z; \mu)}{t(\mu)(\mu^2 + \lambda_j^2) \sin h\mu} = \\ &= \frac{1}{(1+\nu)h\lambda_j^2} \begin{pmatrix} (1-\nu)r \\ -2\nu z \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.125)$$

$$S_{0,2}(r, z; \lambda_j) = \operatorname{Res}_{\mu=0} \frac{\mu^4 \psi(r, z; \mu)}{t(\mu)(\mu^2 + \lambda_j^2)^2 \sin h\mu} = 0.$$

Значение параметра  $\delta > 0$  выбрано таким образом, чтобы в полосе  $|\operatorname{Im} \mu| \leq \delta$  функции  $\mu^2 + \lambda_j^2$  и  $t(\mu)$ ,  $\mu \neq 0$ , не имели нулей. Замыкая контур интегрирования в интеграле (5.124) через верхнюю полуплоскость по последовательности контуров

$$\Gamma_m = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = \pi(m + 1/2), \operatorname{Im} \mu \geq 0\}$$

и применяя теорему о вычетах с использованием известных оценок функций  $\psi(r, z; \mu)$ ,  $t(\mu)$  на  $\Gamma_m$  (см. [205]), получаем

$$S_p(r, z; \lambda_j) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^{2p}}{t(\beta_m)(\beta_m^2 + \lambda_j^2)^p} \psi(r, z; \beta_m) - \frac{h}{2} S_{0,p}(r, z; \lambda_j) -$$

$$- h \operatorname{Res}_{\mu=i\lambda_j} \frac{\mu^{2p}\psi(r, z; \mu)}{t(\mu)(\mu^2 + \lambda_j^2)^p \sin h\mu}. \quad (5.126)$$

При этом, проводя непосредственный подсчет значений вычетов для  $p = 1, 2$  в точках  $i\lambda_j$  с использованием (5.105), (5.106) записываем выражения

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{\mu=i\lambda_j} \frac{\mu^2\psi(r, z; \mu)}{t(\mu)(\mu^2 + \lambda_j^2) \sin h\mu} &= -\frac{\psi(r, z; i\lambda_j)}{2\lambda_j J_0(\lambda_j) \sinh \lambda_j h}, \\ \operatorname{Res}_{\mu=i\lambda_j} \frac{\mu^4\psi(r, z; \mu)}{t(\mu)(\mu^2 + \lambda_j^2)^2 \sin h\mu} &= -\frac{v(r, z; \lambda_j)}{4J_0(\lambda_j) \sinh^2 \lambda_j h}. \end{aligned} \quad (5.127)$$

Таким образом, на основании формул (5.118 и (5.123)–(5.127) находим для  $u_0^c$  разложение по однородным цилиндрическим решениям (5.121) с коэффициентами

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{2}{1+\nu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\chi_j J_0(\lambda_j)}{h\lambda_j} = -\frac{2}{(1+\nu)h} \int_0^1 r^2 \chi(r) dr, \\ c_m &= -\frac{h\beta_m^4}{t'(\beta_m) \sin \beta_m h} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_j}{(\beta_m^2 + \lambda_j^2)^2} + \\ &+ \frac{2\beta_m^2}{t'(\beta_m) \sin \beta_m h} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j \chi_j J_0(\lambda_j)}{\beta_m^2 + \lambda_j^2}, \end{aligned} \quad (5.128)$$

где

$$t'(\beta_m) = 2\beta_m I_0'(\beta_m) - 4(1-\nu)I_0(\beta_m)I_1(\beta_m) + 2(1-\nu)I_1^2(\beta_m)/\beta_m.$$

Аналогичным образом можно получить и разложение (5.122). Здесь коэффициенты разложения  $l_m$  имеют вид

$$\begin{aligned} l_0 &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n g_n}{hk_n} = -\frac{1}{h^2} \int_0^h zg(z) dz, \\ l_m &= \frac{2\xi_m^3}{\Delta'(\xi_m)J_1(\xi_m)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{(k_n^2 + \xi_m^2)^2} + \\ &+ \frac{4\xi_m}{\Delta'(\xi_m)J_1(\xi_m)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k_n g_n}{k_n^2 + \xi_m^2}, \end{aligned} \quad (5.129)$$

где  $\Delta'(\xi_m) = 4 \cosh^2 \xi_m h$ .

Таким образом, коэффициенты в обоих разложениях вектора смещений по однородным решениям можно выразить через решение одной и той же бесконечной алгебраической системы уравнений (5.114), (5.115). При этом, на основании оценок (5.116) при ее практическом решении можно использовать метод улучшенной редукции.

## ГЛАВА 6

### МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ. ДИНАМИЧЕСКИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КРУГЛОГО ШТАМПА НА УПРУГОМ ПОЛУПРО- СТРАНСТВЕ

В динамике сооружений необходимо учитывать взаимодействие их фундаментов с грунтовым основанием. Для ряда сооружений фундамент может рассматриваться в расчетной схеме как сплошной жесткий, а движение отдельного фундамента при расчете можно разделить на вертикальное и горизонтально-вращательное [222].

В первых работах для динамических задач задавали упрощенные граничные условия и распределение контактных напряжений. При развитии инженерных методов рассматривалось распределение заданной формы – равномерное, изменяющееся линейно, параболическое, статическое распределение для упругого полупространства и другие.

Статическое решение задач для круглого штампа на упругом полупространстве для различных нагрузок на штамп приведено в работах [2, 100, 275] и др. Точное статическое решение было использовано R. Y. S. Pak и J.-D. M. Saphores в [400].

В работе [100, с. 87–89], отмечена необходимость учета связанности горизонтальных и нормальных перемещений и напряжений под штампом на упругом основании.

Обзор методов решения контактных задач для площади контакта, близкой к круговой, был выполнен В. И. Моссаковским и А. Б. Ковурой [180].

Динамические контактные задачи для круглого штампа на деформируемом инерционном полупространстве рассматривались большей частью в условиях осевой симметрии (вертикальные и крутильные колебания).

Задачи о вертикальных колебаниях круглого жесткого штампа на упругом полупространстве при действии статических и гармонических нагрузок рассматривались в работах G. M. L. Gladwell [355, 356]. Для динамических нагрузок представлен ряд приближенных решений.

Имеется ряд работ, например, Н. М. Бородачева [27–29], О. Я. Шехтер [294, 296], F. R. Richart Jr и R. V. Whitman [403], в которых с разной степенью

приближения изучены горизонтальные и вращательные гармонические колебания жесткого круглого штампа на полуограниченном основании.

Исходные уравнения и методика решения в случае неосесимметричных граничных условий (см. § 1.2) были представлены для основания круглого штампа в виде упругого полупространства в статьях К. Sezawa [420] и G. N. Bycroft [332], R. N. Arnold, G. N. Bycroft, G. B. Warburton [312], H. Schmidt и S. Krenk [413], а также в монографиях А. И. Лурье [160], J. D. Achenbach [306] и др.

Взаимодействие круглого штампа с упругим слоем на полупространстве исследовано J. E. Lucio [390].

Решение ряда задач динамики сооружений при сложных динамических нагрузках, включая сейсмические и взрывные, может быть получено методами, описанными в учебном пособии Н. С. Ремез с соавт. [214, 215].

В монографии В. М. Сеймова с соавт. [238] и работе Н. Schmidt и S. Krenk [412] представлены решения методом ортогональных полиномов задач об осесимметричных вертикальных колебаниях круглой плиты конечной жесткости на упругом полупространстве, а в [413] – для других нагрузок. В статье N. Gucunski, R. Peek [366] при решении аналогичной задачи использован метод конечных разностей.

Использование метода ортогональных полиномов в динамических контактных задачах для расчета динамики незаглубленных фундаментов с плоской подошвой получило развитие в работах В. М. Сеймова [230, 233, 238], А. Н. Трофимчука, А. М. Гомилко, И. В. Ловцова и др. [26, 267].

Решение для круглого жесткого фундамента с осесимметричным надфундаментным строением, как жестким, так и гибким (цилиндром и многомассовой системой) на упругом полупространстве представлено в работах [231, 237, 264]. На основе этого были проведены численные исследования задач о колебаниях морских гравитационных платформ с учетом взаимодействия цилиндрического корпуса и круглого фундамента с водой и с упругим основанием [102, 194, 234–236, 239, 240].

На этой основе решение задачи методом ортогональных полиномов о горизонтальных, вращательных и связанных горизонтально-вращательных колебаниях круглого в плане штампа на упругом полупространстве было представлено в статье [232], оно приведено ниже в § 6.1.

Ряд соотношений, используемых здесь при решении задач, взяты из справочной литературы [140, 208, 245] и др.

### **6.1 Нестационарные неосесимметричные контактные задачи для круглого штампа на упругом полупространстве**

При решении динамической контактной задачи необходимо определить перемещения границы полупространства  $u, v, w$  (соответственно в радиальном,

азимутальном и вертикальном направлениях) при действии распределенных нормальной и касательной нагрузок на участке границы.

Решение задач теории упругости для уравнений в цилиндрических координатах при неосесимметричных граничных условиях рассматривалось в работах [87, 160, 306, 400] и др.

Применяя к уравнениям (1.23) преобразование Лапласа по времени, получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \beta^2) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \beta^2 (\nabla^2 - s^2) \bar{w} = 0; \\ (1 - \beta^2) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} + \beta^2 (\nabla^2 - s^2) \bar{u} - \beta^2 \left( \frac{\bar{u}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} \right) = 0; \\ (1 - \beta^2) \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \varphi} + \beta^2 (\nabla^2 - s^2) \bar{v} - \beta^2 \left( \frac{\bar{v}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (6.1)$$

где  $s$  – параметр преобразования Лапласа (см. п. 1.6.2).

Используем общее решение К. Sezawa [420] трехмерных волновых уравнений для однородного изотропного упругого полупространства в цилиндрических координатах в случае гармонических воздействий при неосесимметричных колебаниях. Это решение для уравнений (6.1) при разложении по угловой координате имеет вид

$$\bar{w}(r, \varphi, z, s) = \int_0^{\infty} \bar{w}^*(r, \varphi, z, s, \xi) d\xi, \quad (6.2)$$

включая аналогичные интегральные выражения для  $\bar{u}$  и  $\bar{v}$ .

Согласно [312, 420] решение уравнений (6.1) в перемещениях с использованием вспомогательных функций (6.2) представляется формулами

$$\bar{u}^* = \left\{ -[B \alpha_1 \exp(-z \alpha_1) + C \alpha_2 \exp(-z \alpha_2)] \xi J_m'(r \xi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} D \exp(-z \alpha_2) J_m(r \xi) \right\} \cos(m \varphi); \quad (6.3)$$

$$\bar{v}^* = \left\{ \frac{1}{r} m [B \exp(-z \alpha_1) + C \alpha_2 \exp(-z \alpha_2)] J_m(r \xi) - \right. \\ \left. - D \exp(-z \alpha_2) \xi J_m'(r \xi) \right\} \sin(m \varphi); \quad (6.4)$$

$$\bar{w}^* = [B \alpha_1 \exp(-z \alpha_1) + C \alpha_2 \exp(-z \alpha_2)] J_m(r \xi) \cos(m \varphi), \quad (6.5)$$



где  $B, C, D$  – константы, определяемые из граничных условий;

$$\alpha_1 = \sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2}; \quad \alpha_2 = \sqrt{\xi^2 + s^2}, \quad (6.6)$$

а  $J'_m(r\xi)$  – производная функции Бесселя 1-го рода по радиусу.

Для соответствующих функций напряжений получены выражения

$$\bar{\sigma}_z^* = -\mu [\chi B \exp(-z \alpha_1) + 2 \xi^2 \alpha_2 C \exp(-z \alpha_2)] J_m(r\xi) \cos(m \varphi); \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{zr}^* = \mu \left\{ [2\alpha_1 B \exp(-z \alpha_1) + \chi C \exp(-z \alpha_2)] J'_m(r\xi) - \right. \\ \left. - \frac{m}{r} \alpha_2 D \exp(-z \alpha_2) J_m(r\xi) \right\} \cos(m \varphi); \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{z\varphi}^* = \mu \left\{ - [2\alpha_1 B \exp(-z \alpha_1) + \chi C \exp(-z \alpha_2)] \frac{m}{r} J_m(r\xi) - \right. \\ \left. - \alpha_2 D \exp(-z \alpha_2) J'_m(r\xi) \right\} \sin(m \varphi), \end{aligned} \quad (6.9)$$

где  $\chi = 2\xi^2 + s^2$ .

Учитывая соотношения для функций Бесселя 1-го рода и их производных

$$\begin{aligned} \frac{m}{r} J_m(r\xi) &= \frac{\xi}{2} [J_{m-1}(r\xi) + J_{m+1}(r\xi)]; \\ \xi J'_m(r\xi) &= \frac{\xi}{2} [J_{m-1}(r\xi) - J_{m+1}(r\xi)], \end{aligned} \quad (6.10)$$

получаем для рассматриваемой задачи функции перемещений  $\bar{u}^*$ ,  $\bar{v}^*$  и функций напряжений  $\bar{\tau}_{zr}^*$ ,  $\bar{\tau}_{z\varphi}^*$  в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}^* &= \frac{1}{2} \xi \left[ (-B - \alpha_2 C + D) J_{m-1}(r\xi) + \right. \\ &\quad \left. + (B + \alpha_2 C + D) J_{m+1}(r\xi) \right] \cos(m \varphi); \\ \bar{v}^* &= \frac{1}{2} \xi \left[ (B - \alpha_2 C - D) J_{m-1}(r\xi) + \right. \\ &\quad \left. + (B + \alpha_2 C + D) J_{m+1}(r\xi) \right] \sin(m \varphi); \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{zr}^* &= \mu \frac{1}{2} \xi \left[ \epsilon_1 J_{m-1}(r\xi) - \epsilon_2 J_{m+1}(r\xi) \right] \cos(m \varphi); \\ \bar{\tau}_{z\varphi}^* &= \mu \frac{1}{2} \xi \left[ -\epsilon_1 J_{m-1}(r\xi) - \epsilon_2 J_{m+1}(r\xi) \right] \sin(m \varphi), \end{aligned} \quad (6.12)$$

где введены постоянные

$$\epsilon_1 = 2\alpha_1 B + \chi C - \alpha_2 D, \quad \epsilon_2 = 2\alpha_1 B + \chi C + \alpha_2 D.$$

Рассмотрим отдельные виды несимметричных нагрузок, распределенных по круговой площадке границы упругого полупространства.

### 6.1.1 Перемещения при однонаправленной горизонтальной нагрузке

Пусть по круговой области границы упругого полупространства действуют касательные напряжения  $\tau_x(r, t)$ , направленные вдоль оси  $Ox$  (рис. 6.1). Определим горизонтальные вдоль оси  $O\bar{x}$  и вертикальные перемещения поверхности под распределенной нагрузкой при малых колебаниях. В этом случае в формулах (6.11), (6.12) для перемещений и напряжений следует положить  $m = 1$ . На границе полупространства при  $z = 0$  и  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  должны выполняться условия

$$\sigma_z = 0 \quad (0 \leq r \leq \infty); \quad (6.13)$$

$$\begin{cases} \tau_{r\varphi} = -\tau_x(r, t), & (0 \leq r \leq 1); \\ \tau_{r\varphi} = 0, & (1 < r < \infty), \end{cases} \quad (6.14)$$

из которых находятся константы  $B, C$  и  $D$ . Здесь  $\tau_{r\varphi} = \sqrt{\tau_{zr}^2 + \tau_{z\varphi}^2}$ .

Полагая  $\epsilon_2 = 0$ , из первого равенства из (6.14) получаем

$$\frac{\mu}{2} \int_0^{\infty} (2\alpha_1 B + \chi C - \alpha_2 D) \xi J_0(r\xi) d\xi = -\tau_x. \quad (6.15)$$

Левая часть равенства (6.15) представляет собой преобразование Ханкеля нулевого порядка. Тогда, после применения формулы обращения (1.133), получаем уравнение относительно  $B, C, D$ :

$$2\alpha_1 B + \chi C - \alpha_2 D = -\tilde{\tau}_x, \quad (6.16)$$

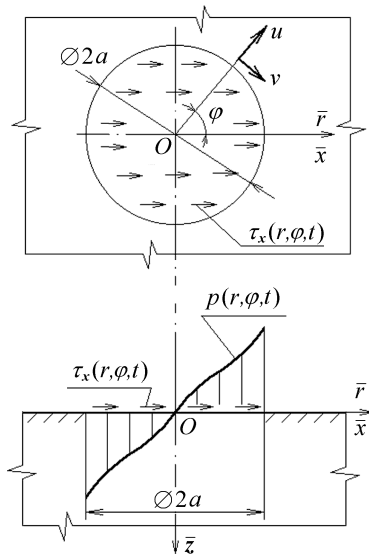


Рис. 6.1. Действие распределенных нормальной и касательной нагрузок на круговой площадке

где

$$\tilde{\tau}_x(\xi, s) = \int_0^1 \bar{\tau}_x(r, s) r J_0(r, \xi) dr. \quad (6.17)$$

Таким образом, из системы уравнений

$$\begin{aligned} \chi B + 2\xi^2 \alpha_2 C &= 0; \\ 2\alpha_1 B + \chi C + \alpha_2 D &= 0; \\ 2\alpha_1 B + \chi C - \alpha_2 D &= -\tilde{\tau}_x(\xi, s) \end{aligned} \quad (6.18)$$

получены выражения для постоянных

$$\begin{aligned} B &= \frac{\xi^2 \alpha_2}{F(\xi, s)} \tilde{\tau}_x; \\ C &= \frac{\chi}{2F(\xi, s)} \tilde{\tau}_x; \\ D &= \frac{1}{2\alpha_2} \tilde{\tau}_x \end{aligned} \quad (6.19)$$

с определителем

$$F(\xi, s) = \chi^2 - 4\xi^2 \alpha_1 \alpha_2, \quad (6.20)$$

представляющим собой функцию Рэлея.

Из формул (6.11) и соответствующего интеграла из (6.2) определяем горизонтальные перемещения  $u_x$  вдоль оси  $Ox$

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \xi [(-B - \alpha_2 C + D) J_0(r\xi) + (B + \alpha_2 C + D) J_2(r\xi)] d\xi = \bar{u}_x;$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \xi [(B + \alpha_2 C - D) J_0(r\xi) + (B + \alpha_2 C + D) J_2(r\xi)] d\xi = -\bar{u}_x,$$

откуда находим

$$\begin{aligned} \bar{u}_x(r, 0, s) &= \frac{a}{2\mu} \int_0^\infty (-B - \alpha_2 C - D) \xi J_0(r\xi) d\xi = \\ &= \frac{a}{2\mu} \int_0^\infty \left[ \frac{s^2 \alpha_2}{F(\xi, s)} + \frac{1}{\alpha_2} \right] \tilde{\tau}_x(\xi, s) \xi J_0(r\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Вертикальные перемещения границы полупространства при действии однонаправленной вдоль оси  $Ox$  горизонтальной нагрузки определяются из (6.5)

и (6.19)

$$\bar{w}_x(r, \varphi, 0, s) = -\frac{a}{\mu} \int_0^{\infty} \xi^2 \left[ \frac{\chi - 2\alpha_1\alpha_2}{F(\xi, s)} \right] \bar{\tau}(\xi, s) \xi J_1(r\xi) d\xi. \quad (6.22)$$

### 6.1.2 Перемещения при вертикальной нагрузке, антисимметричной относительно диаметра круга

На границе упругого полупространства рассматривается действие по круговой площадке вертикальной нагрузки

$$p(r, \varphi, t) = p_1(r, t) \cos \varphi, \quad (6.23)$$

антисимметричной относительно диаметра круга. При этом имеем выражения для перемещений (6.3)–(6.5), (6.11) и напряжений (6.7), (6.12) при  $m = 1$ . Определим вертикальные перемещения границы полупространства при  $z = 0$ ,  $0 < r \leq a$ .

Константы  $B, C, D$  определяются исходя из следующих граничных условий при  $z = 0$  для трансформант Лапласа напряжений:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_z = -\bar{p}_1(r, s) \cos \varphi, & (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi); \\ \bar{\sigma}_z = 0, & (1 < r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi); \\ \bar{\tau}_{zr} = 0; \quad \bar{\tau}_{z\varphi} = 0, & (0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi). \end{cases} \quad (6.24)$$

Подставляя (6.7) в первое условие (6.24) (при  $z = 0, m = 1$ ), получаем равенство

$$[\chi B + 2\xi^2\alpha_2 C] J_1(r\xi) = \frac{1}{\mu} \bar{p}_1(r, s) \quad (0 \leq r \leq 1).$$

Умножая последнее уравнение на параметр  $\xi$  и применяя к нему преобразование Ханкеля 1-го порядка, найдем

$$\chi B + 2\xi^2\alpha_2 C = \frac{1}{\mu} \xi \tilde{p}_1(\xi, s), \quad (6.25)$$

где

$$\tilde{p}_1(\xi, s) = \int_0^1 r \bar{p}_1(r, s) J_1(r\xi) dr. \quad (6.26)$$

Удовлетворение граничным условиям для касательных напряжений из (6.24), на основании равенств (6.12) для  $m = 1$  приводит к уравнениям

$$\begin{cases} \epsilon_1 J_0(r\xi) - \epsilon_2 J_2(r\xi) = 0; \\ \epsilon_1 J_0(r\xi) + \epsilon_2 J_2(r\xi) = 0, \end{cases}$$

откуда получаем

$$2\alpha_1 B + \chi C - \alpha_2 D = 0; \quad 2\alpha_1 B + \chi C + \alpha_2 D = 0. \quad (6.27)$$

Из (6.25) и (6.27) получаем, что  $D = 0$ , а константы  $B$  и  $C$  определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \chi B + 2\xi^2 \alpha_2 C = \frac{1}{\mu} \xi \tilde{p}_1(\xi, s); \\ 2\alpha_1 B + \chi C = 0, \end{cases} \quad (6.28)$$

откуда имеем

$$B(\xi, s) = \frac{a}{\mu} \xi \frac{\chi}{F(\xi, s)} \tilde{p}_1(\xi, s); \quad C(\xi, s) = -\frac{a}{\mu} \xi \frac{2\alpha_1}{F(\xi, s)} \tilde{p}_1(\xi, s). \quad (6.29)$$

Отсюда, подставляя (6.29) в (6.5), с учетом (6.2) находим трансформанты Лапласа вертикальных перемещений границы упругого полупространства при антисимметричной нагрузке, действующей по площади круга антисимметрично относительно диаметра круга

$$\bar{w}(r, \varphi, 0, s) = \frac{a}{\mu} \int_0^\infty \frac{s^2 \alpha_1}{F(\xi, s)} \tilde{p}_1(\xi, s) \xi J_1(r\xi) d\xi \cos \varphi. \quad (6.30)$$

Горизонтальные перемещения границы определяем из (6.3) и (6.4) при  $m = 0$  и  $D = 0$ , при этом

$$\begin{aligned} \bar{u}^* &= \frac{1}{2} \xi (B + \alpha^2 C) [-J_0(r\xi) + J_2(r\xi)] \cos \varphi, \\ \bar{v}^* &= \frac{1}{2} \xi (B + \alpha^2 C) [J_0(r\xi) + J_2(r\xi)] \sin \varphi. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Так как  $\bar{u}^* = \bar{u}_x^* \cos \varphi$ ;  $\bar{v}^* = -\bar{u}_x^* \sin \varphi$ , где  $\bar{u}_x^*$  соответствует горизонтальным (направленным вдоль оси  $Ox$ ) перемещениям, то из (6.31) находим

$$\bar{u}_x^* = -\frac{1}{2} \xi (B + \alpha^2 C) J_0(r\xi),$$

а с учетом (6.2) и (6.29) имеем равенство

$$\bar{u}_x(r, 0, s) = \frac{1}{2} \frac{a}{\mu} \int_0^\infty \xi^2 \frac{\chi - 2\alpha_1 \alpha_2}{F(\xi, s)} \tilde{p}_1(\xi, s) \xi J_0(r\xi) d\xi. \quad (6.32)$$

### 6.1.3 Горизонтальные колебания круглого штампа

Рассмотрим действие горизонтальной силы  $Q(t)$ , направленной вдоль оси  $O\bar{x}$ , на круглый штамп радиуса  $a$  и высотой  $\bar{h} = ha$ , расположенный на границе упругого полупространства (рис. 6.2).

Предположим, что перемещения штампа  $U_x(t)$  – горизонтальные по направлению действия силы  $Q(t)$ , проскальзывание по подошве в направлении оси  $O\bar{x}$  отсутствует, а в перпендикулярном направлении допускается. Неизвестными являются касательные контактные напряжения  $\tau_x(r, t)$  и перемещения штампа  $U_x(t)$ . Должно быть соблюдено контактное условие

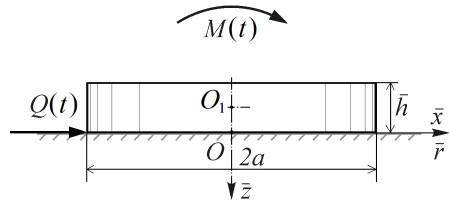


Рис. 6.2. Круглый штамп на упругом полупространстве

$$U_x(t) = u_x(r, 0, t) \quad (0 \leq r \leq 1). \quad (6.33)$$

Так как штамп взаимодействует с упругим полупространством, то уравнения движения (1.23) необходимо решать, выполняя контактное условие (6.33) совместно с уравнением горизонтальных колебаний штампа

$$2\pi a \mu m_1 \frac{d^2 U_x(t)}{dt^2} = Q(t) - Q_R(t), \quad (6.34)$$

где  $m_1 = \bar{h}\rho/(2a\rho_h)$ ;  $\rho/\rho_h$  – отношение плотностей материалов штампа и основания;  $Q_R(t)$  – равнодействующая однонаправленных касательных напряжений  $\tau_x(r, t)$ . Заметим, что  $U_x(t)$  и  $\tau_x(r, t)$  не зависят от угловой координаты  $\varphi$ .

Перемещения  $u_x(r, 0, t)$ , трансформанта Лапласа которых определена формулой (6.21), подставляем, на основании контактного условия (6.33), в уравнение (6.34). При этом получаем парное интегральное уравнение:

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi a^2 m_1 s^2 \int_0^\infty \left[ \frac{s^2 \alpha_2}{F(\xi, s)} + \frac{1}{\alpha_2} \right] \times \\ \times \tilde{\tau}_x(\xi, s) \xi J_0(r\xi) d\xi = \bar{Q}(s) - \bar{Q}_R(s) \quad (0 \leq r \leq 1); \\ \int_0^\infty \xi \tilde{\tau}_x(\xi, s) \xi J_0(r\xi) d\xi = 0 \quad (r > 1). \end{array} \right. \quad (6.35)$$

Решение для контактных напряжений будем искать в виде разложения в ряд по преобразованным четным полиномам Лежандра  $P_{2k}(\sqrt{1-r^2})$ , которые

являются ортогональными на отрезке  $r \in [0, 1]$  с весом  $r/\sqrt{1-r^2}$ :

$$\tau_x(r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_{2k}(t) \frac{P_{2k}(\sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}} \quad (0 \leq r \leq 1). \quad (6.36)$$

Здесь  $B_{2k}(t)$  – неизвестные коэффициенты, зависящие от времени.

Двойное преобразование Лапласа-Ханкеля разложения (6.36) имеет вид

$$\tilde{\tau}_x(\xi, s) = \frac{1}{\sqrt{2}\xi} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)} J_{2k+1/2}(\xi), \quad (6.37)$$

где  $J_{2k+1/2}(\xi)$  – функция Бесселя полуцелого индекса. Каждый член этого ряда удовлетворяет парному интегральному уравнению при  $r > 1$ . Для выполнения уравнения (6.35) при  $0 \leq r \leq 1$  подставляем в него выражение (6.37) для  $\tilde{\tau}_x(\xi, s)$  и учитывая равенство

$$\bar{Q}_R(s) = 2\pi a^2 \bar{B}_0(s), \quad (6.38)$$

получаем

$$\begin{aligned} \bar{B}_0(s) + m_1 s^2 \sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)} \left[ \frac{s^2 \alpha_2}{F(\xi, s)} + \frac{1}{\alpha_2} \right] \times \\ \times \sqrt{\frac{\xi}{2}} J_{2k+1/2}(\xi) J_0(r\xi) d\xi = \frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Разложим левую часть уравнения (6.39) в ряд по полиномам Лежандра, используя представление [86]

$$J_0(r\xi) = \sqrt{\frac{2}{\xi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1/2)\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} J_{2n+1/2}(\xi) P_{2n}(\sqrt{1-r^2}). \quad (6.40)$$

После подстановки (6.40) в (6.39) и приравнивания коэффициентов при полиномах Лежандра одинаковых порядков получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно трансформант Лапласа коэффициентов разложения (6.36):

$$\begin{cases} \bar{B}_0(s) + m_1 s^2 \sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 1/2}(s) = \frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a}; \\ \sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \end{cases} \quad (6.41)$$

где

$$b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s) = \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(k+1/2)(2n+1/2)}{2\Gamma(n+1)\Gamma(k+1)} \times \\ \times \int_0^\infty \left[ \frac{s^2\alpha_2}{F(\xi, s)} + \frac{1}{\alpha_2} \right] \sqrt{\frac{\xi}{2}} J_{2k+1/2}(\xi) J_{2n+1/2}(\xi) d\xi. \quad (6.42)$$

С помощью интегрирования в комплексной плоскости [230] выражение (6.42) приводим к виду

$$b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s) = (-1)^{k+n} \frac{1}{\pi} \frac{(2n+1/2)\Gamma(n+1/2)(k+1/2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(k+1)} \times \\ \times \left[ -\pi \frac{\sqrt{\eta_1^2-1}}{F'(\eta_1)} I_{2k+1/2}(\eta_1 s) K_{2n+1/2}(\eta_1 s) + \right. \\ \left. + \int_0^\beta \frac{\sqrt{1-\eta^2}}{F(\eta)} I_{2k+1/2}(s\eta) K_{2n+1/2}(s\eta) d\eta + \right. \\ \left. + \int_\beta^1 \frac{(2\eta^2-1)^2 \sqrt{1-\eta^2}}{F(\eta)f(\eta)} I_{2k+1/2}(s\eta) K_{2n+1/2}(s\eta) d\eta + \right. \\ \left. + (-1)^{k+n} \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \frac{J_{2k+1/2}(\xi) J_{2n+1/2}(\xi)}{\sqrt{\xi^2+s^2}} d\xi \right] \quad (n \leq k), \quad (6.43)$$

где

$$F(\eta) = (2\eta^2-1)^2 - 4\eta^2\sqrt{\eta^2-\beta^2}\sqrt{\eta^2-1}. \\ f(\eta) = (2\eta^2-1)^2 + 4\eta^2\sqrt{\eta^2-\beta^2}\sqrt{\eta^2-1}.$$

Здесь  $F(\eta)$  – функция Рэля;  $\eta_1$  – положительный корень уравнения  $F(\eta) = 0$ , определяющий скорость поверхностной волны Рэля в упругом полупространстве;  $F'(\eta)$  – производная от функции  $F(\eta)$ ;  $I_{2k+1/2}(\eta s)$ ,  $K_{2n+1/2}(\eta s)$  – модифицированные функции Бесселя полуцелого индекса.

Параметр преобразования Лапласа  $s$  в общем случае является комплексным. Если его положить чисто мнимым  $s = i\zeta$ , то решение задачи будет соответствовать гармоническим колебаниям с безразмерной частотой  $\zeta = a\omega/c_2$ , где  $\omega$  – круговая частота колебаний. При этом

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} b_{2k+1/2, 2n+1/2}(0) = \begin{cases} \frac{\Gamma^2(k+1/2)}{4\Gamma^2(k+1)}(2-\nu) & (n=k); \\ 0 & (n < k); \end{cases} \\ \operatorname{Im} b_{2k+1/2, 2n+1/2}(0) = 0. \end{array} \right. \quad (6.44)$$



После определения методом усечения коэффициентов  $\bar{B}_{2k}(s)$  из решения системы уравнений (6.41) трансформанты Лапласа перемещения штампа  $u_x(t)$  находим из уравнения (6.34) (с учетом формулы (6.38))

$$\bar{U}_x(s) = \frac{a}{\mu} \frac{1}{m_1 s^2} \left[ \frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a^2} - \bar{B}_0(s) \right]. \quad (6.45)$$

Если систему уравнений (6.41) решать в долях  $\bar{Q}(s)/(2\pi a^2)$ , то формулу (6.45) можно записать в таком виде:

$$\bar{U}_x(s) = \frac{a}{\mu} \frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a^2} \frac{1 - \bar{B}_0(s)}{m_1 s^2}. \quad (6.46)$$

Обращение преобразования Лапласа выполняем численно, с помощью интеграла Фурье (1.123), т. е. в выражениях (6.41), (6.43), (6.46) следует положить  $s = i\zeta$  и произвести интегрирование по безразмерной частоте  $\zeta$ , решая для каждого значения  $\zeta$  задачу о гармонических колебаниях штампа.

Таким образом, если  $Q(t) = Q \exp(i\zeta t)$ , то (в долях  $Q/(2\pi a^2)$ )

$$B_{2k}(t) = \begin{cases} \bar{B}_{2k}(\zeta) \exp(i\zeta t) & (\zeta > 0); \\ 1 & (\zeta = 0, k = 0); \\ 0 & (\zeta = 0, k = 1, 2, \dots), \end{cases} \quad (6.47)$$

где  $\bar{B}_{2k}(\zeta)$  – комплексные коэффициенты.

Приведенное горизонтальное перемещение штампа определяется формулой

$$U_x(t) = \begin{cases} \bar{U}_x(\zeta) \exp(i\zeta t) = \frac{[1 - \bar{B}_0(\zeta)] \exp(i\zeta t)}{-m_1 \zeta b_{1/2, 1/2}(0)} & (\zeta > 0); \\ 1 & (\zeta = 0) \end{cases} \quad (6.48)$$

в долях статического значения горизонтального перемещения штампа при действии статической силы  $Q$  :

$$U_{x, st} = \frac{Q b_{1/2, 1/2}(0)}{2\pi a \mu}, \quad (6.49)$$

которое с учетом (6.44) принимает вид

$$U_{x, st} = \frac{1}{8} \frac{2 - \nu}{a\mu} Q. \quad (6.50)$$

Отметим, что формула (6.50) совпадает с результатом, приведенным в работе [100, с. 87–88], где рассматривалась соответствующая статическая задача.

Нестационарные колебания штампа рассмотрим на численном примере при действии на штамп внезапно приложенной постоянной силы  $Q(t) = QH(t)$ , где  $H(t)$  – функция Хевисайда. В этом случае  $\bar{Q}(s) = Q/s$ . Решая систему уравнений (6.41) в долях  $\bar{Q}(s)/(2\pi a^2)$ , для обращения преобразования Лапласа используем формулу

$$B_{2k}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \bar{U}_x(\zeta) \frac{\sin(t\zeta)}{\zeta} d\zeta. \quad (6.51)$$

Соответствующая формула для перемещений имеет вид

$$U_x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \bar{U}_x(i\zeta) \frac{\sin(t\zeta)}{\zeta} d\zeta, \quad (6.52)$$

где

$$\bar{U}_x(i\zeta) = \begin{cases} -\frac{1 - \bar{B}_0(\zeta)}{m_1 \zeta^2 b_{1/2, 1/2}} & (\zeta > 0); \\ 1 & (\zeta = 0) \end{cases} \quad (6.53)$$

(в долях статического значения  $U_{x, st}$ ). Отметим, что интегралы (6.51), (6.52) могут быть вычислены по методу Файлона по формуле (1.124).

#### 6.1.4 Поворот круглого штампа в вертикальной плоскости

Пусть на штамп в вертикальной плоскости  $xOz$  действует момент силы  $M(t)$  (см. рис. 6.2, с. 293), вызывающий поворот штампа (колебания-качания) относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести штампа  $O_1$ . Примем допущение, что горизонтальным перемещением центра тяжести и касательными контактными напряжениями можно пренебречь. В этом случае неизвестными величинами будут антисимметричные нормальные контактные напряжения  $p(r, \varphi, t)$  и угол поворота штампа

$$\Psi(t) = \frac{W(r, \varphi, t)}{ax}, \quad (6.54)$$

где  $W(r, \varphi, t)$  – вертикальные перемещения точек подошвы штампа при его повороте относительно горизонтальной оси.

Контактное условие имеет вид

$$W(r, \varphi, t) = w(r, \varphi, 0, t) \quad (0 \leq r \leq 1; 0 \leq \varphi \leq 2\pi), \quad (6.55)$$

где  $w(r, \varphi, 0, t)$  – вертикальные перемещения границы полупространства.

Уравнения движения (1.23), выполняя условие (6.55), решаем совместно с уравнением вращательных колебаний штампа

$$J_y \frac{c_2^2}{a^2} \frac{d^2}{dt^2} \frac{W(r, \varphi, t)}{ax} = M(t) - M_R(t), \quad (6.56)$$

где  $M_R(t)$  – момент нормальных контактных напряжений;  $J_y$  – момент инерции штампа относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести штампа. Для цилиндра

$$J_y = \frac{\pi}{4} a^4 \bar{h} \rho \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{\bar{h}^2}{a^2} \right).$$

Так как неизвестные нормальные контактные напряжения являются антисимметричными относительно диаметра штампа, то их можно представить в виде (6.23). При этом вертикальные перемещения границы полупространства определяются выражением (6.30). Применяя к уравнению (6.56) преобразование Лапласа и выполняя условие (6.55), подставляем затем (6.30) в (6.56). В результате имеем

$$J_y \frac{c_2^2}{a^2 \mu} s^2 \int_0^\infty \frac{s^2 \alpha_1}{F(\xi, s)} \tilde{p}(\xi, s) J_1(r\xi) \xi d\xi = \bar{M}(s) r - \bar{M}_R(s) r, \quad (6.57)$$

где  $\tilde{p}(\xi, s)$  определяется формулой (6.26), а равнодействующая моментной реакции дается формулой

$$\bar{M}_R(s) = 2a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \cos^2 \varphi r^2 \bar{p}_1(r, s) dr d\varphi = \pi a^3 \int_0^1 r \bar{p}_1(r, s) dr. \quad (6.58)$$

Далее используем метод ортогональных полиномов. Распределение нормальных контактных напряжений вдоль радиуса будем искать в виде ряда по нечетным многочленам  $\tilde{P}_{2k+1}(r)$ , ортогональным в круге  $r \in [0, 1]$ , и с выделенной корневой особенностью

$$p_1(r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1}(t) \frac{\tilde{P}_{2k+1}(r)}{\sqrt{1-r^2}}, \quad (6.59)$$

где

$$\int_0^1 \tilde{P}_{2k+1}(r) \tilde{P}_{2n+1}(r) \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2}} = 0, \quad n \neq k, \quad n, k = 0, 1, \dots \quad (6.60)$$

и  $A_{2k+1}(t)$  – неопределенные коэффициенты, зависящие от времени.

Первый полином выбирается в соответствии с величиной перемещения подошвы жесткого штампа при повороте штампа вокруг горизонтальной оси, т. е.  $\tilde{P}_1(r) = r$ . Второй полином имеет вид  $\tilde{P}_3(r) = r - \frac{5}{4}r^3$ .

Нечетные полиномы  $\tilde{P}_{2k+1}(r)$  были использованы для решения динамической контактной задачи В. М. Сеймовым в работах [102, 232]. Установим связь этих полиномов с классическими ортогональными полиномами.

Полагая

$$\tilde{P}_{2k+1}(r) = r\hat{P}_k(r^2), \quad \hat{P}_k(\rho) = \sum_{m=0}^k a_{2m+1}^{(m)} \rho^k, \quad (6.61)$$

согласно условию ортогональности (6.60) имеем

$$\int_0^1 \hat{P}_k(\rho) \hat{P}_n(\rho) \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho}} = 0, \quad n \neq k, \quad n, k = 0, 1, \dots \quad (6.62)$$

Таким образом, полиномы  $\hat{P}_k(\rho)$  представляют собой сдвинутые классические многочлены Якоби с параметрами  $\alpha = -1/2$ ,  $\beta = 1$  (см. [249, гл. 7, § 1]), а именно

$$\hat{P}_k(\rho) = P_k^{(-1/2, 1)}(2\rho - 1), \quad \rho \in (0, 1), \quad (6.63)$$

где

$$\int_{-1}^1 P_k^{(-1/2, 1)}(x) P_n^{(-1/2, 1)}(x) \frac{(1+x)}{\sqrt{1-x}} dx = 0, \quad (6.64)$$

$$n \neq k, \quad n, k = 0, 1, \dots$$

При этом

$$P_n^{(-1/2, 1)}(x) = \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(n+2)}{n!2^n} \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k (x-1)^{n-k} (1+x)^k}{\Gamma(n-k+1/2)\Gamma(k+2)} =$$

$$= \frac{(n+1)\Gamma(n+1/2)}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k (x-1)^{n-k} (1+x)^k}{\Gamma(n-k+1/2)(k+1)!},$$

где  $C_n^k \equiv \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  – биномиальные коэффициенты Ньютона [140].

В частности,

$$P_n^{(-1/2, 1)}(2\rho - 1) = (n+1)\Gamma(n+1/2) \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{C_n^k (1-\rho)^{n-k} \rho^k}{\Gamma(n-k+1/2)(k+1)!}$$

и

$$P_n^{(-1/2, 1)}(-1) = (-1)^n (n+1).$$

Имеем следующие значения рассматриваемых полиномов:

$$\begin{aligned} P_0^{(-1/2, 1)}(2\rho - 1) &= 1; \\ P_1^{(-1/2, 1)}(2\rho - 1) &= 2\Gamma(3/2) \left[ -\frac{(1-\rho)}{\Gamma(3/2)} + \frac{\rho}{2\Gamma(1/2)} \right] = \\ &= 2 \left[ -(1-\rho) + \frac{\rho}{4} \right] = -2 \left[ 1 - \frac{5\rho}{4} \right]. \end{aligned}$$

Для полиномов  $P_n^{(-1/2, 1)}(x)$  с нормировкой

$$P_n^{(-1/2, 1)}(-1) = (-1)^n(n+1), \quad (6.65)$$

справедливы рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} 2(n+1)(n+3/2)(2n+1/2) P_{n+1}^{(-1/2, 1)}(x) &= \\ &= (2n+3/2)[(2n+5/2)(2n+1/2) - 3/4] P_n^{(-1/2, 1)}(x) - \\ &- 2(n-1/2)(n+1)(2n+5/2) P_{n-1}^{(-1/2, 1)}(x), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.66)$$

Таким образом для полиномов  $\widehat{P}_n$ , представленных в формуле (6.60), получаем из (6.66) равенства

$$\begin{aligned} 2(n+1)(n+3/2)(2n+1/2)(-1)^{n+1}(n+2) \widehat{P}_{n+1}(\rho) &= \\ &= (2n+3/2)[(2n+5/2)(2n+1/2)(2\rho-1) - 3/4](-1)^n(n+1) \widehat{P}_n(\rho) - \\ &- 2(n-1/2)(n+1)(2n+5/2)(-1)^{n-1}n \widehat{P}_{n-1}(\rho), \end{aligned}$$

откуда имеем рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{n+1}(\rho) &= \frac{(2n+3/2)}{(2n+3)(n+2)(2n+1/2)} \times \\ &\times [(2n+5/2)(2n+1/2) + 3/4 - 2(2n+5/2)(2n+1/2)\rho] \widehat{P}_n(\rho) - \\ &- \frac{(n-1/2)(2n+5/2)n}{(n+3/2)(2n+1/2)(n+2)} \widehat{P}_{n-1}(\rho), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.67)$$

Таким образом, нечетные полиномы, используемые для представления антисимметричных нормальных напряжений под штампом на упругом полупространстве при решении неосесимметричной задачи о вращательных колебаниях штампа, выражаются через полиномы Якоби  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , согласно формулам (6.61), (6.63) и (6.65), следующим образом:

$$\widetilde{P}_{2n+1}(r) = \frac{r}{(-1)^n(n+1)} P_n^{(-1/2, 1)}(2r^2 - 1). \quad (6.68)$$

Для рассматриваемых полиномов (6.68) справедливы рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{2n+3}(r) &= \frac{(2n+3/2)}{(2n+3)(n+2)(2n+1/2)} \times \\ &\times [(2n+5/2)(2n+1/2) + 3/4 - 2(2n+5/2)(2n+1/2)r^2] \tilde{P}_{2n+1}(r) - \\ &- \frac{(n-1/2)(2n+5/2)n}{(n+3/2)(2n+1/2)(n+2)} \tilde{P}_{2n-1}(r), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.69) \\ \tilde{P}_1(r) &= r, \quad \tilde{P}_3(r) = r - \frac{5}{4}r^3. \end{aligned}$$

Для  $n = 1$  из (6.69) имеем равенство

$$\tilde{P}_5(r) = r - \frac{7}{2}r^3 + \frac{21}{8}r^5.$$

Аналогичные вычисления дают следующие выражения для многочленов  $\tilde{P}_{2n+1}(r)$ ,  $n = 3, 4, 5, 6$ :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_7(r) &= r - \frac{27}{4}r^3 + \frac{99}{8}r^5 - \frac{429}{64}r^7; \\ \tilde{P}_9(r) &= r - 11r^3 + \frac{143}{4}r^5 - \frac{715}{16}r^7 + \frac{2431}{128}r^9; \\ \tilde{P}_{11}(r) &= r - \frac{65}{4}r^3 + \frac{325}{4}r^5 - \frac{11050}{64}r^7 + \\ &+ \frac{20995}{128}r^9 - \frac{29393}{512}r^{11}; \\ \tilde{P}_{13}(r) &= r - \frac{45}{2}r^3 + \frac{1275}{8}r^5 - \frac{8075}{16}r^7 + \frac{101745}{128}r^9 - \\ &- \frac{156009}{256}r^{11} + \frac{185725}{1024}r^{13}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Графики ортогональных полиномов  $\tilde{P}_{2n+1}(r)$ ,  $n = 0, 1, \dots, 6$  на радиальном отрезке  $[0, 1]$  представлены на рис. 6.3.

Ниже при решении задач использованы следующие равенства: разложение функции Бесселя  $J_1(\cdot)$  в ряд по многочленам  $\tilde{P}_{2n+1}(r)$

$$\begin{aligned} J_1(r\xi) &= \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+3)(2n+1)!!}{\varepsilon_n 4^n} J_{2n+3/2}(\xi) \tilde{P}_{2n+1}(r), \quad (6.71) \\ &0 \leq r \leq 1, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_0 = 2$ ;  $\varepsilon_n = 1$ ,  $n \geq 1$ ;

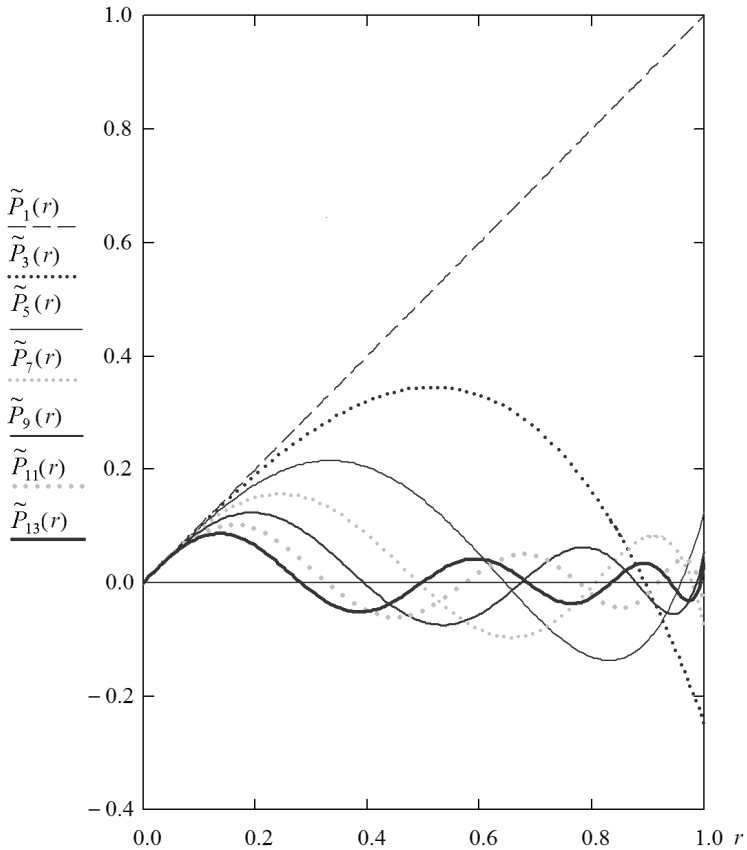


Рис. 6.3. Графики ортогональных полиномов  $\tilde{P}_{2n+1}(r)$ ,  $n = 0, 1 \dots 6$

и значение интеграла

$$\int_0^1 \frac{\tilde{P}_{2n+1}(r)}{\sqrt{1-r^2}} r J_1(\xi r) dr = \frac{n!}{2^{2n}} \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} J_{2n+3/2}(\xi). \quad (6.72)$$

Справедливость последнего можно установить путем подстановки многочлена  $\tilde{P}_{2k+1}(r)$  и последовательного использования формулы

$$\int_0^1 \frac{r^{2n+1}}{\sqrt{1-r^2}} r J_1(r\xi) dr =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2)_n \left(\frac{2}{\xi}\right)^{n+1/2} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{(2)_m} \binom{n}{m} \left(\frac{\xi}{2}\right)^m J_{n+m+3/2}(\xi), \quad (6.73)$$

где

$$(x)_n = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1), & n > 1. \end{cases}$$

В задачах динамики фундаментов обычно ограничиваются первым членом ряда (6.59), который дает решение статической задачи, например в [117] – при действии на штамп момента. Для практических расчетов при динамических воздействиях по представленным ниже методикам в разложении (6.59) достаточно использовать не более 3–4 членов ряда.

Возвратимся к рассмотрению уравнения (6.57). При подстановке разложения (6.59) в равенство (6.58) получаем соотношение

$$\bar{M}_R(s) = \frac{2}{3} \pi a^3 \bar{A}_1(s), \quad (6.74)$$

которое означает, что суммарный момент от нормальных контактных напряжений определяется первым членом ряда в разложении (6.59), а каждый последующий член уточняет теоретическую эпюру контактных напряжений, но дает нулевое значение суммарного момента, что следует из условия ортогональности (6.60) многочленов  $\tilde{P}_{2k+1}$ . Подставляя равенство (6.74) в уравнение (6.57), после элементарных преобразований получаем

$$\bar{A}_1(s) r + \frac{2}{\pi} j_y s^2 \int_0^\infty \frac{s^2 \alpha_1}{F(\xi, s)} \tilde{p}_1(\xi, s) \xi J_1(\xi) d\xi = \frac{3 \bar{M}(s)}{2 \pi a^3} r \quad (0 \leq r \leq 1), \quad (6.75)$$

где величина

$$j_y = \frac{3}{4} \frac{J_y}{a^5 \rho_0} \quad (6.76)$$

представляет собой приведенный момент инерции массивного цилиндра при повороте его относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести, от действия моментом, приложенным в диаметральной плоскости, перпендикулярной этой оси.

$$\text{Для цилиндрического круглого штампа } j_y = \frac{3}{8} \pi m_1 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{\bar{h}^2}{a^2}\right).$$

Из представления (6.59), согласно определению функции  $\tilde{p}_1(\xi, s)$ , имеем равенство

$$\tilde{p}_1(\xi, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{A}_{2k+1}(s) \int_0^\infty \frac{\tilde{P}_{2k+1}(r)}{\sqrt{1-r^2}} r J_1(r\xi) dr. \quad (6.77)$$

При этом из (6.77) и равенства (6.72) следует, что искомое преобразование Ханкеля простым образом выражается через функции Бесселя полуцелого ин-



декса

$$\tilde{p}_1(\xi, s) = \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{4^k} \bar{A}_{2k+1}(s) J_{2k+3/2}(\xi). \quad (6.78)$$

Для коэффициентов  $\bar{A}_{2k+1}(s)$  имеем из (6.75) и (6.78) уравнение

$$\begin{aligned} & \bar{A}_1(s) r + \frac{2}{\pi} j_y s^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{4^k} \bar{A}_{2k+1}(s) \times \\ & \times \int_0^{\infty} \frac{s^2 \alpha_1}{F(\xi, s)} \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} J_{2k+3/2}(\xi) \xi J_1(\xi) d\xi = \frac{3\bar{M}(s)}{2\pi a^3} r, \end{aligned} \quad (6.79)$$

которое должно удовлетворяться при любом значении  $r \in [0, 1]$ . Чтобы выполнить данное условие, разложим левую часть уравнения (6.79) в ряд по многочленам  $\tilde{P}_{2n+1}(r)$ . На основании разложения (6.71) получаем

$$\begin{aligned} J_1(r\xi) = & \sqrt{\frac{\pi}{2\xi}} \left[ \frac{3}{2} J_{3/2}(\xi) r + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{4^n} (2n+1)!! J_{2n+3/2}(\xi) \tilde{P}_{2n+1}(r) \right] \quad (0 \leq r \leq 1) \end{aligned} \quad (6.80)$$

или

$$J_1(r\xi) = \frac{3}{2} j_1(\xi) r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+3}{4^n} (2n+1)!! j_{2n+1}(\xi) \tilde{P}_{2n+1}(r) \quad (0 \leq r \leq 1). \quad (6.81)$$

Таким образом, все дальнейшие формулы могут быть выражены также через сферические функции Бесселя 1-го рода

$$j_n(z) = \sqrt{\pi/(2z)} J_{n+1/2}(z).$$

Подставляя разложение (6.80) в (6.79), получаем

$$\begin{aligned} & \bar{A}_1(s) r + j_y s^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{2k+1}(s) a_{2k+3/2, 2n+3/2}(s) \tilde{P}_{2n+1}(r) = \\ & = \frac{3\bar{M}(s)}{2\pi a^3} r \quad (0 \leq r \leq 1). \end{aligned} \quad (6.82)$$

где коэффициенты

$$a_{2k+3/2, 3/2}(s) = \frac{3}{2} \frac{k!}{2^{2k}} \int_0^{\infty} \frac{s_2 \alpha_1}{F(\xi, s)} J_{2k+3/2}(\xi) J_{3/2}(\xi) d\xi \quad (k \geq 0), \quad (6.83)$$

$$a_{2k+3/2, 2n+3/2}(s) = \frac{k!(4n+3)}{2^{2(n+k)}}(2n+1)!! \times \\ \times \int_0^\infty \frac{s_2 \alpha_1}{F(\xi, s)} J_{2k+3/2}(\xi) J_{2n+3/2}(\xi) d\xi \quad (n \geq 1; k \geq 0). \quad (6.84)$$

Приравнявая в уравнении (6.82) коэффициенты при многочленах  $\tilde{P}_{2n+1}(r)$  одинаковых порядков, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для изображений Лапласа  $\bar{A}_{2k+1}(s)$  искомых функций  $A_{2k+1}(t)$ :

$$\begin{cases} \bar{A}_1(s) + j_y s^2 \sum_{k=0}^\infty \bar{A}_{2k+1}(s) a_{2k+3/2, 3/2}(s) = \frac{3\bar{M}(s)}{2\pi a^3}; \\ \sum_{k=0}^\infty \bar{A}_{2k+1}(s) a_{2k+3/2, 2n+3/2}(s) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \end{cases} \quad (6.85)$$

Из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (6.85) методом усечения вычисляются коэффициенты  $\bar{A}_{2k+1}(s)$  разложения (6.59).

После определения коэффициентов  $\bar{A}_{2k+1}(s)$  находим угол поворота штампа из уравнения (6.56). В изображениях Лапласа, с учетом равенства (6.74), имеем выражение

$$\bar{\Psi}(s) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\mu} \frac{1}{j_y s^2} \left[ \frac{3\bar{M}(s)}{2\pi a^3} - \bar{A}_1(s) \right]. \quad (6.86)$$

Интеграл (6.84) приведен к виду, удобному для вычислений:

$$a_{2k+3/2, 2n+3/2}(s) = (-1)^{k+n} \frac{2}{\pi} \frac{k!(4n+3)}{\varepsilon_n 2^{2(n+k)}} (2n+1)!! \times \\ \times \left[ -\pi \frac{\sqrt{\eta_1^2 - \beta^2}}{F'(\eta_1)} I_{2k+3/2}(s\eta_1) K_{2n+3/2}(s\eta_1) + \right. \\ \left. + \int_0^\beta \frac{\sqrt{\beta^2 - \eta^2}}{F(\eta)} I_{2k+3/2}(s\eta) K_{2n+3/2}(s\eta) d\eta + \right. \\ \left. + 4 \int_\beta^1 \frac{\eta^2 (\eta^2 - \beta^2) \sqrt{1 - \eta^2}}{F(\eta) f(\eta)} I_{2k+3/2}(s\eta) K_{2n+3/2}(s\eta) d\eta \right] \quad (k \geq n), \quad (6.87)$$

где  $\varepsilon_0 = 2$  и  $\varepsilon_n = 1$  при  $n \geq 1$ .

Рассмотрим действие момента  $M(t) = M \exp(i\zeta t)$ , вызывающего гармонические колебания. В этом случае будем иметь (в долях  $3M/(2\pi a^3)$ )

$$A_{2k+1}(t) = \begin{cases} \bar{A}_{2k+1}(\zeta) \exp(i\zeta t) & (\zeta > 0); \\ 1 & (\zeta = 0, k = 0); \\ 0 & (\zeta = 0, k = 1, 2, \dots), \end{cases} \quad (6.88)$$

где  $\bar{A}_{2k+1}(\zeta)$  – комплексные коэффициенты, определенные из системы уравнений (6.85) при  $s = i\zeta$  и свободном члене, равным единице. Для действительной и мнимой частей коэффициентов (6.87) имеем выражения

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \text{Re} \\ \text{Im} \end{array} \right\} a_{2k+3/2, 2n+3/2}(\zeta) = -\frac{k!(4n+3)}{\varepsilon_n 2^{2(n+k)}} (2n+1)!! \times \\ & \times \left[ -\pi \frac{\sqrt{\eta_1^2 - \beta^2}}{F'(\eta_1)} J_{2k+3/2}(\zeta\eta_1) \left\{ \begin{array}{l} N_{2n+3/2}(\zeta\eta_1) \\ J_{2n+3/2}(\zeta\eta_1) \end{array} \right\} + \right. \\ & \left. + \int_0^\beta \frac{\sqrt{\beta^2 - \eta^2}}{F(\eta)} J_{2k+3/2}(\zeta\eta) \left\{ \begin{array}{l} N_{2n+3/2}(\zeta\eta) \\ J_{2n+3/2}(\zeta\eta) \end{array} \right\} d\eta + \right. \\ & \left. + 4 \int_\beta^1 \frac{\eta^2 (\eta^2 - \beta^2) \sqrt{1 - \eta^2}}{F(\eta) f(\eta)} J_{2k+3/2}(\zeta\eta) \left\{ \begin{array}{l} N_{2n+3/2}(\zeta\eta) \\ J_{2n+3/2}(\zeta\eta) \end{array} \right\} d\eta \right], \quad (k \geq n). \end{aligned} \quad (6.89)$$

Здесь следует отметить равенства

$$a_{2n+3/2, 2n+3/2}(0) = \begin{cases} \frac{n!}{\varepsilon_n 2^{4n}} (2n+1)!! (1-\nu), & k \leq n; \\ 0, & k > n. \end{cases} \quad (6.90)$$

Для угла поворота, обезразмеренного статическим его значением

$$\Psi_{st} = \frac{3}{4} \frac{M}{a^3 \mu} a_{3/2, 3/2}(0),$$

согласно формуле (6.86), получим

$$\bar{\Psi}(\zeta) = \begin{cases} -\frac{1}{j_n} \frac{1 - \bar{A}_1(\zeta)}{\zeta^2 a_{3/2, 3/2}(0)} & (\zeta > 0); \\ 1 & (\zeta = 0). \end{cases} \quad (6.91)$$

С учетом (6.90) при  $n = k = 0$

$$\Psi_{st} = \frac{3}{8} \frac{M}{a^3 \mu} (1 - \nu).$$

Это значение совпадает с результатом, приведенным в монографии [275, (62.15)], где рассматривалась статическая задача о действии момента на круглый штамп.

Из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (6.85) после замены  $s = i\zeta$  методом усечения вычисляются коэффициенты  $\bar{A}_{2k+1}(\zeta)$ , находят реакции, перемещения и контактные напряжения.

### 6.1.5 Горизонтально-вращательные колебания круглого штампа

В статье В. М. Сеймова с соавт. [232], на основе которой написан данный пункт, рассмотрены связанные горизонтально-вращательные установившиеся и нестационарные колебания круглого штампа на упругом инерционном полупространстве при действии горизонтальной силы или момента в вертикальной плоскости. Решение контактной задачи базируется на использовании рядов представления касательных и нормальных контактных напряжений рядов по ортогональным в области круга многочленами с коэффициентами, зависящими от времени. Задача в области изображений Лапласа методом ортогональных полиномов сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. На числовых примерах показан ряд закономерностей изменения реакции и перемещения штампа в частотной области и во времени в зависимости от массы штампа. Показано качественное различие расчетных резонансных кривых для горизонтального воздействия при учете поворота штампа и без его учета.

Статья S.-S. Chen с соавт. [334] посвящена анализу реакции системы круглый фундамент-грунт при действии горизонтальной и моментной нагрузок на фундамент. С помощью разработанного программного обеспечения проведен безразмерный анализ для исследования доминирующих параметров реакции фундамента: коэффициент Пуассона основания, относительная толщина, безразмерная частота, относительная масса. Результаты свидетельствуют, что для массивных фундаментов необходимо рассматривать связанные горизонтально-вращательные колебания. Значение коэффициента Пуассона грунта оказывает ограниченное влияние на реакцию в горизонтальном направлении. По мнению авторов, предложенные аналитические решения обеспечивают адекватную оценку для практического анализа колебаний фундаментов машин.

Пусть на круглый в плане жесткий штамп, расположенный на границе упругого полупространства, действуют нагрузки в виде горизонтальной силы  $Q(t)$  или момента в вертикальной плоскости  $M(t)$  (см. рис. 6.2, с. 293). Будем ис-

кать однонаправленные касательные  $\tau(r, t)$  и антисимметричные относительно диаметра нормальные  $p(r, \varphi, t)$  контактные напряжения, а также горизонтальные перемещения подошвы штампа  $U_x(t)$  и угол поворота  $\Psi(t)$ .

Уравнения связанных горизонтально-вращательных колебаний круглого штампа можно записать в виде системы двух уравнений

$$2\pi a \mu m_1 \frac{d^2 U_x(t)}{dt^2} = \left(1 + h n_0\right) [Q(t) - Q_R(t)] - \frac{2}{a} n_0 [M(t) - M_R(t)]; \quad (6.92)$$

$$\frac{4}{3} a^3 \mu j_y \frac{d^2 \Psi(t)}{dt^2} = -\frac{\bar{h}}{2} [Q(t) - Q_R(t)] + M(t) - M_R(t), \quad (6.93)$$

где  $Q_r(t)$  и  $M_r(t)$  – равнодействующая касательных напряжений  $\tau_x(r, t)$  и равнодействующий момент нормальных напряжений  $p(r, \varphi, t)$ .

Неизвестные контактные напряжения ищем в виде разложений по многочленам, ортогональным в области круга. Для однонаправленных касательных напряжений используем преобразованные четные полиномы Лежандра (6.36) (см. пункт 6.1.3) а для антисимметричных нормальных напряжений используем специально подобранные нечетные полиномы (6.59) (см. пункт 6.1.4).

Неизвестные коэффициенты  $B_{2k}(t)$  и  $A_{2k+1}(t)$  в разложениях (6.36) и (6.59) находятся из решения динамической контактной задачи. Отметим, что равнодействующие реакции определяются первыми членами этих рядов, а именно

$$Q_R(t) = 2\pi a^2 B_0(t), \quad M_R(t) = \frac{2}{3} \pi a^3 A_1(t). \quad (6.94)$$

Уравнения (6.92) и (6.93) необходимо решать совместно с уравнениями движения упругого полупространства (6.1), которые записаны в цилиндрических координатах для изображений Лапласа по времени.

Суммируем горизонтальные и вертикальные перемещения от касательной (индекс  $\tau$ ) и вертикальной (индекс  $p$ ) нагрузок

$$\bar{u}_x(r, 0, s) = \bar{u}_x(r, 0, s)_\tau + \bar{u}_x(r, 0, s)_p; \quad (6.95)$$

$$\bar{w}(r, \varphi, 0, s) = \bar{w}(r, \varphi, 0, s)_\tau + \bar{w}(r, \varphi, 0, s)_p. \quad (6.96)$$

Выражения для трансформант Лапласа искомых перемещений по результатам п. 6.1.3 и п. 6.1.4 записываются в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}_x(r, 0, s) = & \frac{a}{\mu} \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s) - \\ & - \bar{A}_{2k+1}(s) a_{2k+3/2, 2n+1/2}(s)] P_{2n} \sqrt{1-r^2}; \end{aligned} \quad (6.97)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}(r, \varphi, 0, s) = & \frac{\pi a}{2 \mu} \sum_{k=0}^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} [-\bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 2n+3/2}(s) + \\ & + \bar{A}_{2k+1}(s) a_{2k+3/2, 2n+3/2}(s)] \tilde{P}_{2n+1}(r) \cos \varphi, \end{aligned} \quad (6.98)$$

где

$$b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s) = \frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(n+1/2)(2n+1/2)}{2\Gamma(k+1)\Gamma(n+1)} \times \\ \times \int_0^\infty \left[ \frac{s^2 \sqrt{\xi^2 + s^2}}{F(\xi, s)} + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + s^2}} \right] J_{2k+1/2}(\xi) J_{2n+3/2}(\xi) d\xi; \quad (6.99)$$

$$a_{2k+3/2, 2n+1/2}(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n+1/2)(2n+1/2)}{2^{2k}\Gamma(n+1)} \times \\ \times \int_0^\infty \xi \frac{\chi - 2\alpha_1\alpha_2}{F(\xi, s)} J_{2k+1/2}(\xi) J_{2n+3/2}(\xi) d\xi; \quad (6.100)$$

$$b_{2k+1/2, 2n+3/2}(s) = \frac{\Gamma(k+1/2)(2n+1)!!(4n+3)}{2^{2n}\sqrt{\pi}\varepsilon_n\Gamma(k+1)} \times \\ \times \int_0^\infty \xi \frac{\chi - 2\alpha_1\alpha_2}{F(\xi, s)} J_{2k+1/2}(\xi) J_{2n+3/2}(\xi) d\xi; \quad (6.101)$$

$$a_{2k+3/2, 2n+3/2}(s) = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(2n+1)!!(4n+3)}{2^{2(n+k)}\varepsilon_n} \times \\ \times \int_0^\infty \xi \frac{s^2 \sqrt{\xi^2 + \beta^2 s^2}}{F(\xi, s)} J_{2k+3/2}(\xi) J_{2n+3/2}(\xi) d\xi. \quad (6.102)$$

При решении контактной задачи необходимо соблюсти равенство горизонтальных и вертикальных перемещений штампа и границы основания

$$\bar{U}_x(r, s) = \bar{u}_x(r, 0, s), \quad \bar{W}(r, \varphi, s) = \bar{w}(r, \varphi, 0, s), \quad (6.103)$$

где  $0 \leq r \leq 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Заметим, что угол поворота жесткого штампа относительно диаметра равен

$$\bar{\Psi}(s) = \frac{\bar{W}(r, \varphi, s)}{ar \cos \varphi}. \quad (6.104)$$

Удовлетворяя условиям (6.103), подставляем выражения для перемещений (6.97) и (6.98) (с учетом (6.104)) в уравнения (6.92) и (6.93), а также учитываем выражения для реакций (6.94). Приравнявая в полученных выражениях коэффициенты при многочленах одинаковых порядков, сводим задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (в области изображений Лапласа)

$$\begin{aligned}
& \left(1 + h n_0\right) \bar{B}_0(s) - \frac{2}{3} n_0 \bar{A}_1(s) + m_1 s^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 1/2}(s) - \right. \\
& \quad \left. - \bar{A}_{2k+1}(s) a_{2k+3/2, 1/2}(s) \right] = \bar{D}_0(s); \\
& \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s) - \right. \\
& \quad \left. - \bar{A}_{2k+1}(s) a_{2k+3/2, 2n+1/2}(s) \right] = 0 \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (6.105) \\
& -\frac{3}{2} h \bar{B}_0(s) + \bar{A}_1(s) + j_y s^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left[ -\bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 3/2}(s) + \right. \\
& \quad \left. + \bar{A}_{2k+1}(s) a_{2k+3/2, 3/2}(s) \right] = \bar{D}_1(s); \\
& \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left[ -\bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 2n+3/2}(s) + \right. \\
& \quad \left. + \bar{A}_{2k+1}(s) a_{2k+3/2, 2n+3/2}(s) \right] = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),
\end{aligned}$$

где введены функции

$$\begin{aligned}
\bar{D}_0(s) &= \left(1 + h n_0\right) \frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a^2} - \frac{2}{3} n_0 \frac{3\bar{M}(s)}{2\pi a^3}; \\
\bar{D}_1(s) &= -\frac{3}{2} h \frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a^2} + \frac{3\bar{M}(s)}{2\pi a^3}.
\end{aligned} \quad (6.106)$$

Перемещения штампа и угол поворота находим в изображениях по Лапласу из выражений (6.92) и (6.93). Таким образом получаем

$$\begin{aligned}
\bar{U}_x(s) &= \frac{a}{\mu} \frac{1}{m_1 s^2} \left[ \bar{D}_0(s) - \left(1 + h n_0\right) \bar{B}_0(s) + \frac{2}{3} n_0 \bar{A}_1(s) \right]; \\
\Psi(s) &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\mu} \frac{1}{j_y s^2} \left[ \bar{D}_0(s) + \frac{3}{2} h \bar{B}_0(s) - \bar{A}_1(s) \right]. \quad (6.107)
\end{aligned}$$

Рассмотрим результаты расчетов, проведенных при следующих значениях параметров: коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , отношение плотностей материалов штампа и основания  $\rho/\rho_h = 1,4$ .

Резонансные кривые для модулей коэффициентов  $|\bar{B}_0(\zeta)|$  и  $|\bar{A}_1(\zeta)|$  (в долях  $Q/2\pi a^2$ ), определяющих равнодействующие реакций (6.94) при гармонических колебаниях штампа под действием периодической горизонтальной силы  $Q(t) = Q \exp(i\zeta t)$ , приведены на рис. 6.4. Здесь показаны кривые для горизонтальной реакции  $|\bar{B}_0(\zeta)|$  при горизонтально-вращательных колебаниях штампа и то же – при горизонтальных колебаниях (без учета вращения), а также для моментной реакции  $|\bar{A}_1(\zeta)|$ .

Сравнение приведенных кривых показывает, что учет вращательных колебаний существенно влияет на амплитудно-частотные характеристики круглого штампа: изменяются максимальная амплитуда и соответствующая ей частота, обнаруживается второй максимум амплитуды и локальный минимум между ними. Это явление подтверждается экспериментальными данными.

В опытах, поставленных Кондиным [221, 222], описан следующий эффект. При действии на массивный фундамент горизонтальной гармонической нагрузки горизонтально-вращательные колебания происходят с изменением радиуса поворота на определенной частоте, по-видимому, сопровождающееся сложным поведением горизонтальной реакции с изменением частоты вынужденных колебаний. Данный эффект проявляется при расчетах по модели упругого полупространства и не выявляется при расчетах с применением упрощенных моделей.

На рис. 6.5 приведены резонансные кривые для модуля горизонтального перемещения подошвы штампа  $|\bar{U}_x(\zeta)|$  (в долях статистического значения  $U_{x,cm} = (2 - \nu)Q/(8a\mu)$ ) при  $h/a = 0,5$  и  $h/a = 1,0$ . Здесь видна характерная зависимость амплитудно-частотных характеристик штампа от его массы и момента инерции.

Обращение преобразования Лапласа проводим численно, с помощью интеграла Фурье по переменной  $\zeta = -is$ , используя формулу Файлона (1.124) (см. с. 43).

Несобственные интегралы в выражениях (6.43) и (6.83), (6.84) с помощью интегрирования в комплексной плоскости сводятся к интегралам в конечных пределах и к рядам. Нестационарные колебания штампа иллюстрируют графики на рис. 6.6, 6.7. На рис. 6.6 показано изменение во времени угла поворота штампа  $\Psi(t)$  (с нормировкой по статическому значению  $\Psi_{st} = 3(1 - 2\nu)Q/(16\pi a^2 \mu)$ ) при действии на штамп внезапно приложенной постоянной силы  $Q(t) = QH(t)$ , где  $H(t)$  – функция Хевисайда. Кривые соответствуют значениям параметра  $h/a = 0,5$  и  $h/a = 1,0$ . Виден переходной процесс колебаний: от нулевого значения угла поворота до его статической величины.

$$|\bar{A}_1(i\zeta)|; |\bar{B}_0(i\zeta)|, \quad Q/(2\pi a^2)$$

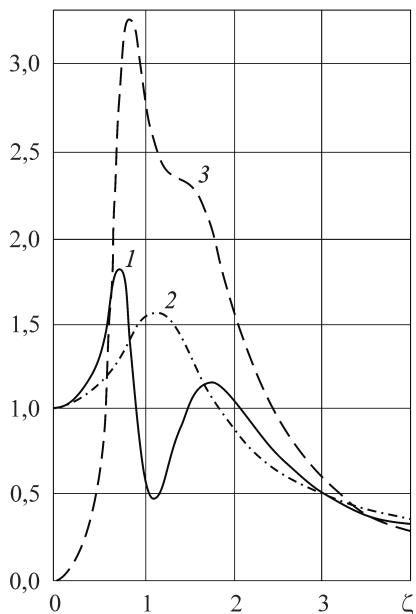


Рис. 6.4. Модули коэффициентов  $\bar{B}_0(\zeta)$  и  $\bar{A}_1(\zeta)$  при действии на штамп ( $h = 1$ ) горизонтальной силы



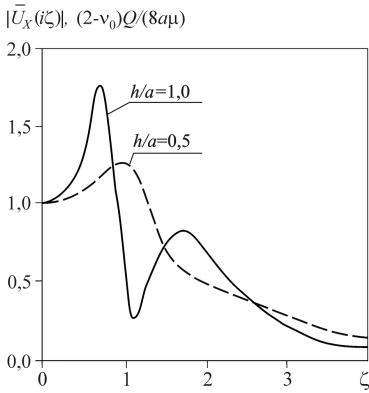


Рис. 6.5. Модуль горизонтального перемещения подошвы штампа  $\bar{U}_x(\zeta)$

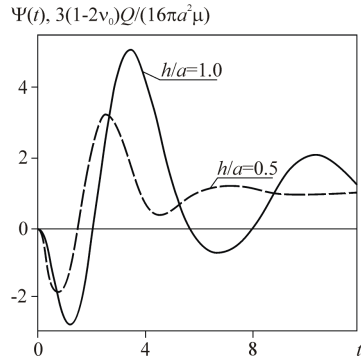


Рис. 6.6. Угол поворота штампа при действии на штамп разной высоты силы  $QH(t)$

Результаты расчета нестационарных колебаний штампа при действии момента  $M(t) = MH(t)$ , а именно – горизонтальное перемещение подошвы штампа (в долях  $U_{x,st} = 3(1 - 2\nu)M/(16\pi a^2 \mu)$ ) при  $h/a = 0,5$  и  $h/a = 1,0$  показаны на рис. 6.7.

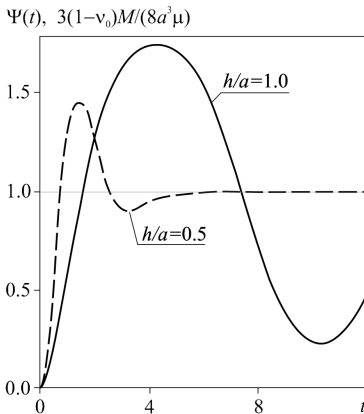


Рис. 6.7. Угол поворота при действии на штамп момента  $MH(t)$

Особенности движения штампа при действии рассмотренных нестационарных нагрузок заключаются в следующем.

В случае приложения горизонтальной силы у подошвы штампа горизонтальное перемещение подошвы остается положительным (направлено по оси  $Ox$ ), а угол поворота сначала отрицательный (против часовой стрелки), затем  $\Psi$  принимает положительные значения.

При действии момента  $MH(t)$  горизонтальное перемещение подошвы является знакопеременным: в начале движения оно отрицательное (направлено против оси  $Ox$ ), а затем становится положительным. Максимальное значение угла поворота штампа возрас-

тает при увеличении высоты штампа, при этом стабилизация происходит медленнее.

Кроме анализа перемещений штампа, представленная методика и соответствующая компьютерная программа позволяют исследовать трансформации во времени эпюр нормальных и касательных контактных напряжений.

## 6.2 Колебания цилиндра в слое жидкости на упругом полупространстве

Известные методы решения задач о колебаниях конструкций учитывают взаимодействие с жидкостью при низкочастотных периодических нагрузках [107, 288, 301, 379] или взаимодействие с основанием [112]. В данном параграфе предлагается подход, включающий в себя исследование нестационарных процессов взаимодействия конструкции как с водной средой, так и с подстилающим деформируемым основанием.

Методика и результаты решения задачи о колебаниях круглого в плане штампа на упругом полупространстве при действии горизонтальных и моментных нагрузок, приведенные в предыдущем параграфе, дают возможность рассматривать задачи динамики и сейсмостойкости осесимметричных сооружений с учетом взаимодействия сооружения с упругим основанием через подошву круглого фундамента [123, 264].

Движение упругого полупространства и слоя жидкости описывается волновыми уравнениями. В полуограниченной среде от источника возбуждения, которым может быть колеблющееся под действием заданной динамической нагрузки тело, распространяются на бесконечность несущие энергии волны, что обуславливает затухание колебаний при прекращении действия нагрузки. Если таким телом является вертикально расположенный в слое жидкости жесткий или упругий цилиндр, опирающийся на инерционное деформируемое (упругое) полупространство, то возникает необходимость в решении в общем случае нестационарной контактной задачи для системы цилиндр-слой жидкости-упругое полупространство. Ее решение позволяет установить физические закономерности изменения во времени перемещений и напряжений в цилиндре, гидродинамического давления, напряжений по контакту с основанием в зависимости от характера динамической нагрузки, инерционных и деформационных свойств цилиндра и его основания, а также высоты слоя жидкости. Такого рода задачи представляют интерес, например, при исследованиях и расчетах колебаний морских платформ гравитационного типа под действием силовых (волновых, ледовых) и кинематических (сейсмических) нагрузок.

В качестве расчетной схемы применительно к морской платформе рассматривается конструкция в виде вертикального жесткого или упругого цилиндра, защемленного в жесткой фундаментной плите кругового сечения, расположенной на границе упругого полупространства под слоем жидкости (рис. 6.8). Предполагается, что указанная конструкция подвергается наиболее опасным

горизонтальным динамическим воздействиям. Показанная на рис. 6.8 форма эпюры гидродинамического давления  $p_B(\bar{r}, \bar{z}, \varphi)$  носит иллюстративный характер.

Ниже рассматриваются конкретные задачи динамического взаимодействия цилиндрических конструкций с жидкой и твердой средами. Эти относительно простые модельные задачи позволяют выявить основные эффекты, которые могут представлять интерес для проектировщиков морских платформ.

Применительно к вопросам расчета морской платформы гравитационного типа получено решение пространственной динамической контактной задачи для жесткого и упругого цилиндра, взаимодействующего со слоем сжимаемой жидкости (решение методом коллокаций) и упругим полупространством (методом ортогональных полиномов) при горизонтальных колебаниях.

В пункте 6.2.1 рассмотрена вспомогательная задача о гидродинамическом давлении слоя жидкости на цилиндр. Далее задача о колебаниях цилиндра рассматривается с учетом взаимодействия опоры с упругим основанием. Выполнен численный анализ горизонтальных колебаний цилиндра при гармонических и нестационарных нагрузках. Установлены закономерности изменения во времени перемещений и гидродинамического давления на цилиндр. В пункте 6.2.2 проведен анализ искомых функций при вариациях независимых параметров: массы цилиндра, высоты слоя жидкости и радиуса цилиндра. Показано, что эффекты взаимодействия цилиндра с упругим полупространством и слоем жидкости играют существенную роль при расчетах конструкций (морских гравитационных платформ) на нестационарные воздействия. В пункте 6.2.3 представлена методика решения задачи в случае учета изгибных колебаний цилиндра в слое жидкости на упругом полупространстве и исследованы соответствующие эффекты [231].

### 6.2.1 Горизонтальные колебания жесткого цилиндра в слое жидкости на жестком основании

Рассмотрим здесь задачу по определению гидродинамического давления на вертикальный цилиндр в слое жидкости, когда основание цилиндра является жестким. Пусть цилиндр, радиус которого  $r_0$  равен радиусу фундаментной

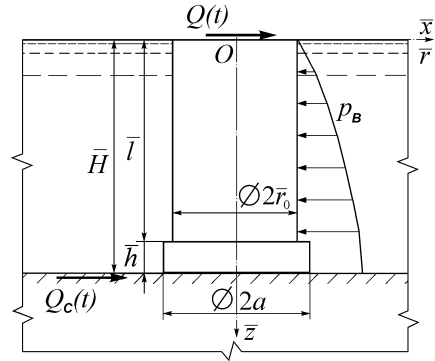


Рис. 6.8. Цилиндр в слое жидкости на упругом полупространстве

плиты  $a$ , движется горизонтально в слое жидкости высотой  $H$  по произвольному закону  $U_x(t)$  (см. рис. 6.8).

Начальное и граничные условия для уравнения (1.4) с оператором (1.9) имеют следующий вид:

нулевое давление на поверхности жидкости

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad z = 0; \quad (6.108)$$

вертикальная скорость жидкости равна нулю

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = H; \quad (6.109)$$

условие равенства скорости цилиндра горизонтальной составляющей скорости жидкости по боковой поверхности цилиндра, направленной по оси  $Ox$

$$\left. \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \frac{dU_x(\bar{t})}{dt}, \quad 0 \leq z \leq H. \quad (6.110)$$

При этом справедливо разложение искомой функции по угловой координате:

$$\Phi(r, \varphi, z, \bar{t}) = \Phi^*(r, z, \bar{t}) \cos \varphi. \quad (6.111)$$

Последнее выражение подставляем в уравнение (1.4) с оператором (1.9) и выполняем преобразование Лапласа по переменной  $\bar{t}$  при нулевых начальных условиях с параметром преобразования  $p$ :

$$\frac{d^2 \bar{\Phi}^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \bar{\Phi}^*}{dr} - \frac{1}{r^2} \bar{\Phi}^* + \frac{d^2 \bar{\Phi}^*}{dz^2} - \frac{p^2}{c_0^2} \bar{\Phi}^* = 0. \quad (6.112)$$

После применения преобразования Ханкеля (1.138)–(1.142) для значения  $\nu=1$  к уравнению (6.112) получаем

$$\int_{r_0}^{\infty} \left( \frac{d^2 \bar{\Phi}^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \bar{\Phi}^*}{dr} - \frac{1}{r^2} \bar{\Phi}^* \right) C_1(r, \xi) r dr + \frac{d^2 \tilde{\Phi}^*}{dz^2} - \frac{p^2}{c_0^2} \tilde{\Phi}^* = 0. \quad (6.113)$$

Тогда, после двукратного интегрирования по частям в соотношении (6.113), учитывая свойства ядра (1.141) и (1.142), имеем

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}^*}{dz^2} - \left( \xi^2 + \frac{p^2}{c_0^2} \right) \tilde{\Phi}^* = r_0 C_1(r_0 \xi) \left. \frac{d \tilde{\Phi}^*}{dr} \right|_{r=r_0}, \quad (6.114)$$

где

$$\tilde{\Phi}^*(\xi, z, p) = \int_{r_0}^{\infty} \bar{\Phi}^*(r, z, p) C_1(r, \xi) r dr \quad (6.115)$$

является изображением по Лапласу и Ханкелю функции  $\Phi^*(r, z, \bar{t})$ .

Далее к граничному условию (6.110) применяем преобразование Лапласа и результат подставляем в уравнение (6.114):

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}^*}{dz^2} - \left( \xi^2 + \frac{p^2}{c_0^2} \right) \tilde{\Phi}^* = r_0 C_1(r_0 \xi) p \bar{U}_x(p). \quad (6.116)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (6.108) и (6.109), имеет вид

$$\tilde{\Phi}^*(\xi, z, p) = r_0 p \bar{U}_x(p) \frac{C_1(r_0 \xi)}{\alpha^2} \left\{ \frac{\cosh[\alpha(H-z)]}{\cosh(\alpha H)} - 1 \right\}, \quad (6.117)$$

где  $\alpha = \sqrt{\xi^2 + p^2/c_0^2}$ .

Применяя формулу обращения преобразования Ханкеля (1.139), получаем искомую функцию (в изображениях Лапласа) для потенциала скорости жидкости:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}^*(r, z, p) &= r_0 p \bar{U}_x(p) \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{C_1(r_0 \xi)}{\alpha^2} \left\{ \frac{\cosh[\alpha(H-z)]}{\cosh(\alpha H)} - 1 \right\} C_1(r, \xi) \xi d\xi. \end{aligned} \quad (6.118)$$

Учитывая, что гидродинамическое давление в жидкости определяется зависимостями

$$p_B(r, \varphi, z, \bar{t}) = -\rho_B \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad p_B^*(r, z, \bar{t}) = -\rho_B \frac{\partial \Phi^*}{\partial t}, \quad (6.119)$$

где  $\rho_B$  – плотность жидкости, получаем следующее выражение для его определения (в изображениях Лапласа):

$$\begin{aligned} \bar{p}_B^*(r, z, p) &= r_0 \rho_B p^2 \bar{U}_x(p) \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{C_1(r_0 \xi)}{\alpha^2} \left\{ \frac{\cosh[\alpha(H-z)]}{\cosh(\alpha H)} - 1 \right\} C_1(r, \xi) \xi d\xi. \end{aligned} \quad (6.120)$$

Заметим, что  $\bar{p}_B(r, \varphi, z, p) = \bar{p}_B^*(r, z, p) \cos \varphi$ . Тогда равнодействующая гидродинамического давления на цилиндр в проекции на ось  $x$  определится интегралом

$$\bar{Q}_H(r_0, H, p) = r_0 \int_0^H \int_0^{2\pi} \bar{p}_B^*(r_0, z, p) \cos^2 \varphi d\varphi dz. \quad (6.121)$$

Подставляя соотношение (6.120) в (6.121) и выполняя интегрирование, имеем

$$\begin{aligned} \bar{Q}_H(r_0, H, p) &= -\pi r_0 \rho_B p^2 \bar{U}_x(p) \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{C_1^2(r_0 \xi)}{\alpha^2} \left( \frac{\text{th}(H\alpha)}{\alpha} - H \right) \xi d\xi. \end{aligned} \quad (6.122)$$

Далее найдем момент гидродинамического давления на цилиндр относительно оси, расположенной у нижнего конца цилиндра. При интегрировании по вертикальной координате введем переменную  $z' = H - z$ . Тогда искомый момент определится интегралом

$$\bar{M}_H(r_0, p) = -r_0 \int_0^H \int_0^{2\pi} \bar{p}_B^*(r_0, z', p) z' \cos^2 \varphi d\varphi dz'. \quad (6.123)$$

После подстановки соотношения (6.120) в формулу (6.123) и интегрирования получаем

$$\begin{aligned} \bar{M}_H(r_0, p) &= -\pi r_0 \rho_B p^2 \bar{U}_x(p) \int_0^\infty \frac{C_1^2(r_0 \xi)}{\alpha^2} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \left[ \frac{H\alpha \sinh(H\alpha) + 1}{\cosh(H\alpha)} - 1 \right] - \frac{1}{2} H^2 \right\} \xi d\xi. \end{aligned} \quad (6.124)$$

Формулы (6.122) и (6.124) являются необходимыми для решения задачи о взаимодействии цилиндра с основанием.

### 6.2.2 Жесткий цилиндр на упругом полупространстве под слоем жидкости при горизонтальных колебаниях

Пусть жесткий цилиндр заземлен нижним концом в жесткой фундаментной плите радиуса  $a$  и высоты  $\bar{h}$  (см. рис. 6.8, с. 313), расположенной под слоем жидкости на границе с упругим полупространством, и под действием заданной горизонтальной нагрузки совершает только горизонтальные колебания. Отметим, что угловые и связанные горизонтально-вращательные колебания могут быть рассмотрены отдельно. Неизвестными в рассматриваемой задаче являются горизонтальное перемещение цилиндра вместе с фундаментом  $U_x(t)$ , гидродинамическое давление на боковую поверхность цилиндра и фундамента  $p_B(r_0, \varphi, z, t)$ , однонаправленные касательные напряжения по контакту круглой фундаментной плиты с основанием  $\tau_x(r, t)$ .

При решении задачи сделаем следующие допущения:

1) считаем, что  $\bar{h} \ll \bar{H}$  ( $\bar{H} \approx l$ ) и влияние на суммарное гидродинамическое давление различия диаметров  $a$  и  $r_0$  является малым;

2) предполагаем, что взаимодействие слоя жидкости с упругим полупространством происходит через фундаментную плиту, несущую цилиндр, а вертикальные составляющие скорости жидкости на границе слоя жидкости и упругого полупространства малы.

Ограничение, накладываемое допущением 2, может быть устранено путем учета соответствующей составляющей скорости жидкости.

Рассматриваемая конструкция (цилиндр-фундамент) взаимодействует с двумя средами: слоем жидкости и упругим полупространством. Поэтому необходимо решать совместно уравнения движения для слоя жидкости (1.9), упругого полупространства и фундамента с цилиндром. Последнее уравнение имеет вид

$$M \frac{d^2 U_x(t)}{dt^2} = Q(t) - Q_H(r_0, H, t) - Q_R(t), \quad (6.125)$$

где  $U_x(t)$  – горизонтальное перемещение системы цилиндр-фундамент; параметр  $Q(t)$  является заданной горизонтальной силой (например, равнодействующей волнового давления или ледовой динамической нагрузки). В случае сейсмического горизонтального воздействия имеем

$$Q(t) = -Mg_c f_x(t), \quad (6.126)$$

где  $M$  – масса цилиндра вместе с фундаментом;  $f_x(t)$  – нормированное горизонтальное ускорение площадки (акселерограмма) при отсутствии сооружения;  $g_c$  – характерное ускорение акселерограммы. Параметр  $Q_H(r_0, H, t)$  – равнодействующая гидродинамического давления на цилиндр, определенная для изображения Лапласа выражением (6.122);  $Q_R(t)$  – равнодействующая касательных напряжений  $\tau_x(r, t)$  по контакту фундамента с основанием.

Уравнение (6.125) необходимо решать совместно с уравнениями движения для упругого полупространства. Решение подобной задачи, но при отсутствии гидродинамической нагрузки  $Q_H(r_0, H, t)$ , получено в работе [232]. Ниже приведем решение с учетом этой нагрузки.

Контактные напряжения  $\tau_x(r, t)$  будем искать в виде ряда (6.36). В этом случае равнодействующая однонаправленных касательных напряжений определяется через первый коэффициент разложения:

$$Q_R(t) = 2\pi a^2 B_0(t). \quad (6.127)$$

Горизонтальные перемещения в направлении оси  $x$  границы упругого полупространства от нагрузки (6.36) находятся (в изображениях Лапласа) из выражения

$$\bar{u}_x(r, 0, s) = \frac{a}{2\mu} \int_0^\infty \left[ \frac{s^2 \sqrt{\xi^2 + s^2}}{F(\xi, s)} + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + s^2}} \right] \bar{\tau}_x(\xi, s) \xi J_0(r\xi) d\xi, \quad (6.128)$$

где  $\bar{\tau}_x(\xi, s)$  – двойное преобразование Лапласа и Ханкеля нулевого порядка функции (6.36), которое представляется формулой (6.37).

С целью удовлетворения контактному условию

$$U_x(t) = u_x(r, 0, t), \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (6.129)$$

разложим выражение (6.128), используя представление (6.40), в ряд по многочленам  $P_{2n}(\sqrt{1-r^2})$ . В результате имеем равенство

$$\bar{u}_x(r, 0, s) = \frac{a}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s) P_{2n}(\sqrt{1-r^2}), \quad (6.130)$$

где коэффициенты  $b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s)$  определяются формулой (6.43).

Рассмотрим уравнение (6.125). Применим к нему преобразование Лапласа по безразмерному времени  $t$ . Тогда, с учетом выражения (6.127), получаем

$$m_0 \frac{\mu}{a} s^2 \bar{U}_x(s) + \frac{\bar{Q}_H(r_0, H, s)}{2\pi a^2} + \bar{B}_0(s) = \frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a^2}, \quad (6.131)$$

где  $m_0$  – приведенная масса цилиндра вместе с фундаментом

$$m_0 = \frac{M}{2\pi a^3 \rho_h}. \quad (6.132)$$

Выражение для равнодействующей гидродинамического давления (6.122) в безразмерных переменных примет вид

$$\bar{Q}_H(r_0, H, s) = \pi \mu a r_0^2 s^2 \frac{\rho_B}{\rho_h} \bar{U}_x(s) I_1(r_0, H, s), \quad (6.133)$$

где

$$I_1(r_0, H, s) = -H \int_0^{\infty} \frac{C_1^2(r_0 \xi)}{\alpha^2} \left[ \frac{\text{th}(H\alpha)}{H\alpha} - 1 \right] \xi d\xi \quad (6.134)$$

и

$$\alpha = \sqrt{\xi^2 + \beta_0^2 s^2}, \quad \beta_0 = c_2/c_0, \quad r_0 = \bar{r}_0/a; \quad H = \bar{H}/a.$$

После подстановки выражения (6.133) в уравнение (6.131) получаем

$$[m_0 + \bar{m}_H(s)] s^2 \frac{\mu}{a} \bar{U}_x(s) + \bar{B}_0(s) = \frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a^2}, \quad (6.135)$$

где слагаемое

$$\bar{m}_H(s) = \bar{m}_H = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{\rho_B}{\rho_h} I_1(r_0, H, s) \quad (6.136)$$

может рассматриваться как приведенная присоединенная масса жидкости при колебаниях цилиндра в слое жидкости. Удовлетворяя контактному условию (6.129), подставляем выражение (6.130) в уравнение (6.135) и получаем



уравнение

$$(m_0 + \bar{m}_H) s^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) \times \quad (6.137)$$

$$\times b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s) P_{2n}(\sqrt{1-r^2}) + \bar{B}_0(s) = \frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a^2}.$$

Приравнявая в уравнении (6.137) коэффициенты при полиномах Лежандра одинаковых порядков и учитывая, что  $P_0(\sqrt{1-r^2})=1$ , получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных  $\bar{B}_{2k}(s)$  (в долях  $\bar{Q}(s)/2\pi a^2$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} [1 + (m_0 + \bar{m}_H) s^2 b_{1/2, 1/2}(s)] \bar{B}_0(s) + \\ + (m_0 + \bar{m}_H) s^2 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 1/2}(s) = 1; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s) = 0 \quad n = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (6.138)$$

После решения системы (6.138) перемещение  $\bar{U}_x(s)$  из выражения (6.135) находится в виде

$$\bar{U}_x(s) = \frac{a}{\mu} \frac{\bar{Q}(s)/2\pi a^2}{[m_0 + \bar{m}_H] s^2} [1 - \bar{B}_0(s)]. \quad (6.139)$$

Если при решении рассматриваемой задачи ограничиться определением только равнодействующей (6.127), то в разложении (6.36) достаточно удерживать первый член ряда ( $k=0$ ). Тогда из первого уравнения (6.138) находим в явном виде коэффициент

$$\bar{B}_0(s) = \frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a^2} \frac{1}{1 + (m_0 + \bar{m}_H) s^2 b_{1/2, 1/2}(s)}, \quad (6.140)$$

а перемещение при подстановке соотношения (6.140) в (6.139) записывается в виде

$$\bar{U}_x(s) = \frac{a}{\mu} \frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a^2} \frac{b_{1/2, 1/2}(s)}{1 + (m_0 + \bar{m}_H) s^2 b_{1/2, 1/2}(s)}. \quad (6.141)$$

Тогда полученное выражение для перемещения подставляем в соотношение (6.133) и получаем в явном виде формулу для равнодействующей гидродинамического давления на цилиндр:

$$\bar{Q}_H(r_0, H, s) = \bar{Q}(s) \frac{s^2 \bar{m}_H b_{1/2, 1/2}(s)}{1 + [m_0 + \bar{m}_H] s^2 b_{1/2, 1/2}(s)}. \quad (6.142)$$

Гидродинамическое давление на цилиндр (6.120) в безразмерных переменных определяется выражением

$$\bar{p}_B^*(r_0, z, s) = -r_0 \frac{\rho_B \mu}{\rho_h \alpha} s^2 \bar{U}_x(s) \int_0^\infty \frac{C_1^2(r_0 \xi)}{\alpha^2} \left[ \frac{\cosh \alpha(H-z)}{\cosh \alpha H} - 1 \right] \xi d\xi. \quad (6.143)$$

При подстановке выражения (6.141) в (6.143) имеем представление

$$\begin{aligned} \bar{p}_B^*(r_0, z, s) = & -\frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a} r_0 \frac{\rho_B}{\rho_h} \frac{s^2 b_{1/2, 1/2}(s)}{1 + (m_0 + \bar{m}_H) s^2 b_{1/2, 1/2}(s)} \times \\ & \times \int_0^\infty \frac{C_1^2(r_0 \xi)}{\alpha^2} \left\{ \frac{\cosh[\alpha(H-z)]}{\cosh(\alpha H)} - 1 \right\} \xi d\xi. \end{aligned} \quad (6.144)$$

Таким образом, получены (в изображениях Лапласа по времени) все искомые функции, определяющие решение задачи: равнодействующая контактных напряжений (6.140), горизонтальное перемещение цилиндра (6.141), равнодействующая гидродинамического давления на цилиндр (6.142), распределение гидродинамического давления по высоте цилиндра (6.144).

Обратное преобразование Лапласа выполняем численно, с помощью интегралов Фурье, полагая  $s = i\zeta$  и выполняя интегрирование по безразмерной частоте гармонических колебаний  $\zeta$ .

Приведем некоторые результаты по численной реализации представленной методики решения контактной задачи для жесткого цилиндра, взаимодействующего со слоем жидкости и с упругим полупространством при горизонтальных колебаниях.

В качестве неизменных параметров приняты: отношение плотности материала цилиндра (бетон) к плотности материала основания (мягкий грунт)  $\rho/\rho_h = 1,4$ ; отношение плотности воды к плотности материала основания  $\rho_H/\rho_h = 0,55$ ; отношение скорости поперечной волны в основании к скорости звука в воде  $\beta_0 = c_2/c_0 = 0,143$ ; коэффициент Пуассона материала основания  $\nu = 0,3$ .

Численный анализ был выполнен при вариациях таких безразмерных параметров:  $m_0$  – приведенная масса цилиндра,  $H = \bar{H}/a$  – безразмерная высота слоя жидкости,  $\bar{r}_0 = a$  – радиус цилиндра, равный радиусу фундаментной плиты; высота цилиндра  $l$  равна высоте слоя жидкости. Вычисления проводились в предположении воздействия горизонтальной внезапно приложенной на уровне подошвы постоянной силы  $Q(t) = QH(t)$ . Результаты расчета колебаний представлены на рис. 6.9 – 6.14. На рис. 6.9 показаны графики изменения во времени горизонтальных перемещений цилиндра (в долях статического значения перемещения  $Q b_{1/2, 1/2}(0)/(2\pi \bar{r}_0 \mu)$ ). Кривая 1 характеризует движение невесомого цилиндра с присоединенной массой жидкости. При увеличении собственной массы цилиндра (кривые 2 и 3) максимальные перемещения возраст-

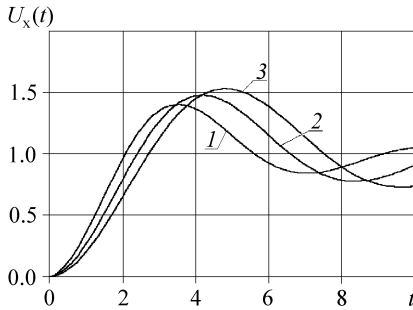


Рис. 6.9. Горизонтальные перемещения цилиндра при  $a = 8$  м,  $H = 4$  и вариациях параметра  $m_0$ : 1 – 0; 2 – 0,4; 3 – 0,8

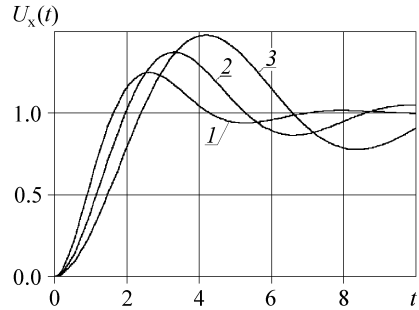


Рис. 6.10. Горизонтальные перемещения цилиндра при  $m_0 = 0,4$ ,  $a = 8$  м и вариациях  $H$ : 1 – 0; 2 – 2; 3 – 4

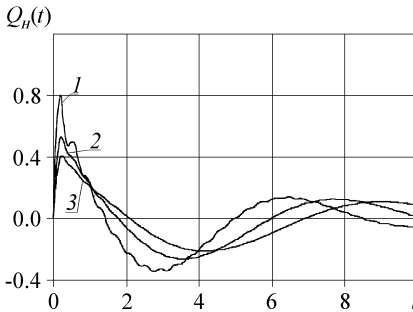


Рис. 6.11. Равнодействующая гидродинамического давления на цилиндр при  $a = 8$  м,  $H = 4$  и вариациях  $m_0$ : 1 – 0; 2 – 0,4; 3 – 0,8

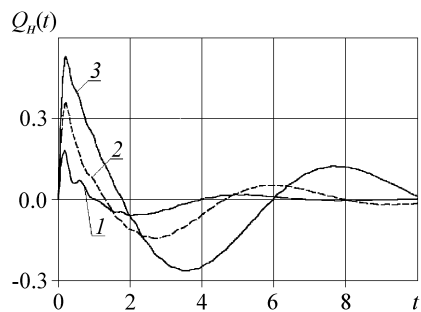


Рис. 6.12. Равнодействующая гидродинамического давления на цилиндр при  $m_0 = 0,4$ ,  $a = 8$  м и вариациях  $H$ : 1 – 1; 2 – 2; 3 – 4

тают. Этот эффект обусловлен характером внешней нагрузки  $QH(t)$ , которая возбуждает инерционные силы, пропорциональные массе тела и приводящие к увеличению его перемещения. Обратный эффект имеет место при действии кратковременной нагрузки, например, в виде дельта-функции. В этом случае увеличение массы тела вызывает уменьшение перемещения. Осцилляции происходят относительно статического значения и в пределе перемещения равны ему.

Закономерности изменения во времени равнодействующей гидродинамического давления на цилиндр (в долях  $Q$ ) показаны на рис. 6.11. Давление жидкости является знакопеременным, затухающим во времени, что обуслов-

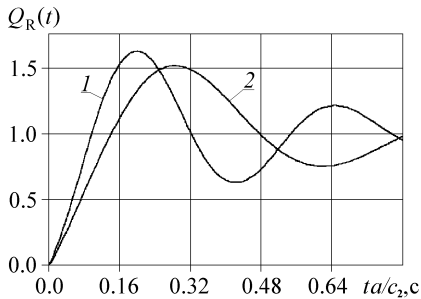


Рис. 6.13. Равнодействующая касательных напряжений при вариации  $\bar{r}_0$ : 1 – 4 м; 2 – 8 м

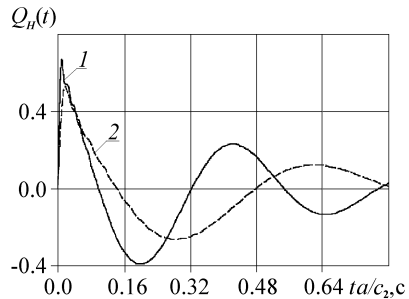


Рис. 6.14. Равнодействующая гидродинамического давления при вариации  $\bar{r}_0$ : 1 – 4 м; 2 – 8 м

лено излучением на бесконечность энергии в основании и слое жидкости. С увеличением массы цилиндра  $m_0$  амплитуды колебаний убывают.

Из графиков для равнодействующей гидродинамического давления на цилиндр, представленных на рис. 6.12, видно, что при увеличении толщины слоя жидкости соответственно возрастает максимальное значение суммарного гидродинамического давления на цилиндр.

Влияние высоты слоя жидкости на перемещения цилиндра характеризует рис. 6.10. С увеличением высоты слоя возрастает присоединенная масса жидкости и, соответственно, увеличиваются максимальные перемещения.

Представляет также интерес установление зависимости расчетных функций от радиуса цилиндра. Положим  $m_0 = 0,4$ ,  $\bar{H} = 32$  м. На рис. 6.13 приведены графики для равнодействующей касательных напряжений по контакту с основанием  $Q_R$  (в долях  $Q$ ). При увеличении радиуса цилиндра наблюдается снижение максимальных амплитуд равнодействующей контактных напряжений, что обусловлено уменьшением ускорения цилиндра и, соответственно, инерционных сил. Аналогичные закономерности проявляются и для равнодействующей гидродинамического давления  $Q_H$  на цилиндр (рис. 6.14). Уменьшение амплитуд колебаний гидродинамического давления здесь связано с уменьшением скорости движения цилиндра при увеличении его радиуса.

Более сложным является получение результатов при нестационарных нагрузках. В случае действия мгновенного импульса закономерности изменения во времени горизонтальных перемещений при разных высотах слоя жидкости показаны на рис. 6.15. С увеличением  $H$  максимальные перемещения убывают: чем больше масса тела (в том числе за счет увеличения присоединенной массы жидкости), тем меньшие перемещения возбуждает мгновенный импульс. Противоположный эффект имеет место при действии внезапно приложенной постоянной силы (рис. 6.10), которая вызывает инерционные силы, пропорциональные массе тела, и приводит к увеличению максимальных перемещений.

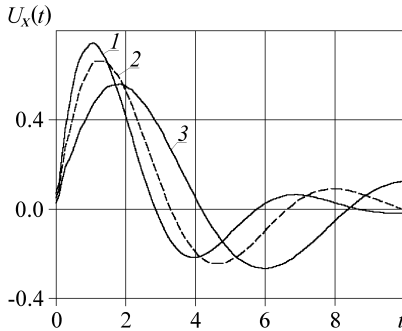


Рис. 6.15. Горизонтальное перемещение цилиндра при действии силы  $Q(t) = Q\delta(t)$  и вариации  $H$  :  
1 – 1, 2 – 2, 3 – 4

На рис. 6.16 – 6.19 представлены некоторые результаты численного анализа горизонтальных колебаний жесткого цилиндра под действием гармонической силы  $Q(t) = Q \exp(i\zeta t)$  (рис. 6.16, рис. 6.17); мгновенного импульса  $Q(t) = Q\delta(t)$ , где  $\delta(t)$  – дельта-функция, (рис. 6.15); сейсмической нагрузки, заданной акселерограммой площадки  $g_u(t)_a$  (рис. 6.18, рис. 6.19). Фиксированными параметрами для всех случаев приняты  $a = 8$  м,  $m_0 = 0,4$ . Переменными параметрами являются: относительная высота слоя жидкости  $H$  (рис. 6.16 – 6.18) и скорость  $c_2$  (рис. 6.19).

На рис. 6.16 представлены кривые изменения модуля горизонтальных перемещений  $|U_x(\zeta)|$  (в долях  $Q/(2\pi a\mu)$ ) в зависимости от частоты гармонических колебаний  $\zeta$  при разных высотах слоя жидкости. Увеличение  $H$  приводит к возрастанию максимальных амплитуд и уменьшению резонансной частоты, что объясняется увеличением присоединенной массы жидкости. Закономерности изменений в частотной области равнодействующей гидродинамического давления на цилиндр  $|Q_H(\zeta)|$  (в долях  $Q$ ) характеризует рис. 6.17. Здесь кроме резонансов, обусловленных массой цилиндра и присоединенной массой жидкости, наблюдаются также резонансы, соответствующие собственным частотам слоя жидкости.

Примером реальной нагрузки является сейсмическое воздействие, задаваемое акселерограммой площадки при отсутствии сооружения (рис. 6.19, кривая 3). На рис. 6.18 приведены закономерности изменения во времени горизонтальных ускорений цилиндра  $g_u(\bar{t})$ ,  $\text{м/с}^2$  при разных высотах слоя жидкости. Наблюдается уменьшение максимальных ускорений при увеличении высоты слоя жидкости. Особенно важными являются эффекты взаимодействия сооружения с основанием. Влияние последнего на горизонтальное ускорение цилиндра в сравнении с акселерограммой площадки показано на рис. 6.19. Как видно из рисунка, максимальные ускорения цилиндра снижаются в несколько раз (при  $c_2 = 100$  м/с) в случае учета взаимодействия с основанием.

На представленных здесь частных примерах выявлены такие закономерности.

1. При гармонических колебаниях: максимальные амплитуды горизонтальных перемещений увеличиваются в 1,5 раза, а равнодействующая гидродинамического давления на цилиндр – в 5 раз при увеличении в 4 раза высоты

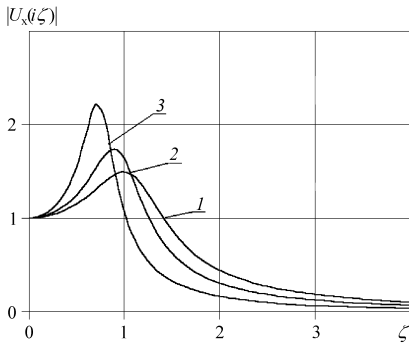


Рис. 6.16. Амплитуда горизонтального перемещения цилиндра при вариации глубины  $H$ : 1 – 1, 2 – 2, 3 – 4

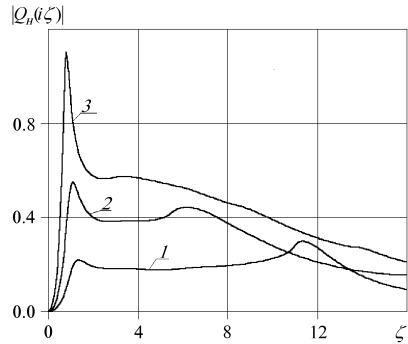


Рис. 6.17. Равнодействующая гидродинамического давления на цилиндр при вариации глубины  $H$ : 1 – 1, 2 – 2, 3 – 4

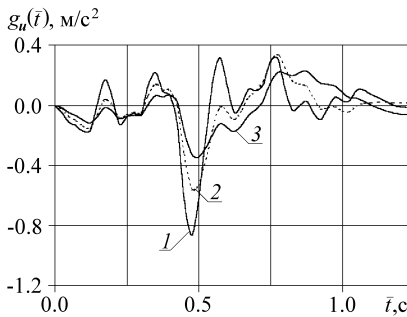


Рис. 6.18. Влияние высоты слоя жидкости на горизонтальное ускорение цилиндра при  $c_2 = 100$  м/с и вариации  $H$ : 1 – 0, 2 – 2, 3 – 4

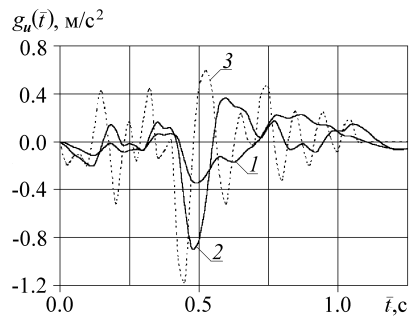


Рис. 6.19. Влияние на сейсмическое горизонтальное ускорение цилиндра при  $H = 4$  вариации  $c_2$ : 1 – 100 м/с, 2 – 200 м/с, 3 – акселерограмма площадки

слоя жидкости, что обусловлено увеличением присоединенной массы при возрастании высоты слоя жидкости.

2. При действии мгновенного импульса: максимальные горизонтальные перемещения цилиндра уменьшаются в 1,4 раза при увеличении в 4 раза высоты слоя жидкости.

3. При сейсмическом воздействии: максимальное горизонтальное ускорение цилиндра уменьшается в 2 раза при увеличении высоты слоя жидкости в 4 раза; при фиксированной высоте слоя жидкости и значении скорости попе-

речной волны в упругом полупространстве  $c_2 = 100$  м/с максимальное ускорение цилиндра в 3 раза меньше, чем ускорение площадки при отсутствии сооружения, что обусловлено учетом взаимодействия цилиндра с основанием и слоем жидкости.

Полученные результаты представляют интерес, например, при исследованиях и расчетах колебаний морских платформ гравитационного типа под действием силовых (волновых, ледовых) и кинематических (сейсмических) нагрузок. Анализ результатов свидетельствуют о необходимости и возможности учета взаимодействия конструкции гравитационной морской платформы с водной средой и основанием на стадии проектирования.

### 6.2.3 Колебаниях упругого цилиндра в слое жидкости на упругом полупространстве

Рассмотрим колебания цилиндра в слое жидкости в случае, когда жесткость на изгиб является конечной и движение его можно описать дифференциальным уравнением изгиба стержня кругового сечения. Данный пункт соответствует содержанию статьи [231]. Полагаем, что  $U_x(r, t)$  – перемещения стержня, состоящее из общего горизонтального смещения цилиндра с фундаментом и прогиба. В данном случае уравнения для потенциала скорости жидкости (1.9) и движения фундамента (6.125) следует дополнить уравнением колебаний цилиндра (стержня)

$$EJ \frac{\partial^4 U_x}{\partial z^4} + \pi r_0^2 \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} = -\pi r_0 p_B^*(r_0, z, t), \quad (6.145)$$

где  $\pi r_0 \rho_B^*(r_0, z, t)$  – гидродинамическая нагрузка на цилиндр (в проекции на ось  $x$ ), определяемая через потенциал скорости по формуле (6.119), и  $EJ$  – изгибная жесткость стержня. При решении уравнения (1.9) граничное условие (6.110) запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial r} = \frac{\partial U_x(z, t)}{\partial t} \quad (r = r_0, 0 \leq z \leq H). \quad (6.146)$$

Тогда, после применения к уравнению (1.9) (при безразмерном  $t$ ) преобразования Лапласа и Ханкеля (1.138), а к уравнению (6.145) – преобразования Лапласа, с учетом условия (6.146), получим следующую систему дифференциальных уравнений в безразмерных переменных:

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}^*}{dz^2} - \alpha^2 \tilde{\Phi}^*(\xi, z, s) = r_0 l^2 c_2 C_1(r_0 \xi) s \bar{U}_x(z, s), \quad (6.147)$$

$$\frac{d^4 \bar{U}_x}{dz^4} + k_1^2 \frac{\rho_c}{\rho_h} s^2 \bar{U}_x(z, s) = \frac{k_1^2 \rho_B}{r_0 \rho_h c_2} s \bar{\Phi}^*(r_0, z, s), \quad (6.148)$$

где

$$k_1^2 = \pi r_0^2 \frac{\mu l^4}{EJ}; \quad \alpha^2 = \frac{l^2}{a^2} (\xi^2 + \beta_0^2 s^2). \quad (6.149)$$

При этом  $\rho_c$  – плотность материала сплошного цилиндра,  $\bar{z}$  – размерная координата,  $z = \bar{z}/l$ ;  $l$  – длина стержня (полагаем, что  $l \approx H$ ).

При решении уравнения (6.147) необходимо удовлетворить граничным условиям (6.108) и (6.109), а при решении (6.148) – условиям на концах стержня. Например, если к верхнему концу стержня приложена горизонтальная сила  $Q(t)$ , то граничные условия принимают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U_x(z, t)}{\partial z^2} = 0, \\ \frac{\partial^3 U_x(z, t)}{\partial z^3} = \frac{l^3}{EJ} Q(t), \end{array} \right. \quad z = 0; \quad (6.150)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_x(z, t) = U_\Phi(t), \\ \frac{\partial U_x(z, t)}{\partial z} = 0, \end{array} \right. \quad z = 1, \quad (6.151)$$

где  $U_\Phi(t)$  – перемещение фундамента.

Решение уравнений (6.147) и (6.148) проведем с помощью использования так называемых координатных функций [301]. А именно, представим неизвестную функцию  $U_x(z, t)$  в виде ряда

$$U_x(z, t) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p(t) w_p(z), \quad (6.152)$$

где координатные функции

$$w_p(z) = \begin{cases} 1, & p = 0, \\ (z-1)^2 z^{p-1}, & p = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (6.153)$$

а  $a_p(t)$  – неопределенные коэффициенты, зависящие от времени. Использование координатных функций (6.153) позволяет удовлетворить условиям (6.151) жесткой заделки в фундаментную плиту, когда коэффициент  $a_0(t) = U_\Phi(t)$  характеризует общее горизонтальное смещение стержня вместе с фундаментом. Из граничных условий (6.150) получаем два уравнения, связывающие коэффициенты  $a_j(t)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , в разложении (6.152):

$$a_1(t) - 2a_2(t) + a_3(t) = 0, \quad (6.154)$$

$$a_2(t) - 2a_3(t) + a_4(t) = \frac{l^3}{6EJ} Q(t). \quad (6.155)$$

При этом функция  $U_x(z, t)$  должна удовлетворять уравнению (6.148).



Рассмотрим сначала уравнение (6.147). При подстановке выражения (6.151) в (6.147) это уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}^*}{dz^2} - \alpha^2 \tilde{\Phi}^*(\xi, z, s) = r_0 l^2 c_2 C_1(r_0 \xi) s \sum_{p=0}^{\infty} \bar{a}_p(s) w_p(z). \quad (6.156)$$

Неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с правой частью в виде степенной функции (6.152), может быть решено методом вариации постоянных. Опуская промежуточные выкладки, находим решение уравнения (6.156), которое удовлетворяет граничным условиям (6.108) и (6.109):

$$\tilde{\Phi}^*(\xi, z, s) = -r_0 c_2 l^2 s C_1(r_0 \xi) \sum_{p=0}^{\infty} \bar{a}_p(s) F_p^*(\xi, z, s), \quad (6.157)$$

где

$$F_p^*(\xi, z, s) = \frac{1}{\alpha^2} \left[ F_p(\xi, z, s) - F_p(\xi, 0, s) \times \right. \\ \left. \times \frac{\cosh \alpha(1-z)}{\cosh \alpha} - F_p'(\xi, 1, s) \frac{\sinh \alpha z}{\alpha \cosh \alpha} \right]; \quad (6.158)$$

$$\alpha^2 = \frac{l^2}{a^2} (\xi^2 + \beta_0^2 s^2);$$

$$F_p(\xi, z, s) = \sum_{k=0}^{[(p+1)/2]} \frac{1}{\alpha^{2k}} \frac{d^{2k} w_p(z)}{dz^{2k}}; \quad (6.159)$$

$$F_p'(\xi, z, s) = \sum_{k=0}^{[(p+1)/2]} \frac{1}{\alpha^{2k}} \frac{d^{2k+1} w_p(z)}{dz^{2k+1}}.$$

Здесь скобки  $[\cdot]$  обозначают целую часть числа. Заметим, что при  $\alpha=0$  функция (6.157) имеет неопределенность вида  $0/0$ . Для раскрытия этой неопределенности используем соотношения

$$F_0^*(\xi, z, s)|_{\alpha=0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-z)^2, \quad (6.160)$$

$$F_p^*(\xi, z, s)|_{\alpha=0} = \frac{2z}{p(p+1)(p+2)} - \frac{z^{p+1}}{p(p+1)} + \\ + \frac{2z^{p+2}}{(p+1)(p+2)} - \frac{z^{p+3}}{(p+2)(p+3)}, \quad p > 0. \quad (6.161)$$

К функции (6.157) применим обратное преобразование Ханкеля (1.139), тогда получим

$$\bar{\Phi}^*(r, z, s) = -r_0 c_2 \frac{l^2}{a^2} s \sum_{p=0}^{\infty} \bar{a}_p(s) \bar{\Phi}_{\delta/p}(r, z, s), \quad (6.162)$$

где

$$\bar{\Phi}_p(r, z, s) = \int_0^{\infty} C_1(r_0 \xi) F_p^*(\xi, z, s) C_1(r, \xi) \xi d\xi. \quad (6.163)$$

Полученное выражение для потенциала скорости жидкости (6.162) при  $r=r_0$  подставляем в уравнение (6.148), в результате чего имеем

$$\frac{d^4 \bar{U}_x}{dz^4} + k_1^2 \frac{\rho}{\rho_h} s^2 \bar{U}_x(z, s) = k_1^2 \frac{l^2}{a^2} \frac{\rho_B}{\rho_h} s^2 \sum_{p=0}^{\infty} \bar{a}_p(s) \bar{\Phi}_p(r_0, z, s), \quad (6.164)$$

где

$$\bar{\Phi}_p(r_0, z, s) = \int_0^{\infty} C_1^2(r_0 \xi) F_p^*(\xi, z, s) \xi d\xi. \quad (6.165)$$

Далее подставляем представление (6.152) для функции  $U_x(r, t)$  в уравнение (6.164). Тогда это уравнение запишется в виде

$$\sum_{p=1}^{\infty} \bar{a}_p(s) \bar{W}_p(z, s) + \bar{a}_0(s) \bar{W}_0(z, s) = 0 \quad (0 \leq z \leq 1), \quad (6.166)$$

где

$$\bar{W}_p(z, s) = w_p''''(z) + k_1^2 s^2 \bar{\Phi}_p^*(r_0, z, s); \quad (6.167)$$

$$\bar{\Phi}_p^*(r_0, z, s) = \frac{\rho}{\rho_h} w_p(z) + \frac{l^2}{a^2} \frac{\rho_H}{\rho_h} \bar{\Phi}_p(r_0, z, s); \quad (6.168)$$

$$w_p''''(z) = (p-1)(p-2) [p(p+1)z^{p-3} - \\ -2p(p-3)z^{p-4} + (p-3)(p-4)z^{p-5}].$$

Уравнение колебаний цилиндра (6.166) необходимо связать с колебаниями фундамента на упругом полупространстве, что осуществляется через коэффициент  $\bar{a}_0(s)$ . Так как  $\bar{a}_0(s) = \bar{U}_x(s) = \bar{u}_x(r, 0, s)$  (см. (6.129)), то по аналогии с соотношением (6.131) можно записать следующее выражение для искомого коэффициента

$$\bar{a}_0(s) = \frac{a}{\mu \pi_1 s^2} \left[ \frac{\bar{Q}_1(s)}{2\pi a^2} - \bar{B}_0(s) \right], \quad (6.169)$$

где перерезывающая сила в заделке равна

$$\bar{Q}_1(s) = \frac{6EJ}{l^3} \sum_{p=2}^{\infty} (p-1) \bar{a}_p(s) \quad (6.170)$$

и  $m_1 = M_{\Phi}/2\pi a^3 \rho_h$  – приведенная масса фундамента. С учетом соотношений (6.129) и (6.170) зависимость (6.169) принимает вид

$$\bar{u}_x(r, 0, s) = \frac{a}{\mu m_1 s^2} \left[ \sum_{p=2}^{\infty} (p-1) \bar{a}_p^* - \bar{B}_0(s) \right], \quad (6.171)$$

где

$$\bar{a}_p^*(s) = \frac{3EJ}{\pi a^2 l^3} \bar{a}_p(s). \quad (6.172)$$

Подставим в формулу (6.171) разложение (6.130) и приравняем коэффициенты при многочленах Лежандра одинаковых порядков. В результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений, учитывающую взаимодействие фундамента и цилиндра с основанием:

$$\left\{ \begin{array}{l} - \sum_{p=2}^{\infty} (p-1) \bar{a}_p^*(s) + \bar{B}_0(s) + \\ \quad + m_1 s^2 \sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 1/2}(s) = 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (6.173)$$

Далее исключаем коэффициент  $\bar{a}_0(s)$  из уравнения (6.166), выражая его через разложение (6.130). В результате имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{\infty} \bar{a}_p^*(s) \bar{W}_p(z, s) + 3r_0^2 \frac{l}{a} s^2 \bar{\Phi}_0^*(r_0, z, s) \times \\ & \times \sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 1/2}(s) = 0, \quad (0 \leq z \leq 1). \end{aligned} \quad (6.174)$$

Уравнение (6.174) должно удовлетворяться в любой точке указанного интервала. Если воспользоваться методом коллокаций, удовлетворяя этому уравнению в отдельных точках  $z_j = j\Delta z$  ( $j=0, 1, 2, \dots$ ;  $\Delta z$  – принятый шаг разбиения интервала), то уравнение (6.174) можно заменить системой алгебраических уравнений, записанных для каждого  $z_j$ . Таким образом, полная система алгебраических уравнений (в области изображений Лапласа), разрешающая задачу, будет включать уравнения (6.154) и (6.155) для граничных условий на верхнем конце стержня; систему уравнений, получаемых из уравнения (6.174)

для ряда значений  $z_j$ , удовлетворяющего дифференциальному уравнению изгиба стержня (6.148); систему уравнений (6.173), удовлетворяющую условию контакта фундамента, несущего цилиндр, с упругим полупространством. В результате искомая система алгебраических уравнений принимает вид

$$\bar{a}_1^*(s) - 2\bar{a}_2^*(s) + \bar{a}_3^*(s) = 0, \quad (6.175)$$

$$\bar{a}_2^*(s) - 2\bar{a}_3^*(s) + \bar{a}_4^*(s) = 1, \quad (6.176)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \bar{a}_p^*(s) \bar{W}_p(z_i, s) + 3r_0^2 \frac{l}{a} s^2 \bar{\Phi}_0^*(r_0, z_i, s) \times \quad (6.177)$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 1/2}(s) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

$$- \sum_{p=2}^{\infty} (p-1) \bar{a}_p^*(s) + \bar{B}_0(s) + m_1 s^2 \times \quad (6.178)$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 1/2}(s) = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{B}_{2k}(s) b_{2k+1/2, 2n+1/2}(s) = 0 \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.179)$$

где свободный член приведен в долях  $\bar{Q}(s)/2\pi a^2$ . При численном решении порядок усеченной системы уравнений (6.175)–(6.179) определяется количеством точек коллокации (шагом  $\Delta z$ ) для уравнения (6.174) и количеством членов ряда в разложении для контактных напряжений (6.36). При этом соответствие между числом неизвестных и порядком системы (6.175)–(6.179) регулируется количеством координатных функций  $w_p(z)$  (6.153) ( $p=1, 2, \dots$ ), удерживаемых в разложении (6.152). Например, если принять  $\Delta z = 0,2$  (количество точек коллокаций 6 и  $j=0, 1, 2, \dots, 5$ ), то в разложении (6.152), кроме коэффициента  $\bar{a}_0(s)$ , который при решении контактной задачи выражается через коэффициент  $\bar{B}_0(s)$ , необходимо удержать 8 членов ряда ( $p=1, 2, \dots, 8$ ).

После решения усеченной системы уравнений 9-го порядка коэффициент  $\bar{a}_0(s)$  (общее смещение) находится по формуле

$$\bar{a}_0(s) = \frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a \mu} \bar{B}_0(s) b_{1/2, 1/2}(s). \quad (6.180)$$

Прогиб стержня на верхнем конце ( $z=0$ ) определяется коэффициентом  $\bar{a}_1(s)$ . Суммарное перемещение в произвольной точке стержня (сумма прогиба и об-

щего смещения) определится выражением

$$\bar{U}_x(z, s) = \frac{l^3 \bar{Q}(s)}{6EJ} \left[ 3 \frac{r_0^2}{k_1^2} \frac{l}{a} \bar{B}_0(s) b_{1/2, 1/2}(s) + \sum_{p=1}^{\infty} \bar{a}_p^*(s) w_p(z) \right]. \quad (6.181)$$

При найденных значениях  $\bar{U}_x(z, s)$  гидродинамическое давление на цилиндр определяется из уравнения (6.145) выражением

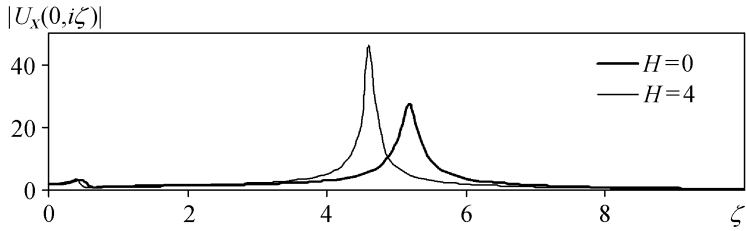
$$\begin{aligned} \bar{p}_B^*(r_0, z, s) = & -\frac{\bar{Q}(s)}{2\pi a^2} \left\{ r_0 \frac{\rho}{\rho_h} s^2 \left[ \bar{B}_0(s) b_{1/2, 1/2}(s) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{k_1^2}{3r_0^2} \frac{a}{l} \left( \bar{a}_1^*(s) w_1(z) + \bar{a}_2^*(s) w_2(z) \right) \right] \right\} + \\ & \left. + \frac{a}{3l} \sum_{p=3}^8 \bar{a}_p^*(s) \left[ w_p''''(z) + \frac{k_1^2}{r_0} \frac{a}{l} \frac{\rho}{\rho_h} s^2 w_p(z) \right] \right\}. \quad (6.182) \end{aligned}$$

Таким образом, выше приведены (в изображениях Лапласа) необходимые соотношения, разрешающие поставленную задачу: система алгебраических уравнений (6.175)–(6.179); представление для перемещений (прогибов) цилиндра (6.152), дифференцирование которого позволяет найти углы поворота сечений цилиндра, изгибающие моменты и перерезывающие силы в нем; общее смещение цилиндра вместе с фундаментом (6.180); суммарное давление по высоте цилиндра (соотношение (6.182) в проекции на ось  $x$ ). Возврат к оригиналам выполняем с помощью интеграла Фурье.

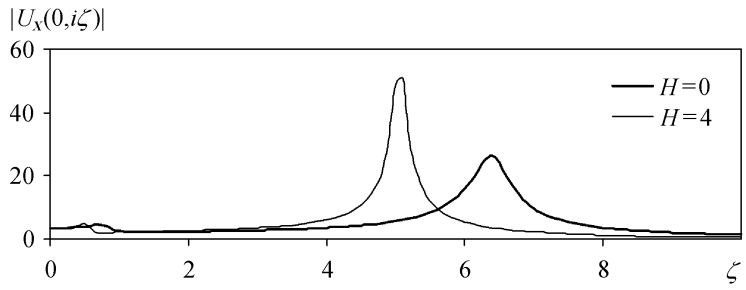
Проведен численный анализ гармонических и нестационарных колебаний системы упругий цилиндр-слой жидкости-упругое полупространство. Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 6.20 – 6.23. На рис. 6.20 и 6.21 приведены графики амплитуд колебаний верхнего конца полого стержня (цилиндра) в зависимости от  $\zeta$  (с нормировкой  $l^3 Q / (6EJ)$ ) при разных отношениях радиусов полости и цилиндра  $\varepsilon$  для двух случаев: при отсутствии и наличии слоя жидкости относительной высоты  $H = 4$  (рис. 6.20) и  $H = 8$  (рис. 6.21). По этим графикам можно определить резонансные частоты и амплитуды и выявить влияние жидкости, которое заключается в том, что присоединенная масса жидкости увеличивает резонансные амплитуды, а при росте гибкости стержня влияние жидкости возрастает. Количественные соотношения можно установить по графикам и расчетам по компьютерным программам. Рис. 6.22 и рис. 6.23 иллюстрируют изменение изгибающего момента в заделке (в долях  $Ql$ ). Физические закономерности здесь примерно такие, как и для прогибов, а отличие в том, что при наличии жидкости моменты уменьшаются с увеличением гибкости цилиндра.

На рис. 6.24 – 6.27 показаны графики изменения во времени соответственно прогибов верхнего конца стержня и изгибающего момента в заделке при дей-

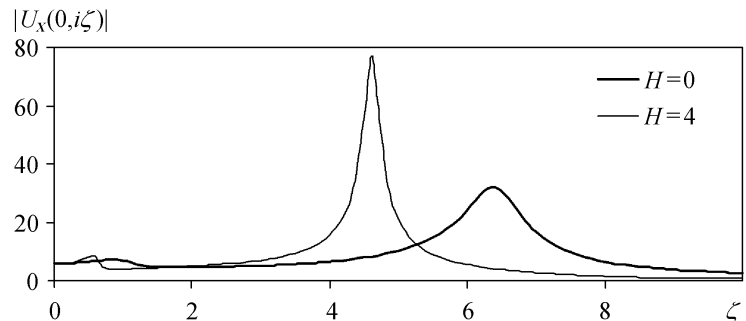
ствии внезапно приложенной постоянной горизонтальной силы  $Q(t) = QH(t)$ . Как видно из графиков, колебания происходят относительно статических значений искомых величин и затухают со временем. Наличие слоя жидкости приводит к увеличению амплитуд колебаний и продолжительности колебательного процесса до полного затухания.



а)

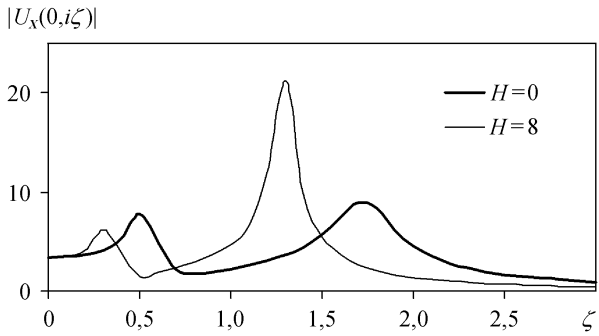


б)

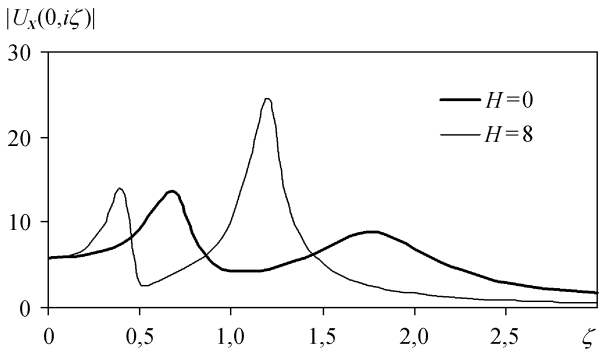


в)

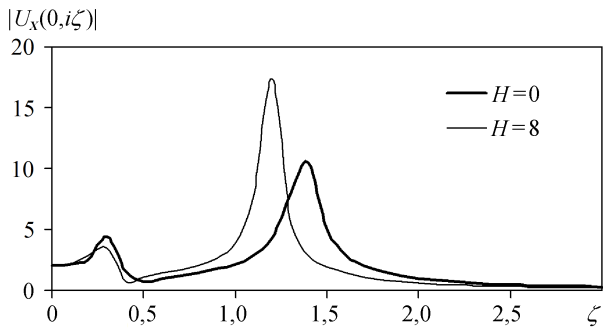
Рис. 6.20. Амплитуда прогиба конца стержня для  $H = 4$  при вариациях  $\varepsilon$  :  
а)  $- 0$ ; б)  $- 0,8$ ; в)  $- 0,9$



а)



б)



в)

Рис. 6.21. Амплитуда прогиба конца стержня для  $H = 8$  при вариациях  $\varepsilon$  :  
 а)  $0$ ; б)  $0,8$ ; в)  $0,9$

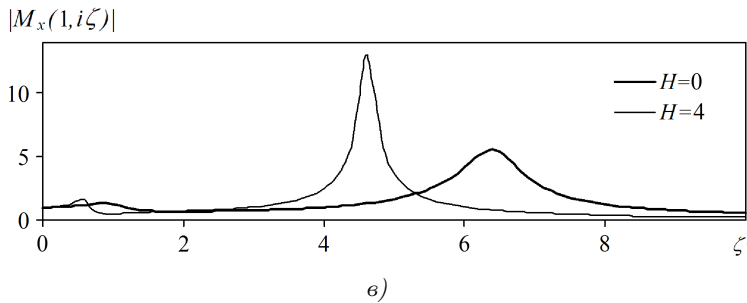
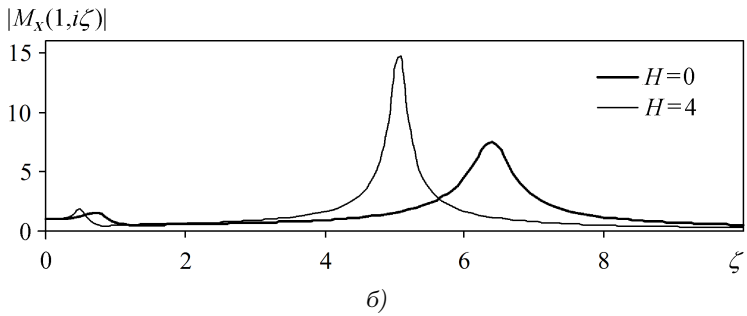
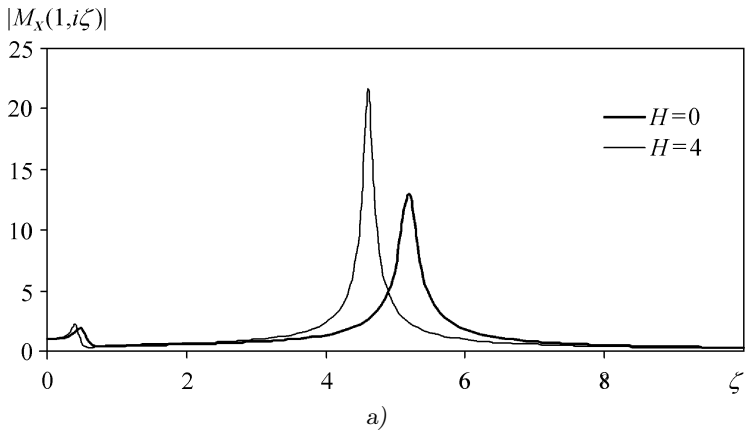
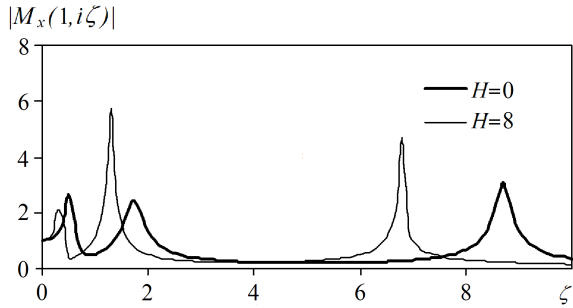
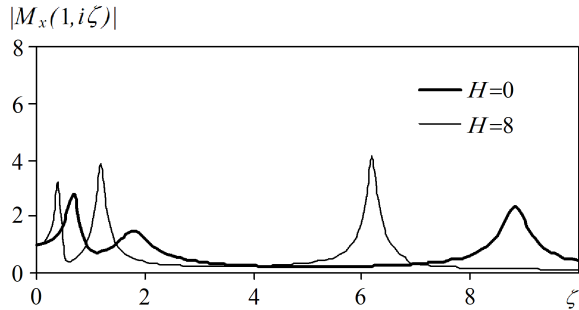


Рис. 6.22. Амплитуда момента в заделке для  $H = 4$  и вариации  $\varepsilon$  :  
 а)  $- 0$ ; б)  $- 0,8$ ; в)  $- 0,9$

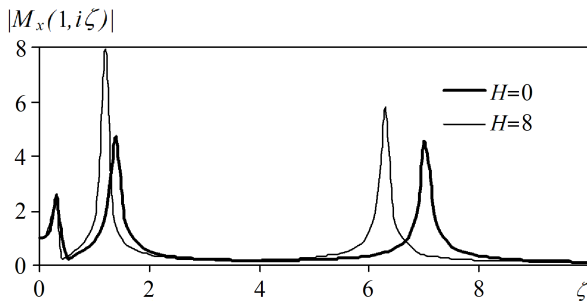




а)



б)



в)

Рис. 6.23. Амплитуда момента в заделке для  $H = 8$  и вариации  $\varepsilon$  :  
 а)  $- 0$ ; б)  $- 0,8$ ; в)  $- 0,9$

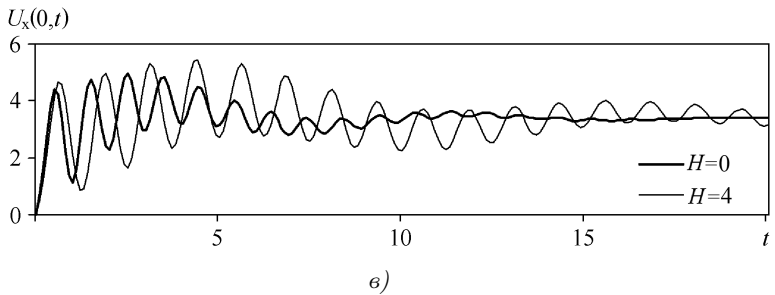
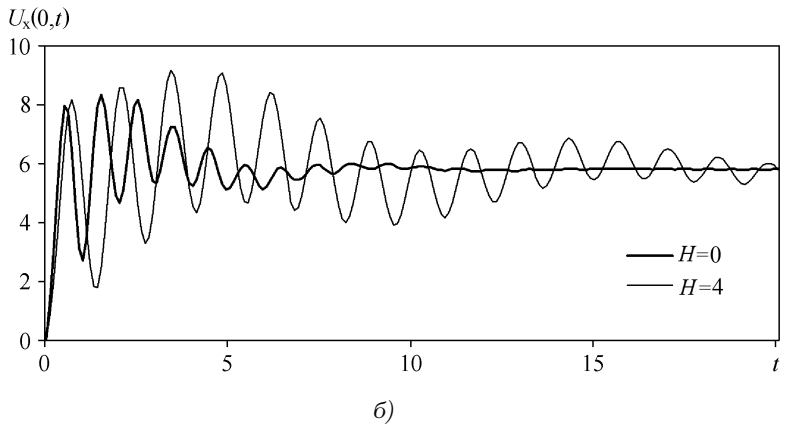
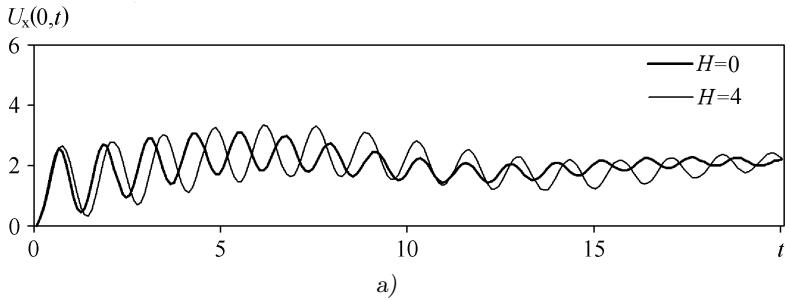
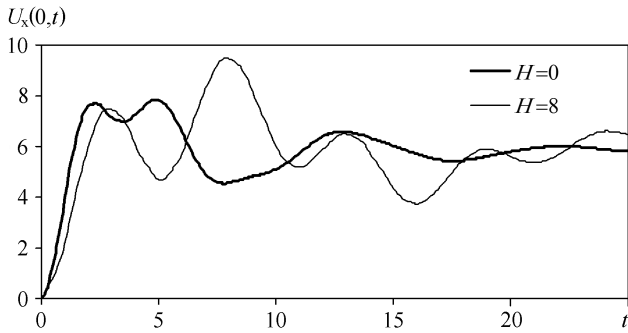
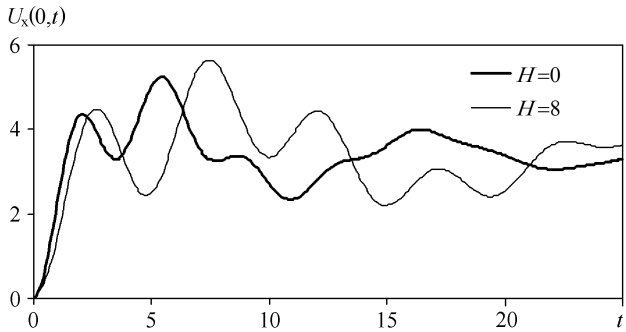


Рис. 6.24. Прогиб конца стержня при нестационарных колебаниях для  $H = 4$  при вариациях  $\varepsilon$ :

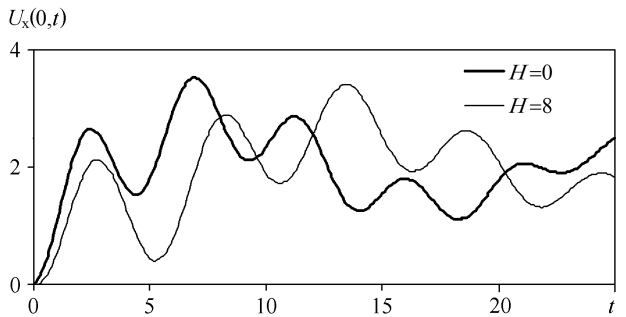
а)  $0$ ; б)  $0,8$ ; в)  $0,9$



а)



б)



в)

Рис. 6.25. Прогиб конца стержня при нестационарных колебаниях для  $H = 8$  при вариациях  $\varepsilon$ : а)  $- 0$ ; б)  $- 0,8$ ; в)  $- 0,9$

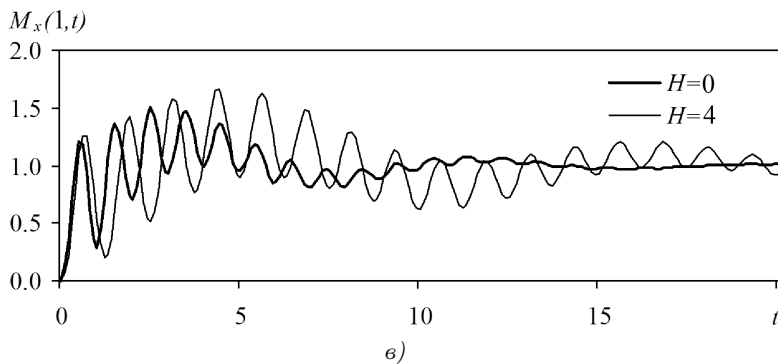
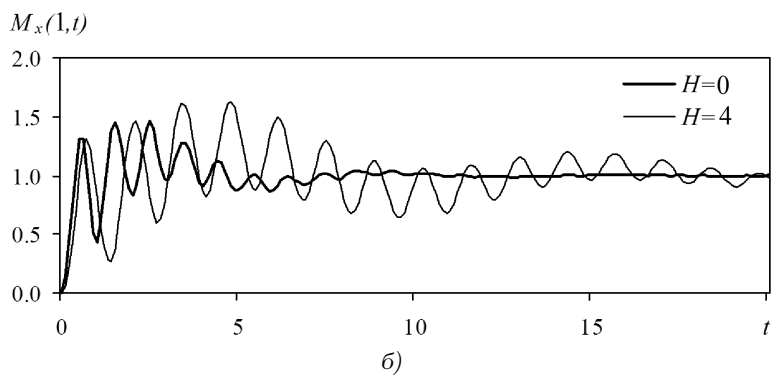
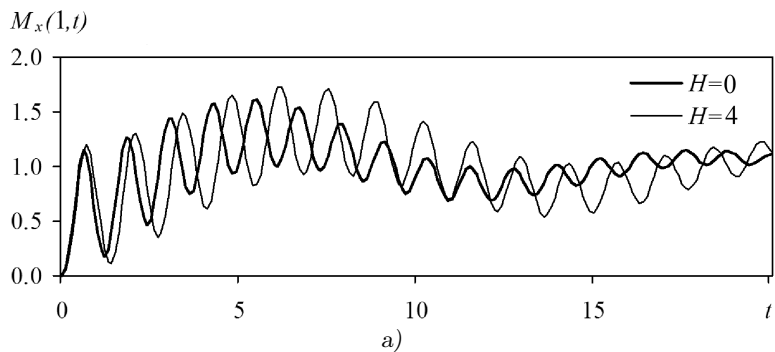
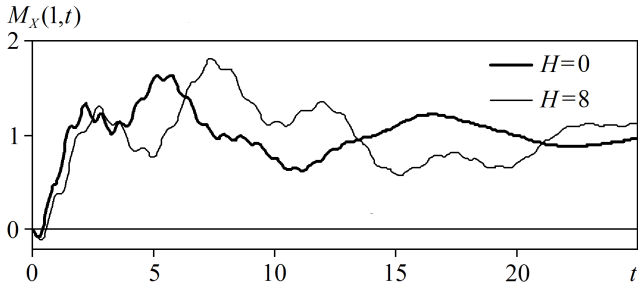
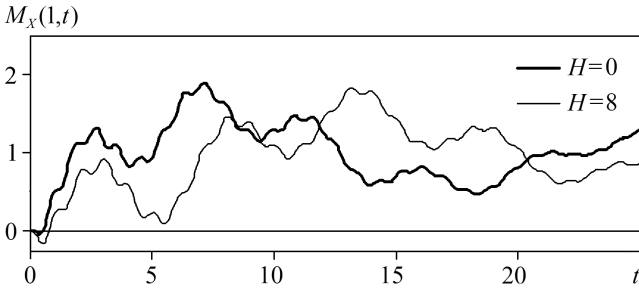


Рис. 6.26. Момент в заделке при нестационарных колебаниях для  $H = 4$  при вариациях  $\epsilon$ :

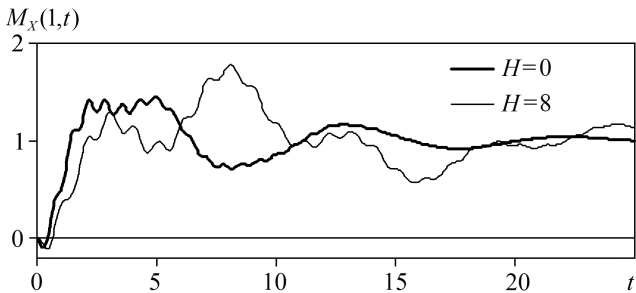
а) – 0; б) – 0,8; в) – 0,9



а)



б)



в)

Рис. 6.27. Амплитуда момента в заделке для  $H = 8$  при вариациях  $\varepsilon$ :  
 а)  $- 0$ ; б)  $- 0,8$ ; в)  $- 0,9$

## ГЛАВА 7

### МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ. ШТАМП НА ПУНЖ ОСНОВАНИИ

#### 7.1 Грунтовое водонасыщенное основание сооружений

Научные методы и инженерные принципы строительной деятельности с учетом взаимодействия фундаментов сооружений с грунтом относятся к задачам геотехники [244]. Грунты являются типичной многофазной средой, состоящей из пористой твердой фазы (скелет грунта), содержащей в порах жидкость и газ. Поэтому в ряде геотехнических задач необходимо учитывать взаимодействие фаз, которое происходит при движении жидкости по порам (фильтрации) вследствие динамических воздействий и разности напоров. В несвязных грунтах и песчаниках взаимодействие между поровыми фазами и твердой фазой вызывает дополнительные напряжения и деформации, изменение порового давления, которые не могут быть описаны однофазной моделью.

Поскольку грунты под ответственными сооружениями часто оказываются водонасыщенными, необходимо развивать методы расчета системы фундамент-основание с применением адекватных динамических моделей грунтовой среды, несмотря на их относительную сложность. В инженерных приложениях для водонасыщенных оснований сооружений и грунтовых массивов рассматривается прочность и устойчивость среды при действии фильтрационных и динамических воздействий.

Необходимость учета фильтрационных сил при расчете устойчивости откосов и оснований сооружений была впервые обоснована К. Терцаги [254, 433] и М. Био [314]. Согласно К. Терцаги, в механике грунтов как многофазных сред следует различать эффективные напряжения  $\sigma_{ij}^{ef}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , определяющие взаимодействие между твердыми частицами, и тотальные напряжения  $\sigma_{ij}$ , действующие на элемент многофазной среды (см. (1.33), стр. 18).

Учет движения поровой жидкости при быстром нагружении поверхности водонасыщенного грунтового основания на его напряженное и деформированное состояние и развитие деформаций грунтов с учетом фильтрационной анизотропии слабых оснований с привлечением аналитических и экспериментальных методов исследования рассмотрены в книге Ю. А. Соболевского [243].

После динамических воздействий в водонасыщенном грунте появляются области с изменившимся относительно гидростатического порового давления. Согласно Б. И. Далматову [96] в условиях водонасыщенных грунтов после приложения нагрузок непосредственно под фундаментом формируются зоны повышенного порового давления с преобладанием фильтрации выжимаемой воды вверх к его подошве. Подобная концентрация порового давления под подошвой загруженного фундамента была установлена в полевых опытах М. Ю. Абелева [1].

Со временем поровое давление в толще выравнивается вследствие процесса консолидации, который рассматривался, начиная с К. Терцаги и М. Био, многими исследователями (см. обзор в статье [416]).

С изменением строительных свойств водонасыщенных грунтов при динамических воздействиях разного характера связан ряд инженерных проблем. О. А. Савинов [222] рекомендовал для учета многофазности грунтовой среды использовать модели Л. А. Эйлера [304] и Б. И. Дидуха [103]. Представление о свойствах водонасыщенных грунтов дано в учебных пособиях Ю. А. Зарецкого [116], а также [8, 38, 169, 170] и монографиях В. Г. Шаповала с соавт. [286, 287].

При динамических и сейсмических нагрузках избыточное поровое давление в водонасыщенном грунте может привести к его разжижению и крупным авариям сооружений, что привлекло широкое внимание инженеров и ученых к этой проблеме [38].

При работе турбоагрегатов под их фундаментами при гармонических колебаниях незначительной амплитуды именно для водонасыщенных песков проявляются осадки грунтового основания вследствие виброползучести, закономерности которой рассматривалась в работах В. И. Керчмана, Р. Д. Филиппова, В. Я. Хаина, В. Г. Таранова и В. А. Александровича [6, 7, 128, 129, 213], A. Sawicki, W. Swidziński [408] и др.

Существенное влияние на водонасыщенное основание при динамических и сейсмических воздействиях оказывают фундаменты со сплошной подошвой, бетонные плотины. Поэтому представляет интерес моделирование динамического взаимодействия с водонасыщенным грунтом штампа с непроницаемой для поровой жидкости подошвой. При этом для учета давления на подошву как твердой, так и жидкой фаз основания необходимо получить решение динамической контактной задачи с использованием моделей пористоупругой насыщенной жидкостью среды.

Для решения динамических задач геофизики и геотехники часто применяются модели многофазной или двухфазной среды (см. § 1.3).

Задачи динамики фундаментов на ПУНЖ основании, в том числе динамические контактные задачи на основе модели Био рассматривались в работах [328, 335, 345, 368, 374, 375, 380, 381, 402, 417–419, 443] и др.

Использование уравнений Био связано с выполнением условий, перечисленных в пункте 1.3.2 (с. 17).

Моделированию грунтового основания в виде ПУНЖ полупространства при решении динамических контактных задач методом ортогональных полиномов посвящены работы [76, 77, 104, 104, 135, 238, 259–261, 264, 266, 266, 359, 415, 435]. Результаты были обобщены в монографии [266].

Подошва фундамента может быть дренированной или непроницаемой для поровой воды, ниже при постановке задач принимаются более сложные граничные условия второго варианта.

Рассмотрим некоторые известные результаты, полученные при решении контактных задач для инженерных приложений методами граничных элементов, конечных элементов и ортогональных полиномов.

В работе М. R. Halpern и P. Christiano [367] представлено решение (функции Грина) для ПУНЖ полупространства, используемое для применения метода граничных элементов. В следующей статье [368] рассмотрен метод численного анализа, основанный на применении функций Грина и дискретизации области контакта под невесомым квадратным штампом на участки с постоянными контактными напряжениями (метод граничных элементов) при вынужденных гармонических колебаниях. Получено численное решение контактной задачи для невесомого квадратного штампа при действии гармонической нагрузки. Применены функции Грина и дискретизация области контакта под невесомым квадратным штампом на участки с постоянными контактными напряжениями. Результат определения изменения по частоте комплексной податливости основания  $C$  как отношения перемещения к равнодействующей реакции для невесомого штампа – функции, обратной импедансу, представлен на рис. 7.1. Показано отличие дренированного ( $k_f = 0$ ) материала от недренированного ( $k_f \rightarrow \infty$ ) на низких частотах. Промежуточные кривые при конечных значениях коэффициента фильтрации  $k_f$  находятся между этими предельными кривыми.

Задачи динамики ПУНЖ среды и взаимодействие со штампом рассматривались А. Г. Мишелем и С. Г. Шульманом в [175, 176] с использованием метода конечных элементов.

В статье Х. Н. Ма с соавт. [404] изучена динамическая реакция жесткого ленточного фундамента (проницаемого, т. е. со специальной подготовкой основания под подошвой), совершающего вынужденные гармонические колебания на насыщенном жидкостью основании (модель Био), вызываемые вращательным моментом в вертикальной плоскости. Поровая жидкость считается несжимаемой. Определена функция динамической податливости как величина, обратная среднему нормальному эффективному напряжению:  $C_M = 1/(aA_0)$ ,  $f_1 = \text{Re}(C_M)$ ,  $f_2 = \text{Im}(C_M)$ . Изучаются функции жесткости основания фундамента

$$k = f_1/(f_1^2 + f_2^2) \quad (7.1)$$

и коэффициента демпфирования

$$c = -f_2/[\zeta(f_1^2 + f_2^2)]. \quad (7.2)$$



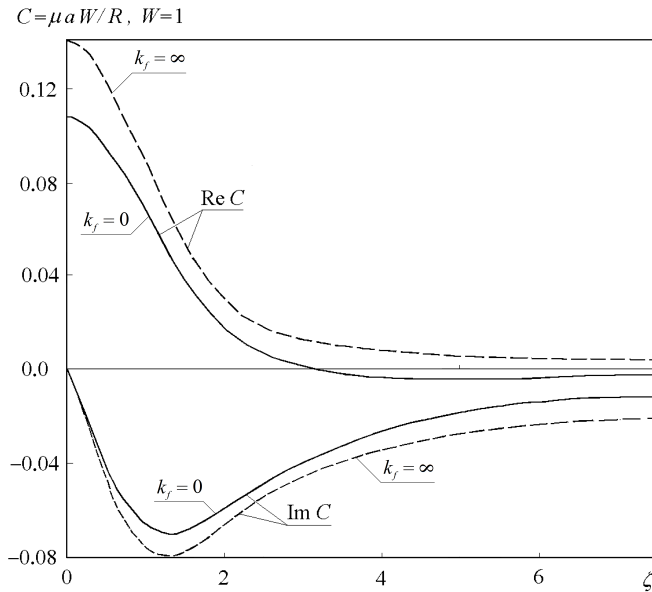


Рис. 7.1. Зависимость от частоты безразмерной податливости  $C$  при вертикальных колебаниях квадратного штампа на двухфазном полупространстве [368]

Методом ортогональных полиномов (с использованием полиномов Якоби [245, с. 583]) определена функция динамической податливости. Проведено параметрическое исследование для изучения влияния величин: 1) безразмерной частоты  $\zeta$ ; 2) динамической проницаемости; 3) коэффициента Пуассона грунта. При нулевой плотности поровой жидкости результаты расчета совпадают с результатами для упругой полуплоскости [389]. Показано существенное влияние поровой жидкости на демпфирование колебаний и снижении реакции по сравнению с упругой полуплоскостью.

В работах В. Г. Таранова [251, 252] используется методика получения экспериментальных передаточных функций для четырех основных типов колебаний. Теоретические передаточные функции  $f_1$  (четная) и  $f_2$  (нечетная) связаны между собой формулами преобразования Гильберта [244]

$$f_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_2(u)}{u - \omega} du; \quad f_2(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(u)}{u - \omega} du,$$

таким образом формально достаточно определить только одну из них в бесконечных пределах.

Следует отметить, что более сложная задача – для горизонтально-вращательных колебаний методом ортогональных полиномов при разложении неизвестных эффективных напряжений на контакте в ряды по полиномам Чебышева была рассмотрена ранее в статье А. Н. Трофимчука с соавт. [265] (ее перевод на английский язык опубликован в [436]).

Асимптотический анализ напряжений и порового давления на поверхности ПУНЖ среды под непроницаемым штампом выполнен в статьях [70, 358, 360] для условий плоской деформации. При рассмотрении плоской задачи о колебаниях непроницаемого штампа в [62], [266, § 3.4] метод ортогональных полиномов модифицирован для случая непроницаемого штампа для представления в виде рядов по ортогональным полиномам вспомогательных функций, через которые определяются эффективные напряжения в твердой фазе и поровое давление. Исследовано изменение по частоте импеданса, реакций твердой и жидкой фаз при варьировании параметров модели М. Био и размеров массивного штампа.

Осесимметричная задача об установившихся колебаниях слоя из ПУНЖ материала с неподвижной нижней гранью под действием равномерно распределенной нагрузки типа непроницаемого поршня по круговой площадке верхней грани (условии равных перемещений твердой и жидкой фаз на этой площадке) рассмотрена в [71], [266, § 5.1]. Представлено общее решение, а численные результаты (поровое давление и эффективные напряжения в слое, средняя за период мощность, закачиваемая в среду) получены для равномерно распределенной нагрузки и вариациях высоты слоя, коэффициента проницаемости, вязких потерь в скелете грунта.

Решение осесимметричной задачи о колебаниях круглого штампа на слоистой среде, состоящей из вязкоупругого слоя грунта, покрывающего насыщенный жидкостью пористоупругий слой, расположенный на вязкоупругом полупространстве, представлено в монографии [266, § 5.2].

В данной главе в рамках модели двухфазной среды Био (см. пункт 1.3.2) рассмотрены вертикальные гармонические колебания жесткого непроницаемого для поровой жидкости штампа, расположенного на пористоупругом насыщенном жидкостью основании (полупространстве и слое) при скользящем контакте.

В работах [76, 77, 135, 223, 224, 224, 226, 268, 269, 435], [266, § 4.3] представлено решение задачи о гармонических вертикальных колебаниях прямоугольного непроницаемого штампа на пористоупругом насыщенном жидкостью полупространстве.

Подробная методика численного решения этой задачи и некоторые новые расчетные результаты представлены в § 7.2.

Задача о вертикальных колебаниях полосы на ПУНЖ слое с непроницаемой для поровой жидкости и защемленной тыльной гранью рассмотрена в § 7.3, приведены численные результаты для реакции основания при изменении физических и геометрических параметров.

## 7.2 Вертикальные колебания прямоугольного штампа с непроницаемой подошвой на ПУНЖ полупространстве

Здесь смешанная пространственная граничная задача для уравнений Био сводится к системе двумерных сингулярных уравнений на прямоугольнике. Численное решение такой системы получено методом ортогональных полиномов. Искомыми являются импеданс (сопротивление) и реакция, в том числе твердой и жидкой фаз отдельно.

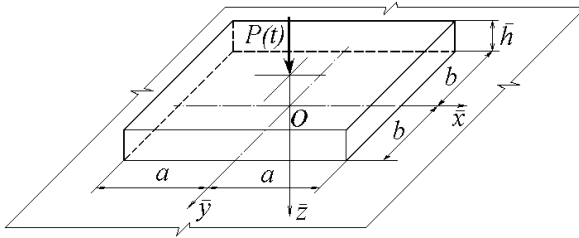


Рис. 7.2. Прямоугольный штамп на ПУНЖ полупространстве

Рассмотрим колебания прямоугольного штампа (рис. 7.2) с непроницаемой для поровой жидкости подошвой на ПУНЖ полупространстве по модели Био. Граничные условия соответствуют случаям как открытых, так и закрытых пор. Отдельные части этой работы были опубликованы в статьях [224, 435] и в монографии [266].

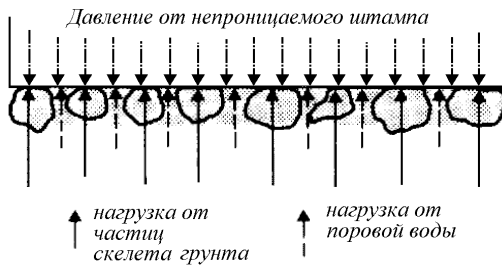


Рис. 7.3. Нормальное давление на подошву непроницаемого штампа на ПУНЖ среде [425]

Для решения динамических контактных задач необходимо определить перемещения площадки контакта при действии распределенных на контактной поверхности основания нагрузок. Взаимодействие непроницаемой подошвы штампа с двухфазной средой иллюстрируется рис. 7.3.

Рассмотрим уравнения движения ПУНЖ полупространства в декартовой системе координат (ось  $Oz$  направлена внутрь полупространства с границей  $z = 0$ ) для случая гармонических колебаний с безразмерной частотой  $\zeta$ .

Векторы  $\vec{u}$ ,  $\vec{U}$ , удовлетворяющие системе уравнений (1.36), (1.37) выражаются через скалярные потенциалы  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и векторный потенциал  $\vec{\Psi}$  (1.38):

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \nabla \varphi_1 + \nabla \times \{\psi_1 \vec{e}_z\}; & \vec{U} &= \nabla \varphi_2 + \nabla \times \{\psi_2 \vec{e}_z\}; \\ \varphi_1 &= \Phi_1 + \Phi_2; & \varphi_2 &= M_1 \Phi_1 + M_2 \Phi_2; \\ \psi_1 &= \Psi; & \psi_2 &= M_3 \Psi. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Уравнения Гельмгольца относительно потенциалов  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  имеют вид

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}_j}{dz^2} - \alpha_3^2 \tilde{\Phi}_j = 0; \quad \frac{d^2 \tilde{\Psi}_j}{dz^2} - \alpha_j^2 \tilde{\Psi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad (7.4)$$

где  $\alpha_i = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - \beta_i^2 \zeta^2}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $\beta_i$  — отношения (1.44), (1.53) скоростей волн в двухфазной среде; значок  $\tilde{\phantom{x}}$  обозначает двойную трансформанту преобразований Фурье по  $x$  и  $y$  (с соответствующими параметрами  $\xi$  и  $\eta$ ).

Полагая начальные условия и условия на бесконечности нулевыми, решения системы (7.4) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_j(\xi, \eta, z, \zeta) &= A_j \exp(-\alpha_{1,2} z); \\ \tilde{\Psi}_j(\xi, \eta, z, \zeta) &= B_j \exp(-\alpha_3 z), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Решение  $A_j$ ,  $B_j$ , ( $j = 1, 2$ ) определяется из граничных условий для перемещений и напряжений в твердой и жидкой фазах.

Выражения для перемещений через потенциалы имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_1 + \Phi_2) - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z}; \\ u_y = \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_1 + \Phi_2) + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}; \\ u_z = \frac{\partial}{\partial z} (\Phi_1 + \Phi_2) + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}; \end{array} \right. \quad (a) \quad (b) \quad (c) \quad (7.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_x = \frac{\partial}{\partial x} (M_1 \Phi_1 + M_2 \Phi_2) - M_3 \frac{\partial \Psi_2}{\partial z}; \\ U_y = \frac{\partial}{\partial y} (M_1 \Phi_1 + M_2 \Phi_2) + M_3 \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}; \\ U_z = \frac{\partial}{\partial z} (M_1 \Phi_1 + M_2 \Phi_2) + M_3 \left( \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} \right). \end{array} \right. \quad (a) \quad (b) \quad (c) \quad (7.7)$$

Напряжения выражаются через потенциалы по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xz}^s}{\mu} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \\ &= 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (\Phi_1 + \Phi_2) - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi_2; \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{yz}^s}{\mu} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = \\ &= 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\Phi_1 + \Phi_2) - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi_1 + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_z^s}{2\mu} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{A}{2\mu} \operatorname{div} \vec{u} + \frac{Q}{2\mu} \operatorname{div} \vec{U} = \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{A + QM_1 k_1^2}{2\mu} \right) \Phi_1 + \\ &+ \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{A + QM_2 k_2^2}{2\mu} \right) \Phi_2 - \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x \partial z}; \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^f}{2\mu}(x, y, z) &= -\frac{Q}{2\mu} (k_1^2 \Phi_1 + k_2^2 \Phi_2) - \frac{\mathcal{R}}{2\mu} (M_1 k_1^2 \Phi_1 + M_2 k_2^2 \Phi_2) = \\ &= -\frac{Q + M_1 \mathcal{R}}{2\mu} k_1^2 \Phi_1 - \frac{Q + M_2 \mathcal{R}}{2\mu} k_2^2 \Phi_2. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Рассматриваются гармонические колебания непроницаемого массивного прямоугольного штампа (фундамента, плиты) на ПУНЖ полупространстве при отсутствии трения по контакту при установившихся вынужденных гармонических колебаниях штампа под действием вертикальной силы  $P \exp(i\zeta t)$  (рис. 7.2). Далее временной множитель опускаем. Для определения вертикального импеданса рассматриваются установившиеся гармонические колебания невесомого штампа при заданной амплитуде перемещений  $W$  [266, 359].

Амплитуда  $w$  колебаний штампа при действии силовой нагрузки определяется из уравнения

$$M_c \frac{c_2^2}{a^2} \zeta^2 w = R_0 - P, \quad (7.12)$$

где  $R_0$  – равнодействующая сила реакции двухфазного полупространства,

$$R_0 = a^2 \int_{-1}^1 \int_{-\alpha}^{\alpha} [p_1(x, y) + p_2(x, y)] dx dy, \quad (7.13)$$

$$p_1(x, y) = -\sigma_z^s(x, y, 0) - q \sigma^f(x, y, 0) = -\sigma^{ef}(x, y, 0); \quad (7.14)$$

$$p_2(x, y) = -\vartheta^{-1} \sigma^f(x, y, 0) = p_0(x, y, 0). \quad (7.15)$$

Здесь  $q = (\vartheta - 1)/\vartheta$ .

Использование представлений (7.3), (7.4) и хорошо развитых методов решения смешанных задач теории упругости позволяет свести рассматриваемую

граничную задачу к системе двумерных интегральных уравнений относительно неизвестных контактных напряжений  $p_1(x, y)$ ,  $p_2(x, y)$ ,  $|x| < 1$ ,  $|y| < \alpha$ .

Уравнение вертикальных колебаний прямоугольного жесткого штампа на податливом основании решается совместно с уравнениями для перемещений основания и условиями равенства перемещений подошвы штампа и границы, в данном случае – каждой из фаз основания (пористой упругой и жидкой).

Уравнения (1.36), (1.37) относительно перемещений твердой и жидкой фаз, рассматриваемые в полупространстве  $z < 0$ , дополняются контактными условиями, заключающимися в требованиях равенств вертикальных перемещений штампа  $W$  и контактных вертикальных перемещений твердой и жидкой фаз двухфазного полупространства под штампом:

$$w_s(x, y, 0) = w_f(x, y, 0) = W, \quad |x| \leq 1, \quad |y| \leq \alpha. \quad (7.16)$$

Предполагается отсутствие касательных напряжений в твердом скелете двухфазной среды на поверхности полупространства

$$\tau_{xz}^s(x, y, 0) = 0, \quad \tau_{yz}^s(x, y, 0) = 0, \quad (-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty), \quad (7.17)$$

а за пределами штампа – отсутствие напряжений и порового давления:

$$\sigma_{zz}^{ef}(x, y, 0) = \sigma_{zz}^s(x, y, 0) = 0, \quad \sigma^f(x, y, 0) = 0, \quad |x| > 1, \quad |y| > \alpha. \quad (7.18)$$

Граничные условия (7.16)–(7.18) дополняются условиями убывания перемещений  $\vec{u}$ ,  $\vec{U}$  при  $z \rightarrow -\infty$ .

Уравнение (7.12) при введении безразмерного параметра (характеристики инерционного взаимодействия штампа и основания)

$$m_s = M_c / (\pi^2 a^3 \rho_e) = 4 h \alpha \rho / (\pi^2 \rho_e) \quad (7.19)$$

принимает вид

$$\pi^2 a \mu m_s \zeta^2 W = R_0 - P. \quad (7.20)$$

Перемещения фундамента  $W$  при определенных условиях (например, малые колебания, устойчивость грунтового основания от проседания и равномерность статических осадок, соответствующая форма подошвы фундамента и достаточная масса сооружения) могут быть под всей подошвой равны перемещениям границы основания. Последние находятся из решения пространственной задачи Лэмба при действии распределенных на заданной площадке динамических напряжений.

### 7.2.1 Перемещения ПУНЖ полупространства при действии нормальной нагрузки

Рассмотрим действие на прямоугольной площадке границы ПУНЖ полупространства неизвестных распределенных симметрично относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  нагрузок (7.14) и (7.15).

Вводятся неизвестные безразмерные функции

$$q_1(x, y) = \frac{p_1(x, y)}{\mu}; \quad q_2(x, y) = \frac{p_2(x, y)}{\mu}, \quad |x| \leq 1, |y| \leq \alpha. \quad (7.21)$$

Трансформанты преобразования Фурье по координатам  $x, y$  равнодействующих нагрузок на упругую твердую пористую матрицу и поровую жидкость имеют вид

$$\tilde{P}_j(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_j(x, y) \exp[i(x\xi + y\eta)] dx dy.$$

Вертикальные перемещения фаз при  $z = 0$  для установившихся гармонических колебаний представляем в виде двойного обратного преобразования Фурье

$$u_z(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}_s(\xi, \eta) \exp[-i(x\xi + y\eta)] d\xi d\eta;$$

$$U_z(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w}_f(\xi, \eta) \exp[-i(x\xi + y\eta)] d\xi d\eta,$$

где двойное преобразование Фурье перемещений фаз находится из формул (7.6, с) и (7.7, с):

$$\tilde{w}_s(\xi, \eta) = -A_1 \alpha_1 - A_2 \alpha_2 - B_1 \eta + B_2 \xi;$$

$$\tilde{w}_f(\xi, \eta) = -A_1 M_1 \alpha_1 - A_2 M_2 \alpha_2 - B_1 M_3 \eta + B_2 M_3 \xi.$$

Отсюда, используя формулы для напряжений (7.8)–(7.11), для двойных трансформант Фурье напряжений получаем

$$\tilde{\tau}_{xz}^s(\xi, \eta) = 2i\xi\alpha_1 A_1 + 2i\xi\alpha_2 A_2 + i\xi\eta B_1 + i(\xi^2 + \alpha_3^2)B_2;$$

$$\tilde{\tau}_{yz}^s(\xi, \eta) = 2i\xi\alpha_1 A_1 + 2i\xi\alpha_2 A_2 + i(\xi^2 + \alpha_3^2)B_1 - i\xi\eta B_2;$$

$$\tilde{\sigma}_z^s(\xi, \eta) = (\xi^2 + \eta^2 - m_1 \zeta^2) A_1 + (\xi^2 + \eta^2 - m_2 \zeta^2) A_2 + \eta\alpha_3 B_1 - \xi\alpha_3 B_2;$$

$$\tilde{\sigma}^f(\xi, \eta) = -n_1 \zeta^2 A_1 - n_2 \zeta^2 A_2.$$

Здесь обозначено

$$n_j = \frac{Q + M_j \mathcal{R}}{2\mathcal{N}} \beta_j^2; \quad m_j = \frac{A + 2\mathcal{N} + M_j Q}{2\mathcal{N}} \beta_j^2; \quad j = 1, 2. \quad (7.22)$$

Из заданных граничных условий

$$\tau_{xz}(x, y, 0) = \tau_{yz}(x, y, 0) = 0, \quad -\infty < (x, y) < \infty,$$

$$\frac{\sigma_z^{ef}(x, y, 0)}{2\mathcal{N}} = q_1(x, y), \quad |x| \leq 1, \quad |y| \leq \alpha,$$

$$\frac{\sigma^f(x, y, 0)}{2\mathcal{N}} = q_2(x, y), \quad |x| \leq 1, \quad |y| \leq \alpha,$$

$$\sigma_{zz}^{ef}(x, y, 0) = \sigma^f(x, y, 0) = 0, \quad |x| > 1, \quad |y| > \alpha$$

получаем для определения неизвестных  $A_j, B_j, j = 1, 2$  систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 2\xi\alpha_1 & 2\xi\alpha_2 & \xi\eta & -(\xi^2 + \alpha_3^2) \\ 2\eta\alpha_1 & 2\eta\alpha_2 & \eta^2 + \alpha_3^2 & -\xi\eta \\ \varsigma_1 & \varsigma_2 & \alpha_3\eta & -\alpha_3\xi \\ n_1\zeta^2 & n_2\zeta^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\widehat{P}_1(\xi, \eta) \\ \vartheta \widehat{P}_2(\xi, \eta) \end{pmatrix}, \quad (7.23)$$

где

$$\varsigma_i = \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 (m_i + q n_i), \quad i = 1, 2;$$

$\widehat{P}_j(\xi, \eta)$  – двойное преобразование Фурье нагрузок (7.14), (7.15) с учетом их симметрии:

$$\widehat{P}_j(\xi, \eta) = 4 \int_0^\alpha \int_0^1 q_j(x, y) \cos(x\xi) \cos(y\eta) dx dy, \quad j = 1, 2.$$

Решение системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} F(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} -\widehat{P}_1 n_2 \alpha_3^2 \zeta^2 \varsigma_3 + \vartheta \widehat{P}_2 \alpha_3^2 [2\alpha_2 \alpha_3 (\xi^2 + \eta^2) - \varsigma_2 \varsigma_3] \\ \widehat{P}_1 n_1 \alpha_3^2 \zeta^2 \varsigma_3 + \vartheta \widehat{P}_2 \alpha_3^2 [-2\alpha_1 \alpha_3 (\xi^2 + \eta^2) - \varsigma_1 \varsigma_3] \\ -\widehat{P}_1 2\eta \alpha_3^2 \zeta^2 \alpha^* - \vartheta \widehat{P}_2 2\eta \alpha_3^2 (\varsigma_1 \alpha_2 - \varsigma_2 \alpha_1) \\ \widehat{P}_1 2\xi \alpha_3^2 \zeta^2 \alpha^* + \vartheta \widehat{P}_2 2\xi \alpha_3^2 (\varsigma_1 \alpha_2 - \varsigma_2 \alpha_1) \end{pmatrix},$$

где

$$F(\xi, \eta) = 2 \alpha_3^2 \zeta^2 [\alpha_3 (\xi^2 + \eta^2) \alpha^* - (\xi^2 + \eta^2 + \beta_3^2 \zeta^2) \alpha^*];$$



$$\alpha^* = n_1 \alpha_2 - n_2 \alpha_1; \quad \zeta_3 = \xi^2 + \eta^2 + \alpha_3^2;$$

$$\varkappa^* = n_1 (\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 m_2) - n_2 (\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 m_1).$$

Результат решения для перемещений фаз на границе ПУНЖ полупространства при действии нагрузки (7.14), (7.15) имеет вид:  
для перемещений твердой матрицы

$$w_s(x, y, 0) = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{w}_s(\xi, \eta)}{F(\xi, \eta)} \exp[-i(x\xi + y\eta)] d\xi d\eta; \quad (7.24)$$

для перемещений поровой жидкости

$$w_f(x, y, 0) = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{w}_f(\xi, \eta)}{F(\xi, \eta)} \exp[-i(x\xi + y\eta)] d\xi d\eta; \quad (7.25)$$

$$\tilde{w}_s(\xi, \eta) = 2\hat{P}_1(\xi, \eta) \tilde{w}_{s,1}(\xi, \eta) + 2\frac{\vartheta}{\zeta^2} \hat{P}_2(\xi, \eta) \tilde{w}_{s,2}(\xi, \eta);$$

$$\tilde{w}_f(\xi, \eta) = 2\hat{P}_1(\xi, \eta) \tilde{w}_{f,1}(\xi, \eta) + 2\frac{\vartheta}{\zeta^2} \hat{P}_2(\xi, \eta) \tilde{w}_{f,2}(\xi, \eta).$$

Выражения для  $\tilde{w}_{s,j}$  и  $\tilde{w}_{f,j}$ ,  $j = 1, 2$ , определяющие компоненты трансформант перемещений, имеют вид:

для твердой матрицы от нагрузки на нее

$$\tilde{w}_{s,1}(\xi, \eta) = -\beta_3^2 \zeta^2 \alpha^*;$$

для твердой матрицы от нагрузки на поровую жидкость

$$\tilde{w}_{s,2}(\xi, \eta) =$$

$$= \beta_3^2 \zeta^2 \{ \alpha_1 [\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 (m_2 + q n_2)] - \alpha_2 [\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 (m_1 + q n_1)] \};$$

для жидкой фазы от нагрузки на твердую матрицу

$$\tilde{w}_{f,1}(\xi, \eta) = 2(\xi^2 + \eta^2) (-M_1 \alpha_1 n_2 + M_2 \alpha_2 n_1 - M_3 \alpha_4) +$$

$$+ \beta_3^2 \zeta^2 (M_1 \alpha_1 n_2 - M_2 \alpha_2 n_1);$$

для жидкой фазы от нагрузки на нее

$$\tilde{w}_{f,2}(\xi, \eta) = 2(\xi^2 + \eta^2) \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (M_1 - M_2) +$$

$$+ 2\alpha_2 [\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 (m_1 + q n_1)] [M_1 (\xi^2 + \eta^2 - \frac{\beta_3^2}{2} \zeta^2) - 2M_3 (\xi^2 + \eta^2)].$$

### 7.2.2 Динамическая контактная задача при вертикальных колебаниях прямоугольного штампа

Динамическая контактная задача формулируется путем введения новых неизвестных функций, которые связаны с неизвестными контактными напряжениями для обеих фаз посредством определенных интегро-дифференциальных соотношений. Это позволяет, с использованием решения (7.24), (7.25) свести граничную задачу (7.16)–(7.20) к системе двух двумерных сингулярных интегральных уравнений.

Неизвестные контактные напряжения  $q_j(x, y)$ ,  $j = 1, 2$  представлены в виде интегро-дифференциальных соотношений относительно функций, представленных рядами по полиномам Чебышева с неизвестными коэффициентами.

$$-\frac{\sigma_{zz}^{ef}(x, y, 0)}{2\mathcal{N}} = q_1(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} r_1(x, y) + t'_{1,1}(x) + t'_{1,2}(y)/\alpha - t_1/\alpha, \quad (7.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_0(x, y, 0)}{2\mathcal{N}} = q_2(x, y) = & \int_y^\alpha \int_x^1 r_2(s, t) ds dt + 0,5(x^2 - 1) \int_y^\alpha t_{2,1}(t) dt + \\ & + 0,5 \frac{y^2 - \alpha^2}{\alpha} \int_x^1 t_{2,2}(s) ds + 0,25(x^2 - 1) \frac{y^2 - \alpha^2}{\alpha} t_2, \end{aligned} \quad (7.27)$$

где  $t_1$  и  $t_2$  – постоянные для заданной частоты. При  $|x| \rightarrow 1$ ,  $|y| \rightarrow \alpha$  функция  $q_1(x, y)$  имеет корневую особенность, а  $q_2(x, y)$  для  $|x| = 1$ ,  $|y| = \alpha$  принимает нулевое значение. Для упругой матрицы особенность соответствует известному решению теории упругости, а для поровой жидкости особенности нет [266, 360], поровое давление на границе с открытыми порами задается равным нулю.

Введенные для представления неизвестных контактных напряжений функции  $r_j(x, y)$ ,  $j = 1, 2$  отыскиваются в виде рядов по полиномам Чебышева с неизвестными коэффициентами

$$r_1(x, y) = r \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{n+m} \mathcal{A}_{2n,2m} U_{2n-1}(x) U_{2m-1}(y/\alpha); \quad (7.28)$$

$$r_2(x, y) = r \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{n+m} \mathcal{B}_{2n,2m} U_{2n-1}(x) U_{2m-1}(y/\alpha); \quad (7.29)$$

$$r = 4\sqrt{(1-x^2)[1-(y/\alpha)^2]}/\pi^2;$$

$$t_{1,1}(y) = \mathcal{A}_{0,0} y/\alpha - 2\pi^{-1} \sqrt{1-(y/\alpha)^2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \mathcal{A}_{0,2m} U_{2m-1}(y/\alpha); \quad (7.30)$$

$$t_{1,2}(x) = \mathcal{A}_{0,0} x - 2\pi^{-1} \sqrt{1-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathcal{A}_{2n,0} U_{2n-1}(x); \quad (7.31)$$

$$t_{2,1}(y) = \mathcal{B}_{0,0} y/\alpha - 2\pi^{-1} \sqrt{1 - (y/\alpha)^2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \mathcal{B}_{0,2m} U_{2m-1}(y/\alpha); \quad (7.32)$$

$$t_{2,2}(x) = \mathcal{B}_{0,0} x - 2\pi^{-1} \sqrt{1 - x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathcal{B}_{2n,0} U_{2n-1}(x), \quad (7.33)$$

где  $U_k(\cos \theta) = \sin[(k+1)\theta]/\sin \theta$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  – полиномы Чебышева второго рода [228], для которых справедливы следующие рекуррентные формулы:

$$U_0(x) = 1; \quad U_1(x) = 2x; \quad U_{k+1}(x) = 2x U_k(x) - U_{k-1}(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Используя при  $|x| \leq 1$ ,  $|y| \leq \alpha$  контактные условия (7.16), получаем следующие системы уравнений:

1) при действии вертикальной гармонической силы

$$\begin{cases} w_s(x, y, 0) - w_f(x, y, 0) = 0; \\ w_s(x, y, 0) = \frac{a^2 (R - P)}{M_c c_2^2 \zeta^2}; \end{cases} \quad (7.34)$$

или

$$\begin{cases} w_s(x, y, 0) - w_f(x, y, 0) = 0; \\ w_f(x, y, 0) = \frac{a^2 (R - P)}{M_c c_2^2 \zeta^2}; \end{cases} \quad (7.35)$$

2) при заданной амплитуде перемещений

$$\begin{cases} w_s(x, y, 0) - w_f(x, y, 0) = 0; \\ w_s(x, y, 0) = W. \end{cases} \quad (7.36)$$

В первом случае использование уравнений (7.34) предпочтительнее, поскольку в предельном случае (пренебрежимо малыми плотностью и динамической вязкостью поровой жидкости) результат сводится к решению для вязкоупругого полупространства. В случае (7.36) получаем решение для механического импеданса (полного сопротивления).

Для определения коэффициентов разложения  $\mathcal{A}_{2n,2m}$ ,  $\mathcal{B}_{2n,2m}$ ,  $n, m = 0, 1, 2, \dots$ , из (7.34) получаем следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & 0,25 \mathcal{A}_{0,0} \int_0^\infty \int_0^\infty K_{j1}(\xi, \eta) f(\xi) J_{2p}(\xi) f(\alpha\eta) J_{2q}(\alpha\eta) d\xi d\eta + \\ & + 0,5 \sum_{n=1}^{\infty} n \mathcal{A}_{2n,0} \int_0^\infty \int_0^\infty K_{j1}(\xi, \eta) J_{2n}(\xi) J_{2p}(\xi) f(\alpha\eta) J_{2q}(\alpha\eta) d\xi d\eta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +0,5 \sum_{m=1}^{\infty} m \mathcal{A}_{0,2m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_{j1}(\xi, \eta) f(\xi) J_{2p}(\xi) J_{2m}(\alpha\eta) J_{2q}(\alpha\eta) d\xi d\eta + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} nm \mathcal{A}_{2n,2m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_{j1}(\xi, \eta) J_{2n}(\xi) J_{2p}(\xi) J_{2m}(\alpha\eta) J_{2q}(\alpha\eta) d\xi d\eta - \\
& - 0,25 \alpha^2 \mathcal{B}_{0,0} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_{j2}(\xi, \eta) g(\xi) J_{2p}(\xi) g(\alpha\eta) J_{2q}(\alpha\eta) d\xi d\eta + \\
& + 0,5 \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \mathcal{B}_{2n,0} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_{j2}(\xi, \eta) J_{2n}(\xi) J_{2p}(\xi) g(\alpha\eta) J_{2q}(\alpha\eta) \xi^{-2} d\xi d\eta + \\
& + 0,5 \alpha^2 \sum_{m=1}^{\infty} m \mathcal{B}_{0,2m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_{j2}(\xi, \eta) g(\xi) J_{2p}(\xi) J_{2m}(\alpha\eta) J_{2q}(\alpha\eta) (\alpha\eta)^{-2} d\xi d\eta + \\
& + \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} nm \mathcal{B}_{2n,2m} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{K_{j2}(\xi, \eta)}{(\alpha\xi\eta)^2} J_{2n}(\xi) J_{2p}(\xi) J_{2m}(\alpha\eta) J_{2q}(\alpha\eta) d\xi d\eta = \\
& = \{F\}, \quad j = 1, 2; \quad p, l = 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned}$$

где обозначено  $\mathcal{A}_{0,0} = t_1$ ;  $\mathcal{B}_{0,0} = t_2$ ;

$$f(\xi) = \sin(\xi)/\xi; \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi) = 1;$$

$$g(\xi) = [\xi \cos(\xi) - \sin(\xi)]/\xi^3; \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} g(\xi) = -1/3.$$

Здесь ядра подынтегральных функций определяются выражениями

$$F(\xi, \eta) K_{11}(\xi, \eta) = \tilde{w}_{s,1} - \tilde{w}_{f,1}; \quad \zeta^2 F(\xi, \eta) K_{12}(\xi, \eta) = \vartheta (\tilde{w}_{s,2} - \tilde{w}_{f,2});$$

$$F(\xi, \eta) K_{21}(\xi, \eta) = \tilde{w}_{s,1}; \quad \zeta^2 F(\xi, \eta) K_{22}(\xi, \eta) = \vartheta \tilde{w}_{s,2}.$$

Для силовой нагрузки вектор правой части системы уравнений имеет вид

$$\{F\} = \delta_{p,0} \delta_{l,0} \delta_{j,2} a(R - P)/(8\pi\alpha M_e c_2^2 \zeta^2), \quad (7.37)$$

где  $R$  – равнодействующая реакции

$$R = 8\mu a^2 \alpha^2 [\mathcal{A}_{0,0} \alpha^{-2} - \mathcal{B}_{0,0}/9 - (\mathcal{B}_{0,2} + \mathcal{B}_{2,0})/12 + \mathcal{B}_{2,2}/16]. \quad (7.38)$$

При учете кинематической нагрузки

$$\{F\} = \delta_{k,0} \delta_{l,0} \delta_{j,2} W/(8\pi\alpha\alpha), \quad (7.39)$$

где  $W$  – заданное перемещение.

Систему уравнений записываем в следующей форме:

$$\begin{aligned}
 & 0,25 A_{0,0}^j a_{2p}^{2q} + 0,5 \sum_{n=1}^{\infty} n A_{2n,0}^j a_{2p,2n}^{2q} + \\
 & + 0,5 \sum_{m=1}^{\infty} m A_{0,2m}^j a_{2p}^{2q,2m} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} nm A_{2n,2m}^j a_{2p,2n}^{2q,2m} - \\
 & - 0,25\alpha^2 B_{0,0}^j b_{2p}^{2q} + 0,5\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} n B_{2n,0}^j b_{2p,2n}^{2q} + \quad (7.40) \\
 & + 0,5\alpha^2 \sum_{m=1}^{\infty} m B_{0,2m}^j b_{2p}^{2q,2m} + \alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} nm B_{2n,2m}^j b_{2p,2n}^{2q,2m} = \{F\}, \\
 & j = 1, 2; \quad p, q = 0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned}$$

где комплексные коэффициенты **a** и **b** должны быть вычислены как двойные интегралы.

Далее будем ссылаться на интегралы с разными подынтегральными выражениями, содержащиеся в коэффициентах системы (7.40) по номерам от 1 до 16, обозначив их как указано в табл. 7.1

Табл. 7.1. Нумерация интегралов, входящих в коэффициенты системы (7.40)

№	Коэф.	№	Коэф.	№	Коэф.	№	Коэф.
1	${}^1 a_{2p,2n}^{2q,2m}$	5	${}^1 a_{2p,2n}^{2q}$	9	${}^2 a_{2p,2n}^{2q,2m}$	13	${}^2 a_{2p,2n}^{2q}$
2	${}^1 b_{2p,2n}^{2q,2m}$	6	${}^1 b_{2p,2n}^{2q}$	10	${}^2 b_{2p,2n}^{2q,2m}$	14	${}^2 b_{2p,2n}^{2q}$
3	${}^1 a_{2p}^{2q,2m}$	7	${}^1 a_{2p}^{2q}$	11	${}^2 a_{2p}^{2q,2m}$	15	${}^2 a_{2p}^{2q}$
4	${}^1 b_{2p}^{2q,2m}$	8	${}^1 b_{2p}^{2q}$	12	${}^2 b_{2p}^{2q,2m}$	16	${}^2 b_{2p}^{2q}$

При численном решении задачи определяющим этапом является точная оценка интегралов в рассматриваемых коэффициентах. Использовано выделение асимптотических составляющих, а также применены известные методы вычисления интегралов с осциллирующими подынтегральными выражениями в форме бесконечных рядов.

Выражения для интегралов коэффициентов, входящих в систему (7.40), согласно нумерации табл. 7.1, следующие (здесь  $j = 1, 2$  по порядку упоминания интегралов в парах):

интегралы 7, 15:

$${}^j \mathbf{a}_{2p}^{2q} = \frac{\zeta}{4} \int_0^{\infty} \frac{R_{j,1} \chi}{\Phi(\chi)} I_7(\chi, \zeta, p, q) d\chi; \quad (7.41)$$

интегралы 5, 13:

$${}^j \mathbf{a}_{2p,2n}^{2q} = \frac{\zeta}{4} \int_0^{\infty} \frac{R_{j,1} \chi}{\Phi(\chi)} I_5(\chi, \zeta, n, p, q) d\chi; \quad (7.42)$$

интегралы 3, 11:

$${}^j \mathbf{a}^{2q,2m}_{2p} = \frac{\zeta}{4} \int_0^{\infty} \frac{R_{j,1} \chi}{\Phi(\chi)} I_3(\chi, \zeta, p, m, q) d\chi \quad (7.43)$$

интегралы 1, 9:

$${}^j \mathbf{a}_{2p,2n}^{2q,2m} = \frac{\zeta}{4} \int_0^{\infty} \frac{R_{j,1} \chi}{\Phi(\chi)} I_1(\chi, \zeta, n, p, m, q) d\chi; \quad (7.44)$$

интегралы 8, 16:

$${}^j \mathbf{b}_{2p}^{2q} = \alpha^2 \vartheta \frac{\zeta}{4} \int_0^{\infty} \frac{\chi R_{j,2}}{\Phi(\chi)} I_8(\chi, \zeta, p, q) d\chi; \quad (7.45)$$

интегралы 6, 14:

$${}^j \mathbf{b}_{2n,2p}^{2q} = \alpha^2 \vartheta \frac{\zeta}{4} \int_0^{\infty} \frac{R_{j,2} \chi}{\Phi(\chi)} d\chi; \quad (7.46)$$

интегралы 4, 12:

$${}^j \mathbf{b}^{2m,2q}_{2p} = \alpha^2 \vartheta \frac{\zeta}{4} \int_0^{\infty} \frac{R_{j,2} \chi}{\Phi(\chi)} I_4(\chi, \zeta, p, m, q) d\chi; \quad (7.47)$$

интегралы 2, 10:

$${}^j \mathbf{b}_{2n,2p}^{2m,2q} = \alpha^2 \vartheta \frac{\zeta}{4} \int_0^{\infty} \frac{R_{j,2} \chi}{\Phi(\chi)} I_2(\chi, \zeta, n, p, m, q) d\chi, \quad (7.48)$$

где имеется 8 различных внутренних интегралов:

$$I_7(\chi, \zeta, p, q) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\varphi_1)}{\varphi_1} J_{2p}(\varphi_1) \frac{\sin(\varphi_2)}{\varphi_2} J_{2q}(\varphi_2) d\varphi; \quad (7.49)$$

$$I_5(\chi, \zeta, n, p, q) = \int_0^{\pi/2} J_{2n}(\varphi_1) J_{2p}(\varphi_1) \frac{\sin(\varphi_2)}{\varphi_2} J_{2q}(\varphi_2) d\varphi; \quad (7.50)$$

$$I_3(\chi, \zeta, p, m, q) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\varphi_1)}{\varphi_1} J_{2p}(\varphi_1) J_{2m}(\varphi_2) J_{2q}(\varphi_2) d\varphi; \quad (7.51)$$

$$I_1(\chi, \zeta, n, p, m, q) = \int_0^{\pi/2} J_{2n}(\varphi_1) J_{2p}(\varphi_1) J_{2m}(\varphi_2) J_{2q}(\varphi_2) d\varphi; \quad (7.52)$$

$$I_8(\chi, \zeta, p, q) = \int_0^{\pi/2} \frac{\varphi_1 \cos(\varphi_1) - \sin(\varphi_1)}{\varphi_1^3} J_{2p}(\varphi_1) \times \\ \times \frac{\varphi_2 \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_2)}{\varphi_2^3} J_{2q}(\varphi_2) d\varphi; \quad (7.53)$$

$$I_6(\chi, \zeta, n, p, q) = \int_0^{\pi/2} \frac{J_{2n}(\varphi_1)}{\varphi_1} \frac{J_{2p}(\varphi_1)}{\varphi_1} \frac{\varphi_2 \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_2)}{\varphi_2^3} J_{2q}(\varphi_2) d\varphi; \quad (7.54)$$

$$I_4(\chi, \zeta, p, m, q) = \int_0^{\pi/2} \frac{\varphi_1 \cos(\varphi_1) - \sin(\varphi_1)}{\varphi_1^3} J_{2p}(\varphi_1) \times \\ \times \frac{J_{2m}(\varphi_2)}{\varphi_2} \frac{J_{2q}(\varphi_2)}{\varphi_2} d\varphi; \quad (7.55)$$

$$I_2(\chi, \zeta, n, p, m, q) = \int_0^{\pi/2} \frac{J_{2n}(\varphi_1)}{\varphi_1} \frac{J_{2k}(\varphi_1)}{\varphi_1} \frac{J_{2m}(\varphi_2)}{\varphi_2} \frac{J_{2q}(\varphi_2)}{\varphi_2} d\varphi; \quad (7.56)$$

и введены обозначения

$$\varphi_1 = \chi \zeta \sin \varphi; \quad \varphi_2 = \alpha \chi \zeta \cos \varphi;$$

$$R_{11} = -\beta_3^2[-\alpha_1 n_2(1 - M_1) + \alpha_2 n_1(1 - M_2)] - \\ -2\chi^2[\alpha_2 n_1(M_2 - M_3) - \alpha_1 n_2(M_1 - M_3)];$$

$$\begin{aligned}
R_{12} = & \beta_3^2 [\alpha_1 (\chi^2 - m_2 - qn_2) - \alpha_2 (\chi^2 - m_1 - qn_1)] - 2\chi^2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (M_1 - M_2) - \\
& - 2\alpha_2 (\chi^2 - m_1 - qn_1) [M_2 (\chi^2 - 0,5\beta_3^2) - \chi^2 M_3] + \\
& + 2\alpha_1 (\chi^2 - m_2 - qn_2) [M_1 (\chi^2 - 0,5\beta_3^2) - \chi^2 M_3];
\end{aligned}$$

$$R_{21} = -\beta_3^2 (n_1 \alpha_2 - n_2 \alpha_1); \quad R_{22} = \beta_3^2 \{ \alpha_1 [\chi^2 - (m_2 + qn_2)] - \alpha_2 [\chi^2 - (m_1 + qn_1)] \}.$$

Выделены постоянные при  $\chi \rightarrow \infty$  выражения для следующих функций в подынтегральных функциях:  
для интегралов 1, 3, 5, 7:

$$\begin{aligned}
w_{11} = \lim_{\chi \rightarrow \infty} R_{11} = & n_1 \beta_2^2 (M_2 - M_3) - n_2 \beta_1^2 (M_1 - M_3) - \\
& - \beta_3^2 [n_1 (1 - M_2) - n_2 (1 - M_1)];
\end{aligned}$$

для интегралов 2, 4, 6, 8:

$$\begin{aligned}
w_{12} = \lim_{\chi \rightarrow \infty} R_{12} = & 2 \{ [\beta_2^2 / 2 - (m_2 + qn_2)] (M_1 - M_3) - \\
& - [\beta_1^2 / 2 - (m_1 + qn_1)] (M_2 - M_3) \};
\end{aligned}$$

для интегралов 9, 11, 13, 15:

$$w_{21} = \lim_{\chi \rightarrow \infty} R_{21} = -\beta_3^2 (n_1 - n_2);$$

для интегралов 10, 12, 14, 16:

$$w_{22} = \lim_{\chi \rightarrow \infty} R_{22} = \beta_3^2 [0,5 (\beta_2^2 - \beta_1^2) + m_1 - m_2 + q(n_1 - n_2)]$$

и для знаменателя

$$w_z = \lim_{\chi \rightarrow \infty} \Phi(\chi) = 0,5 n_1 \beta_2^2 - 0,5 n_2 \beta_1^2 - n_1 m_2 + n_2 m_1.$$

Полученные асимптотические выражения имеют действительные значения и используются для вычисления интегралов при достаточно больших значениях переменной интегрирования ( $\chi > 500$ ).

При вычислении интегралов применяются: для внешнего интеграла – процедура оценки интеграла с верхним бесконечным пределом с использованием адаптивной процедуры (на основе квадратурной формулы Ньютона-Котеса) или квадратурной формулы Гаусса, модифицированные для случая комплекс-



ной подынтегральной функции; для внутреннего интеграла – методика, описанная ниже.

Коэффициенты матрицы представлены двойными интегралами, которые имеют сильно осциллирующие подынтегральные функции во внутренних интегралах, численная оценка таких внутренних интегралов возможна при их вычислении в виде сумм на основе квадратурной формулы с весовой функцией Якоби ([148, формула (3.2.4)], [145, с. 453]):

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{K} \sum_{k=1}^K f(\varpi) + R_n(f), \quad (7.57)$$

где  $\cos(\varpi)$  – нули полиномов Чебышева 1-го рода  $T_K$ ;  $\varpi = \pi \frac{2k-1}{2K}$ ;

$$R_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n-1} 2n!} f(\varkappa), \quad (-1 \leq \varkappa \leq 1).$$

Этот способ вычисления подобных интегралов был предложен в [233, формула (1.153)].

Внутренние интегралы в формулах (7.49)–(7.56) приводятся к виду, соответствующему формуле (7.57) после замены переменных  $\sin \psi = \theta$ ,  $d\varphi = \cos \psi d\psi$ ,  $\cos \psi = \sqrt{1-\theta^2}$ . Тогда с использованием формулы замены переменных интегрирования (интегрирование подстановкой, [140, с. 114]) получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \frac{f[\sin(\psi), \cos(\psi)]}{\cos(\psi)} \cos(\psi) d\psi = \\ & = \int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/2)} \frac{f(\theta)}{\sqrt{1-\theta^2}} d\theta = \int_0^1 \frac{f(\theta)}{\sqrt{1-\theta^2}} d\theta. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Половина интеграла для четных функций  $f(x)$  в интервале  $(0, 1)$  равна половине последней суммы

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2K} \sum_{k=1}^K f(\varpi). \quad (7.59)$$

Все рассматриваемые здесь функции  $f(\varpi)$  являются четными. В последней сумме при четном  $K$  слагаемые с номерами  $k = i$  и  $k = K + 1 - i$  равны [188], поэтому для вычисления интеграла при четном  $K$  достаточно вычислить и просуммировать первую половину членов ряда и удвоить результат.

Вычисления при  $\alpha = 1$  значительно сокращаются. Для интегралов  $I_1, I_2, I_7$  и  $I_8$  в случае равенства в подынтегральном выражении индексов всех функций Бесселя число членов сумм уменьшается вдвое, а результат просто удваивает-

ся. Кроме того, при  $\alpha = 1$  нет необходимости вычислять интегралы, имеющие одинаковые значения, например,  ${}^j \mathbf{a}_0^2 = {}^j \mathbf{a}_2^0$ . При этом объем вычислений может быть уменьшен в три-четыре раза (в зависимости от  $N$ ).

Здесь величина  $K$  должна быть установлена в результате численных экспериментов, достаточно было принять  $K \geq 64$ .

Таким образом, для вычисления используется формула, позволяющая при оценке внутреннего интеграла выполнять интегрирование осциллирующей функции вычислением суммы

$$\begin{aligned}
 I_1(\chi, \zeta, \alpha, n, p, m, q) &= \\
 &= \int_0^{\pi/2} J_{2n}(\zeta\chi \sin \varphi) J_{2p}(\zeta\chi \sin \varphi) J_{2m}(\zeta\chi\alpha \cos \varphi) J_{2q}(\zeta\chi\alpha \cos \varphi) d\varphi = \\
 &= \int_0^1 J_{2n}(\chi\zeta \cos \varpi) J_{2n}(\chi\zeta \cos \varpi) J_{2n}(\chi\zeta\alpha \sin \varpi) \frac{J_{2n}(\chi\zeta\alpha \sin \varpi)}{\sin \varpi} d\varpi \approx \\
 &\approx \frac{\pi}{K} \sum_{k=1}^{K/2} J_{2n}(\xi_1) J_{2p}(\xi_1) J_{2m}(\xi_2) J_{2q}(\xi_2). \quad (7.60)
 \end{aligned}$$

Для вычисления других внутренних интегралов получены формулы

$$\begin{aligned}
 I_2(\chi, \zeta, \alpha, n, p, m, q) &= \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{J_{2n}(\zeta\chi \sin \varphi)}{\zeta\chi \sin \varphi} \frac{J_{2p}(\zeta\chi \sin \varphi)}{\zeta\chi \sin \varphi} \frac{J_{2m}(\zeta\chi\alpha \cos \varphi)}{\zeta\chi\alpha \cos \varphi} \frac{J_{2q}(\zeta\chi\alpha \cos \varphi)}{\zeta\chi\alpha \cos \varphi} d\varphi = \\
 &= \int_0^1 \frac{J_{2n}(\chi\zeta \cos \varpi)}{\chi\zeta \cos \varpi} \frac{J_{2p}(\chi\zeta \cos \varpi)}{\chi\zeta \cos \varpi} \frac{J_{2m}(\chi\zeta\alpha \sin \varpi)}{\chi\zeta\alpha \sin \varpi} \frac{J_{2q}(\chi\zeta\alpha \sin \varpi)}{\chi\zeta\alpha \sin^2 \varpi} d\varpi \approx \\
 &\approx \frac{\pi}{K} \sum_{k=1}^{K/2} \frac{J_{2n}(\xi_1)}{\xi_1} \frac{J_{2p}(\xi_1)}{\xi_1} \frac{J_{2m}(\xi_2)}{\xi_2} \frac{J_{2q}(\xi_2)}{\xi_2};
 \end{aligned}$$

$$I_3(\chi, \zeta, \alpha, p, m, q) \approx \frac{\pi}{K} \sum_{k=1}^{K/2} \frac{\sin(\xi_1)}{\xi_1} J_{2p}(\xi_1) J_{2m}(\xi_2) J_{2q}(\xi_2);$$

$$I_4(\chi, \zeta, \alpha, p, m, q) \approx \frac{\pi}{K} \sum_{k=1}^{K/2} \chi(\xi_1) J_{2p}(\xi_1) \frac{J_{2m}(\xi_2)}{\xi_2} \frac{J_{2q}(\xi_2)}{\xi_2};$$

$$I_5(\chi, \zeta, \alpha, n, p, q) \approx \frac{\pi}{K} \sum_{k=1}^{K/2} J_{2n}(\xi_1) J_{2p}(\xi_1) \frac{\sin(\xi_2)}{\xi_2} J_{2q}(\xi_2);$$

$$I_6(\chi, \zeta, \alpha, n, p, q) \approx \frac{\pi}{K} \sum_{k=1}^{K/2} \frac{J_{2n}(\xi_1)}{\xi_1} \frac{J_{2p}(\xi_1)}{\xi_1} \chi(\xi_2) J_{2q}(\xi_2);$$

$$I_7(\chi, \zeta, \alpha, p, q) \approx \frac{\pi}{K} \sum_{k=1}^{K/2} \frac{\sin(\xi_1)}{\xi_1} J_{2p}(\xi_1) \frac{\sin(\xi_2)}{\xi_2} J_{2q}(\xi_2);$$

$$I_8(\chi, \zeta, \alpha, p, q) \approx \frac{\pi}{K} \sum_{k=1}^{K/2} \chi_1 J_{2p}(\xi_1) \chi_2 J_{2q}(\xi_2),$$

где  $\xi_1 = \chi \zeta \cos \varpi$ ;  $\xi_2 = \chi \zeta \alpha \sin \varpi$ ;

$$\chi_l = \frac{\xi_l \cos(\xi_l) - \sin(\xi_l)}{\xi_l^3}; \quad \lim_{\xi_l \rightarrow 0} \chi_l = -1/3, \quad l = 1, 2.$$

Подынтегральные функции интегралов при  $\chi \gg 1$  осциллируют с частотой  $\pi\chi/(2\zeta)$ .

В работе V. Gerasik и M. Stastna [354] представлены формулы

$$M_1 = -\frac{m_2}{n_2}; \quad M_2 = -\frac{m_1}{n_1},$$

$$s_{22} M_1 M_2 + s_{12} (M_1 + M_2) + s_{11},$$

которые удобно использовать для контроля численного решения. Здесь  $s_{11}$ ,  $s_{12}$ ,  $s_{22}$  – безразмерные коэффициенты (1.46) [316].

Для определения безразмерных контактных напряжений (7.21) получены выражения

$$\begin{aligned} q_1(x, y) = & \frac{16}{\alpha \pi^2 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-(y/\alpha)^2}} \times \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{n+m} n m \mathcal{A}_{2n, 2m} T_{2n}(x) T_{2m}(y/\alpha) + \\ & + \frac{4}{\alpha \pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{1-(y/\alpha)^2}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m \mathcal{A}_{0, 2m} T_{2m}(y/\alpha) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \mathcal{A}_{2n, 0} T_{2n}(x) \right] + \mathcal{A}_{0,0} / \alpha, \end{aligned} \quad (7.61)$$

$$\begin{aligned}
q_2(x, y) = & \frac{\alpha \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-(y/\alpha)^2}}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m} \mathcal{B}_{2n, 2m}}{(4n^2-1)(4m^2-1)} \times \\
& \times [(2n-1)U_{2n}(x) - (2n+1)U_{2n-2}(x)] \times \\
& \times [(2m-1)U_{2m}(y/\alpha) - (2m+1)U_{2m-2}(y/\alpha)] - \\
& - \frac{\alpha(1-x^2)\sqrt{1-(y/\alpha)^2}}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \mathcal{B}_{0, 2m}}{(4m^2-1)} \times \\
& \times [(2m-1)U_{2m}(y/\alpha) - (2m+1)U_{2m-2}(y/\alpha)] - \\
& - \frac{\alpha[1-(y/\alpha)^2]\sqrt{1-x^2}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \mathcal{B}_{2n, 0}}{(4n^2-1)} \times \\
& \times [(2n-1)U_{2n}(x) - (2n+1)U_{2n-2}(x)] - \\
& - \frac{\alpha(1-x^2)[1-(y/\alpha)^2]}{4} \mathcal{B}_{0,0}. \tag{7.62}
\end{aligned}$$

Вычисление коэффициентов матрицы системы при заданной частоте требует значительных затрат времени, поэтому необходимо ограничиться обоснованным числом членов ряда. Величины коэффициентов, содержащих произведения функции Бесселя, уменьшаются с увеличением индексов. Решение системы уравнений выполнялось методом улучшенной редукции, и в результате численных экспериментов при удержании от 3 до 7 членов рядов в разложениях показана удовлетворительная сходимости результатов. Необходимо учитывать более трех членов рядов при малой частоте для определения реакций фаз и перемещения.

Необходимое число членов ряда для нахождения распределения эффективных напряжений и порового давления под подошвой с необходимой точностью установить не удастся, даже при  $N = 11$ , когда расчет требует значительных затрат времени, распределение оказывается неравномерным. Следует отметить, что рассматривая контактную задачу теории консолидации водонасыщенной среды основе уравнений Био без учета инерционных членов, В. Керчман [128, 129] отметил, что в случае действия нагрузки в виде функции Хевисайда в начале процесса консолидации вследствие возникающих больших гидродинамических напоров контактные напряжения изменяются очень быстро, увеличиваясь вблизи середины штампа и уменьшаясь около краев.

Параметры двухфазной среды для расчетов, представленных в последующих пунктах, взяты из работ [368, 382]:  $k_f = 2,54 \cdot 10^{-4}$  м/с;  $A = 4,325 \cdot 10^8$  Па;  $\vartheta = 0,48$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\lambda_p = 1,47 \cdot 10^8$  Па;  $K_0 = 2 \cdot 10^8$  Па;  $K_r = 34 \cdot 10^9$  Па;  $\mu_p = 9,794 \cdot 10^7$  Па;  $\rho_s = 2670$  кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_f = 990$  кг/м<sup>3</sup>;  $\theta_0 = 0,001$  Н с/ м<sup>2</sup>;  $\rho_{12} = 0$ .

### 7.2.3 Расчет импеданса основания

Механический импеданс (динамическая реакция [253]) для невесомого штампа представляет собой комплексную функцию частоты, реакцию при перемещении единичной амплитуды. Импеданс дает интегральное представление реакции среды для площади контакта с заданными размерами и граничными условиями при установившихся колебаниях.

Согласно [353] импеданс выражается формулой

$$Z = k + i\omega c, \quad (7.63)$$

в которой  $k$  и  $c$  – функции частоты, аналогичные функциям (7.1) и (7.2). Действительная часть  $k$ , называемая “динамической жесткостью”, отражает упругую жесткость грунта основания. Ее зависимость от частоты определяется, в основном, инерционными свойствами, поскольку свойства грунта практически не зависят от частоты в рассматриваемом здесь сейсмическом диапазоне (с максимальной частотой 33 Гц, [24, 98]). В мнимой части  $\omega c$  присутствует “коэффициент демпфирования”  $c$ . Он учитывает эффекты излучения упругих волн и гистерезисного демпфирования в материале основания. Уравнение в форме (7.63) предполагается для каждой моды колебаний.

Методики расчетов с использованием функций импеданса и обратным им функциям податливости находят применение для системы фундамент-основание при анализе динамики и сейсмостойкости сооружений [285, 333] и моделей блоков АЭС [346, 423].

В качестве контрольного примера был выполнен расчет по методике пункта 7.2.2 для набора параметров, представленных выше (см. с. 364). Полученные графики (для функции податливости, обратной импедансу) совпадают с графиками из [368], приведенными на рис. 7.1 (с. 344).

В [368] представлены также соответствующие результаты для вращательных колебаний.

Колебания прямоугольного штампа с дренированной подошвой рассматривались в монографии [266]. Пример для упругого полупространства, выполненный В. М. Сеймовым и приведенный ниже для сравнения, взят из монографии [233] и получен при  $\nu = 0,3$  и  $\alpha = 1$ .

Переменными для численного анализа приняты коэффициент фильтрации, размеры подошвы штампа (длина и соотношение сторон), коэффициент Пуас-

сона, пористость. Переход к модели упругой (однофазной) среды осуществляется уменьшением значения плотности поровой жидкости.

Согласно уравнению (1.45) (с. 21) и формулам (1.51), на результаты решения задачи, в отличие от случая упругой однофазной среды, влияет зависимость от частоты скоростей волн и от размеров площадки контакта. Ниже выполняется анализ расчетных данных, полученных при варьировании осредненного коэффициента фильтрации  $k_f$ , коэффициента Пуассона  $\nu_p$  при заданном  $\mathcal{N}$ , ширины подошвы фундамента  $a$ . Для весомого штампа, при действии силовой нагрузки, обычно варьируется масса фундамента, а изменение остальных параметров проявляется не так заметно.

На рис. 7.4 (с. 366) представлены графики действительных и мнимых частей импеданса  $\text{Re}R_0$ ,  $\text{Im}R_0$ , а также составляющие реакций твердого скелета  $\text{Re}R_s$ ,  $\text{Im}R_s$  и поровой жидкости  $\text{Re}R_f$ ,  $\text{Im}R_f$ . Действительная часть импеданса имеет конечную величину при  $\zeta \rightarrow 0$ , сохраняя почти постоянное значение до частоты  $\zeta = 1$ . При увеличении частоты воздействия  $\text{Re}R_0$  уменьшается и меняет знак. Мнимая часть импеданса с увеличением частоты возрастает от 0 практически линейно. Равнодействующая эффективных напряжений  $\text{Re}R_s$  изменяется с частотой, принимая максимальное значение при  $\zeta \rightarrow 0$  и сохраняет, согласно численным результатам, положительное значение.

Результаты вычисления импеданса под осесимметричными фундаментами различной формы, заглубленными в ПУНЖ полупространство, рассчитанные методом граничных элементов, представлены в статье [419]. Реакция основания при колебаниях осесимметричного и прямоугольного невесомых штампов при единичной амплитуде подобна, данные можно сравнивать для прямоугольного штампа на поверхности и круглого штампа с непроницаемой подошвой, заглубленного на половину радиуса подошвы (рис. 7.5). При сравнении графиков на рис. 7.4 (кривые 1 и 2) и рис. 7.5 (штриховые линии) отмечается удовлетворительное соответствие. В отличие от работы [419] представленная здесь методика на основе метода ортогональных полиномов позволяет разделять реакции фаз. Жесткость ПУНЖ основания существенно отличается от упругого. Жесткость твердого скелета соответствует жесткости упругого полупространства. Составляющая жесткости жидкой фазы принимает с возрастанием частоты отрицательное значение, что и объясняет различие кривых  $\text{Re}$  на левом графике рис. 7.5. При  $a = 10$  м и  $c_2 = 265$  м/с максимальная частота  $\zeta = 10$  на графиках соответствует частоте  $f_{max} = 42$  Гц. Существенное различие между насыщенной жидкостью средой и ненасыщенной отмечается при частоте  $f > 12$  Гц ( $\zeta > 2,5$ ).

Влияние изменения коэффициента Пуассона твердого скелета в пределах характерных значений для песчаного грунта  $\nu = 0,25$ ;  $\nu = 0,30$  и  $\nu = 0,35$  на жесткость основания  $\text{Re}R_0$  (кривые серого цвета) и вклад фаз а)  $\text{Re}R_s$ , б)  $\text{Re}R_f$  (кривые черного цвета) показано на рис. 7.6 (с. 367). Графики рис. 7.6.а и рис. 7.6.б иллюстрируют изменение с частотой коэффициента

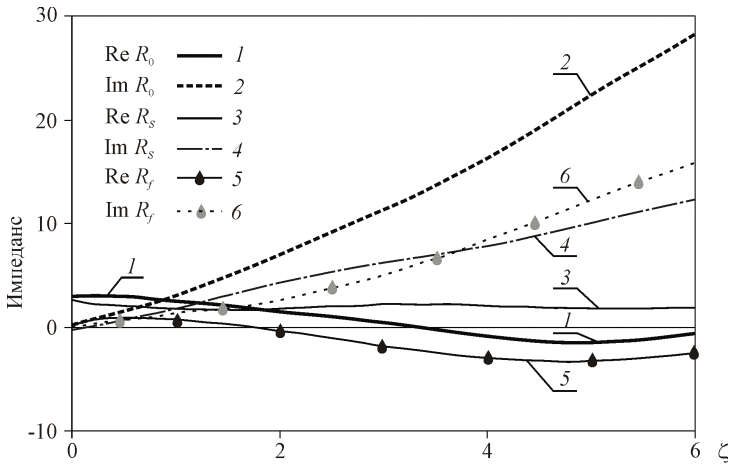


Рис. 7.4. Вертикальный импеданс квадратного штампа и составляющие импедансов фаз

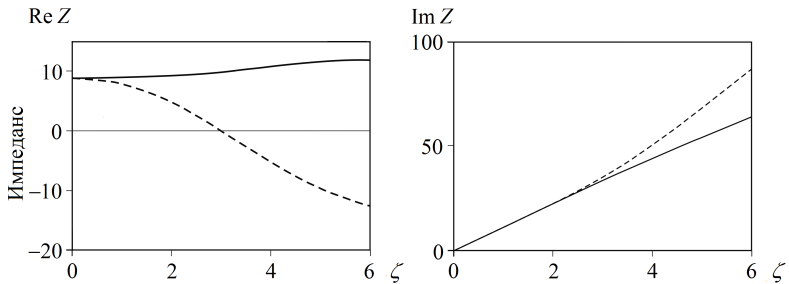


Рис. 7.5. Изменение с частотой импеданса  $Z$  цилиндрического фундамента с проницаемой (сплошные линии) и непроницаемой (штриховые линии) подошвой [419]

демпфирования (затухания)  $Im R_0/\zeta$  (кривые изображены серым цветом) и его составляющих для фаз (кривые черного цвета).

С увеличением коэффициента Пуассона жесткость возрастает, а затухание снижается.

На графиках рис. 7.4 (с. 366), и далее на рис. 7.7 (с. 369), рис. 7.8 (с. 370), рис. 7.9 (с. 370) видно, что для непроницаемой подошвы жесткость в некоторых диапазонах частоты принимает отрицательные значения, что можно объяснить отрицательным значением составляющей порового давления (“приса-

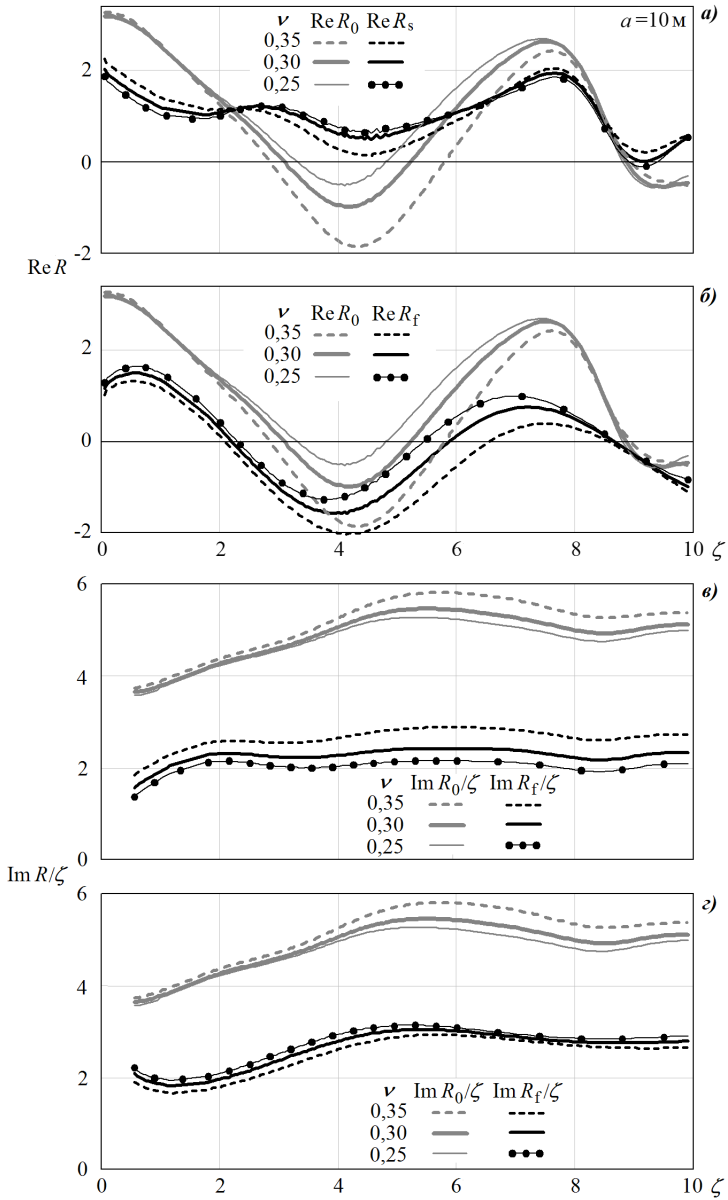


Рис. 7.6. Сравнение жесткости, коэффициента демпфирования и их составляющих для фаз при значениях коэффициента Пуассона  $\nu = 0,25; 0,30; 0,35$



сывание” подошвы к основанию). Здесь следует учесть, что рассматриваемые функции описывают условную реакцию невесомого штампа, совершающего гармонические колебания с единичной амплитудой перемещения.

В данной методике не учитывается заглубление фундамента, которое, по расчетным данным [311, 419] приводит к увеличению жесткости основания  $ReR_0$ . При этом также существенно увеличивается и коэффициент демпфирования  $ImR_0/\zeta$ .

Графики рис. 7.7.6 и рис. 7.7.2 иллюстрируют изменение с частотой коэффициента демпфирования (затухания)  $ImR_0/\zeta$  и его составляющих для фаз в) твердой и з) жидкой с изменением пористости.

Расчеты для квадратных штампов разной ширины  $a = 1$  м и  $a = 10$  м показали, что в этом случае жесткость основания для штампа большей площади, как следует из рис. 7.8 (с. 370), будет немного выше. При этом вклад жидкой фазы с увеличением площади увеличивается, а твердой – уменьшается. Результаты для затухания здесь не приводятся, обнаруживается небольшое увеличение коэффициента затухания при  $1 < \zeta < 3$  для штампа большей площади.

Графики на рис. 7.9 (см. с. 370) построены для значений коэффициента фильтрации  $k_f = 2,54 \cdot 10^{-4}$  м/с;  $12,40 \cdot 10^{-4}$  м/с;  $24,50 \cdot 10^{-4}$  м/с. Как и в других работах, здесь показано, что реактивные усилия ПУНЖ среды мало изменяются при значительном изменении величины коэффициента фильтрации  $k_f$ . При этом заметно меняется распределение реакции между фазами. С увеличением  $k_f$  значения жесткости твердой фазы приближается к жесткости упругой однофазной среды.

Графики на рис. 7.7 рассчитаны для ряда значений пористости  $\vartheta = 0,48; 0,38; 0,28$ . При этом плотность основания изменяется соответственно как  $\rho = 1864$  кг/м<sup>3</sup>;  $2032$  кг/м<sup>3</sup>;  $2200$  кг/м<sup>3</sup>.

При расчетах с учетом параметра динамической связи фаз, “добавленной плотности”, для  $\rho_{12} = -150$  кг/м<sup>3</sup> и  $\rho_{12} = 0$  различий величин жесткости и демпфирования не обнаружено, что соответствует результатам других авторов [373].

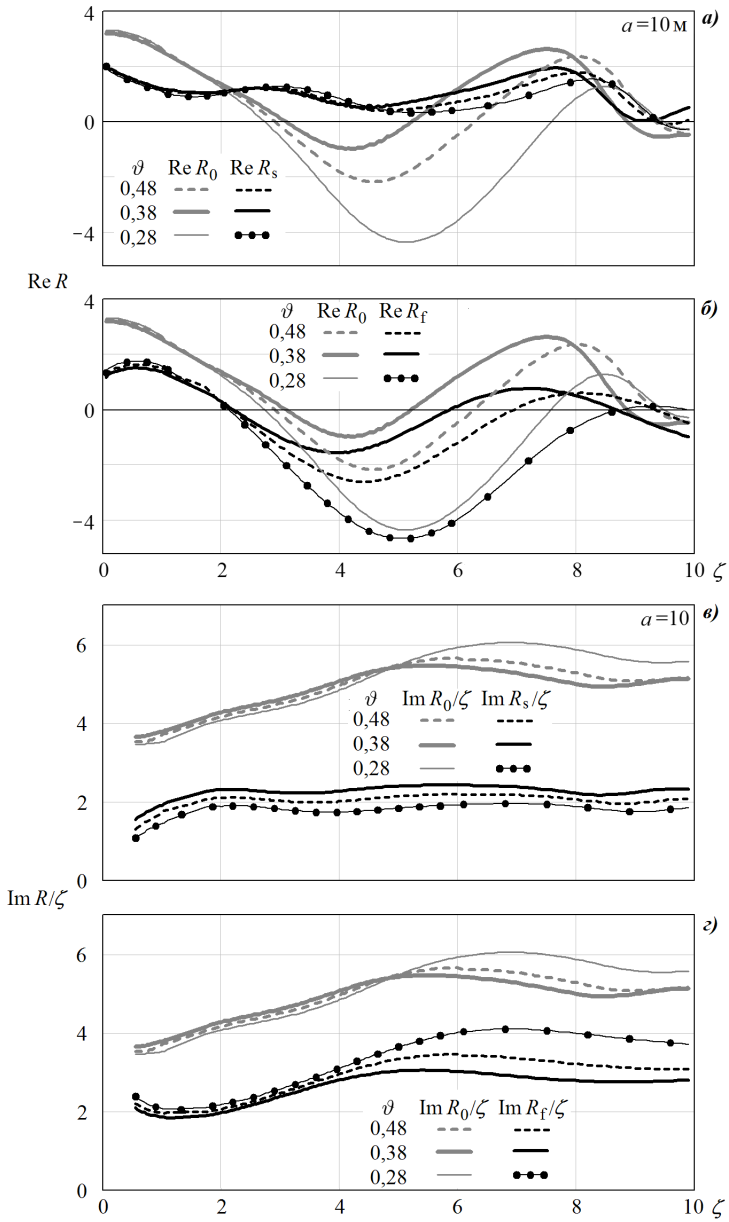


Рис. 7.7. Сравнение характеристики коэффициента демпфирования и составляющих для фаз при значениях пористости  $\vartheta = 0,48; 0,38; 0,28$

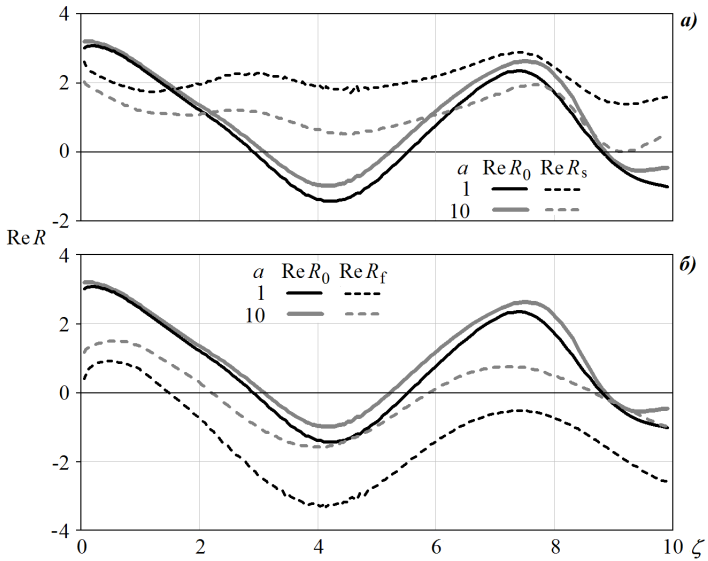


Рис. 7.8. Жесткость и ее составляющие для фаз для квадратных штампов при  $a = 1$  м и  $a = 10$  м

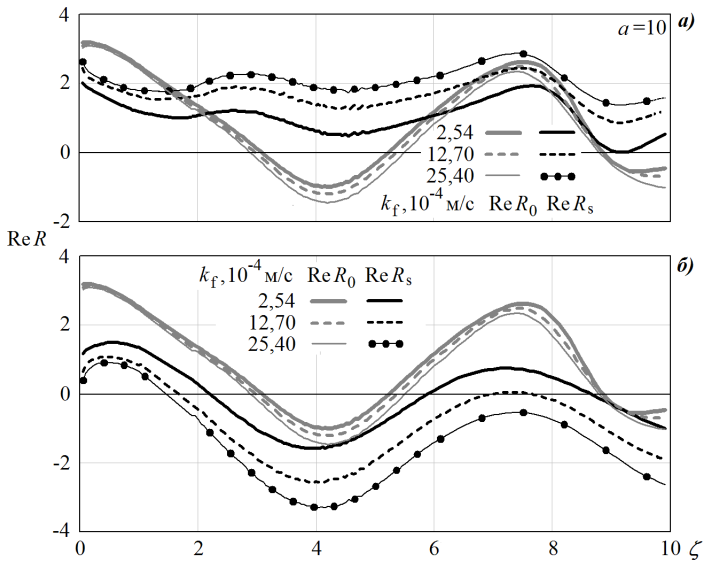


Рис. 7.9. Сравнение жесткости и ее составляющие для фаз при значениях  $k_f = 2,54 \cdot 10^{-4}$  м/с;  $12,70 \cdot 10^{-4}$  м/с;  $25,40 \cdot 10^{-4}$  м/с

### 7.2.4 Расчет реакций с учетом массы штампа

Рассматриваются результаты, полученные при решении системы (7.40) с правой частью (7.34) и равнодействующей реакции основания (7.38).

Свойства ПУНЖ полупространства в предельном случае должны соответствовать свойствам упругого полупространства. Поэтому на численных примерах проводится сравнение результатов с решением задачи о колебаниях прямоугольного штампа на упругом полупространстве на основе методики работы [233]. Для этого можно задать соответствующее силовое воздействие в системе (7.40). При нагрузке от вертикальной силы  $P(t) = P \exp(i\zeta t)$  правая часть системы уравнений имеет вид  $\delta_{k,0} \delta_{l,0} \delta_{j,2} P/(\pi^2 \alpha a^2)$  (см. [233, (1.140)]). Преобразуем слагаемые нагрузки и реакции неоднородного уравнения таким образом, чтобы в его правой части выделить  $P/(\pi^2 \alpha a^2)$ . Тогда слагаемое нагрузки принимает вид

$$\frac{-1}{8\mu\pi\zeta^2 m_s} \frac{P}{\pi^2 \alpha a^2},$$

а слагаемое реакции

$$\frac{-1}{8\mu\pi\zeta^2 m_s} 8\mu \left( \frac{-1}{\alpha} A_{0,0} + \frac{\alpha}{9} B_{0,0} + \frac{\alpha}{12} B_{0,1} + \frac{\alpha}{12} B_{1,0} + \frac{-\alpha}{16} B_{1,1} \right).$$

Обезразмеривая реакцию величиной  $P/(\pi^2 \alpha a^2)$ , приводим систему к виду, при котором правая часть неоднородного уравнения равна 1.

Таким образом, для оценки достоверности служит также сравнение реакции в предельном случае с соответствующей реакцией упругого полупространства, например, с результатами В. М. Сеймова [233, с. 40, табл. 1].

Результаты расчетов по модели Био с параметрами, приведенными на с. 364, при отсутствии поровой жидкости обозначены цифрой 1 и меткой  $|A_{0,0}|$ , а с заполненными жидкостью порами – цифрой 3 и меткой  $|R_0|$ . На графике кривая для упругого полупространства из [233] обозначена как  $|A_{0,0h}|$  (кривая 2). Результаты расчетов по разным моделям хорошо согласуются. Модуль реакции ПУНЖ полупространства вследствие инерционного взаимодействия штампа и основания с увеличением частоты возрастает от статического значения до определенной частоты  $\zeta_m$ , на которой отмечается максимум, а при дальнейшем увеличении частоты модуль реакции уменьшается. Присутствие поровой жидкости снижает амплитуду колебаний в окрестности  $\zeta_m$ . Для реакций фаз при всех вариантах расчетов установлено, что фаза общей реакции и реакции поровой жидкости совпадают. Соотношение модулей реакций фаз  $|R_s|$  и  $|R_f|$  зависит от частоты.

При сравнении модулей и аргументов реакций для штампов при размерах рядов  $N = 4 \div 7$  отмечается незначительное различие реакций фаз при разных  $N$ , а общая реакция при этом практически не изменяется.

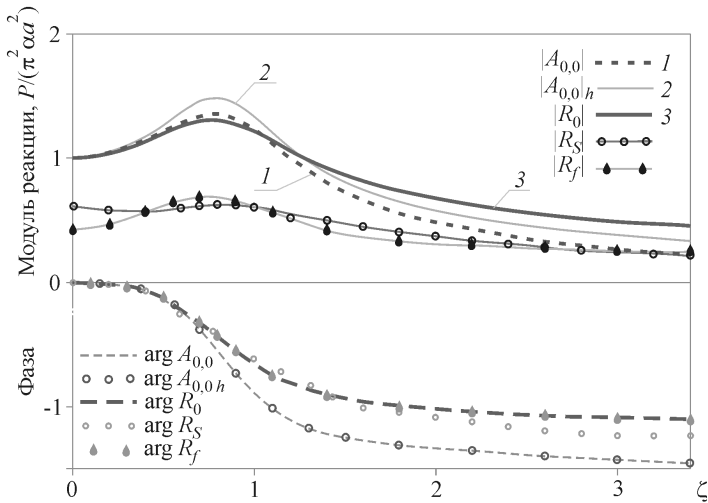


Рис. 7.10. Модули и аргументы реакции: 1 - упругого, 2 - вязкоупругого и 3 - пористоупругого полупространства при  $m_s = 0,576$  и  $N = 3$

Соотношение реакций фаз при  $\zeta \rightarrow 0$  показано на рис. 7.11, модуль реакции твердой фазы стремится к статической реакции, а жидкой – к 0. Фазы общей реакции и равнодействующей реакции жидкой фазы совпадают.

Рассмотрено влияние проницаемости (коэффициента фильтрации  $k_f$ ) на реакцию основания. Результаты расчета на примере системы с  $m_s = 0,885$  при  $k_f = 1,27 \cdot 10^{-4}$  м/с и  $k_f = 5,08 \cdot 10^{-4}$  м/с показаны на рис. 7.12 (с. 373). Общая реакция практически не изменяется при изменении проницаемости, незначительно уменьшаясь при увеличении  $k_f$ . При этом увеличивается доля твердой фазы в реакции основания при низких частотах и на частоте  $\zeta_m$ . Аргументы общей реакции и реакции поровой жидкости практически совпадают. Аргумент реакции твердой фазы с увеличением  $k_f$  уменьшается.

Перемещение  $w_1$  массивного штампа при силовом воздействии можно определить по формуле

$$\bar{w}_1(\zeta) = \frac{\bar{P}(\zeta) - \bar{R}(\zeta)}{\pi^2 a \mu \zeta^2 m_s}. \tag{7.64}$$

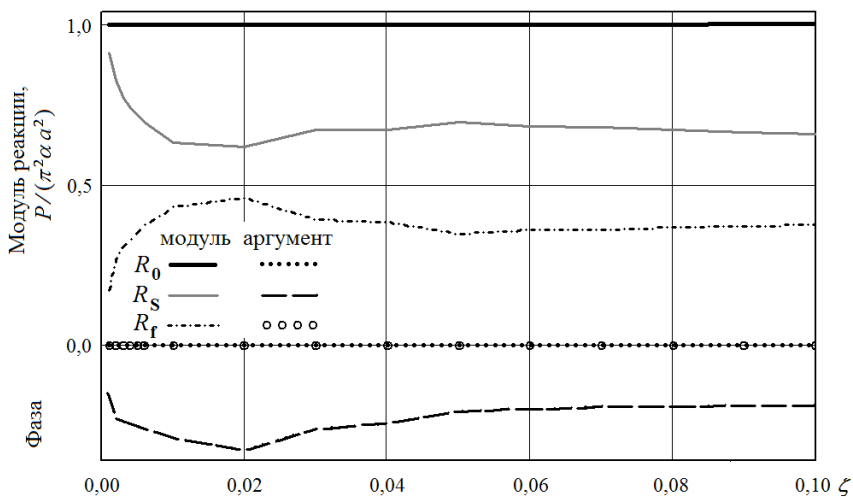


Рис. 7.11. Модули и аргументы реакции ПУНЖ полупространства при  $0 < \zeta < 0,1$  ( $m_s = 0,443$ ,  $N = 3$ )

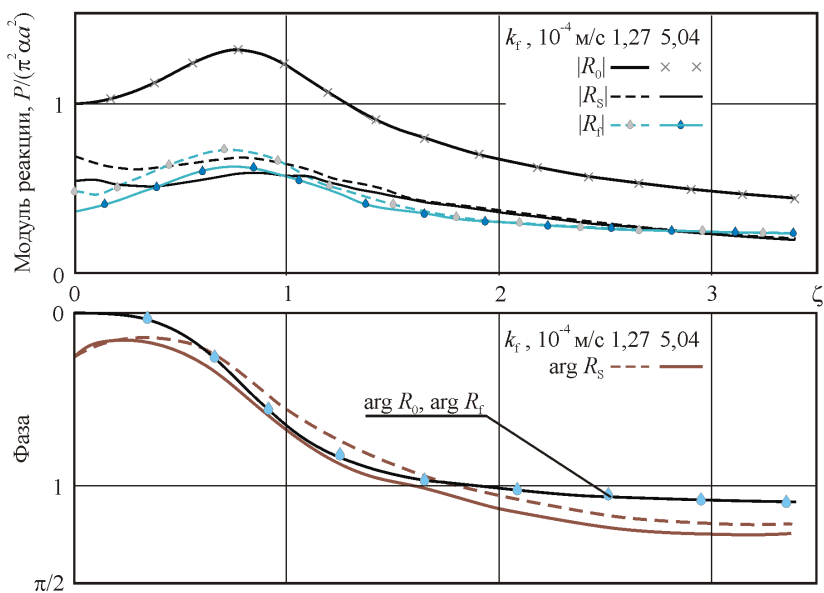


Рис. 7.12. Модули и аргументы реакции ПУНЖ полупространства при  $k_f = 0,000127$  м/с и  $k_f = 0,000508$  м/с ( $m_s = 0,885$ ,  $N = 4$ )

### 7.3 Динамика фундамента на слое водонасыщенного грунта

Вертикальные вынужденные колебания непроницаемого жесткого штампа (полосы) на пористоупругом насыщенном жидкостью (ПУНЖ) слое с защемленной нижней гранью в условиях плоской деформации (рис. 7.13) рассматриваются для выполнения численного моделирования динамического взаимодействия малозаглубленного ленточного фундамента с насыщенным водой грунтовым слоем на жестком подстилающем основании.

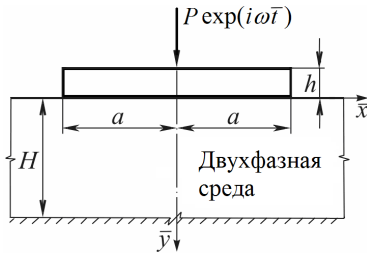


Рис. 7.13. Геометрия задачи о полосе на слое

и характеристик колебаний при взаимодействии массивных штампов на слоистом основании. В [44, гл. 5] подробно рассмотрена теория низкочастотных (ниже частоты, при которой в слое распространяются волны) резонансов (изолированных, В-резонансов), при которых амплитуда колебаний принимает бесконечное значение для массивных штампов на упругом слое (или пакете слоев), сцепленных с недеформируемым основанием.

В работе [93] приведено решение линейной задачи о гармонических колебаниях вязкоупругого слоя, нагруженного плоским круговым штампом при условиях полного прилипания и гладкого контакта.

Импеданс круглого жесткого штампа для упругого слоя на полупространстве рассматривался в работе [390]. На численных примерах установлено, что влияние слоистости наиболее заметно проявляется при вертикальных колебаниях.

В статье В. Д. Кубенко [149] построено аналитическое решение плоской задачи о действии нестационарной нагрузки на поверхность упругого слоя в условиях смешанной краевой задачи на каждой граничной поверхности: на одной из границ задана действующая нагрузка в виде нормального напряжения и касательное перемещение, тогда как на другой границе условия состоят в отсутствии нормального перемещения и касательного напряжения. Применены интегральные преобразования Лапласа и Фурье, обращение которых выполнено точно. Рассмотрен случай нагрузки, приложенной к области постоянных размеров. Проанализированы характерные особенности волновых процессов.

Распространению волн в упругих слое и стратифицированном полупространстве а также задачам о колебаниях штампов на упругом слое посвящены работы [12, 14, 42, 44, 149, 150, 238, 250, 272, 300] и др.

В монографиях [12, 44] для решения задач о жестких штампах на среде с упругими и более сложными свойствами рассмотрены методы построения матрицы-символа Грина для упругих слоистых сред. Приведены примеры расчетов импедансных функций для слоистого упругого основания

Решение подобных задач для анализа взаимодействия сооружений с водонасыщенным грунтовым основанием было получено методами граничных элементов, например, [310, 388] и конечных элементов [327, 328, 391]. Сравнение результатов использования этих двух методов было выполнено в статье [373].

Колебания штампов с проницаемой подошвой на слоистом ПУНЖ основании в двумерном случае рассматривались в статье [260].

В монографии [266] представлены решения осесимметричных задач для ПУНЖ слоя при заданной распределенной нагрузке и для ПУНЖ слоя, расположенного между упругими слоем и полупространством. Контактные задачи не рассматривались.

Задачи определения динамической жесткости упругих слоистых сред рассмотрены в [12]. Динамическая жесткость слоистых, градиентно-неоднородных и преднапряженных упругих и гиперупругих сред (плоские и осесимметричные задачи) изучается в работе В. В. Калинчука и Т. И. Беянской [124].

Здесь на основе решения контактной задачи для гармонических колебаний непроницаемой жесткой полосы на ПУНЖ полуплоскости, приведенного в [266, § 3.4], определяются импеданс или реакция более сложного основания в виде ПУНЖ слоя с заземленной тыльной гранью в зависимости от частоты вынужденных колебаний, геометрических и физических параметров модели. При этом оценивается вклад каждой из фаз, могут быть проанализированы данные о распределении контактных эффективных напряжений и порового давления. Постановка задачи соответствует задаче  $I_{ш}$  по классификации монографии [42, § 20], в которой также рассматривались решения с использованием метода ортогональных полиномов (§ 26).

Предварительные результаты были опубликованы в статье [225].

### 7.3.1 Перемещения свободной грани слоя от вертикальной распределенной нагрузки

Для решения динамической контактной задачи найдем перемещения поверхности слоистого ПУНЖ основания при действии на него симметричной относительно оси  $O\bar{x}$  распределенной нагрузки на твердую фазу  $p_1$  и на жидкую фазу  $p_2$ . Некоторые предпосылки для постановки задачи представлены в § 4.5.

Безразмерные переменные введены по формулам  $x = \bar{x}/a$ ,  $y = \bar{y}/a$ ,  $H = \bar{H}/a$ .

Уравнения феноменологической модели Био в двумерном случае представлены в [266, § 3.1]. Векторы перемещений твердой фазы  $\vec{u}$  и поровой жидкости  $\vec{U}$  определяются как

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \nabla \varphi_1 + \nabla \times \{\psi_1 \vec{e}_y\}, & \vec{U} &= \nabla \varphi_2 + \nabla \times \{\psi_2 \vec{e}_y\}, \\ \varphi_1 &= \Phi_1 + \Phi_2, & \varphi_2 &= M_1 \Phi_1 + M_2 \Phi_2, & \psi_1 &= \Psi, & \psi_2 &= M_3 \Psi. \end{aligned} \quad (7.65)$$



Рассматриваются гармонические колебания с круговой частотой  $\omega = 2\pi f$ . Гармонический множитель  $\exp(i\omega t)$  далее опускаем.

Здесь скалярные функции  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Psi$  являются решениями уравнений Гельмгольца

$$(\Delta + k_j^2) \Phi_j = 0, \quad j = 1, 2; \quad (\Delta + k_3^2) \Psi = 0,$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа, с безразмерными волновыми числами

$$k_j^2 = \zeta^2 \frac{c_2^2}{c^2} z_j, \quad j = 1, 2; \quad k_3^2 = \zeta^2 \frac{\rho_e c_2^2}{\mathcal{N}} [\Gamma_{11} + M_3 \Gamma_{12} + i \gamma_\beta (1 - M_3)],$$

а обозначения описаны в пункте 1.3.2.

В среде распространяются продольные волны первого и второго рода и поперечная волна. В модели Био скорость этих волн зависит от частоты воздействия [316].

Перемещения твердой и жидкой фаз определяются соответственно из формул [266]:

$$u_s = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad w_s = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}; \quad (7.66)$$

$$u_f = M_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + M_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + M_3 \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad w_f = M_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + M_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - M_3 \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (7.67)$$

Используются также представления (с учетом обозначений (7.22)) для компонент эффективных напряжений

$$\frac{\sigma_x^{ef}}{2\mu} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \zeta^2 (m_1 - \beta_1^2) \Phi_1 - \zeta^2 (m_2 - \beta_2^2) \Phi_2, \quad (7.68)$$

$$\frac{\sigma_y^{ef}}{2\mu} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \zeta^2 (m_1 - \beta_1^2) \Phi_1 - \zeta^2 (m_2 - \beta_2^2) \Phi_2, \quad (7.69)$$

касательных напряжений

$$\frac{\tau_x}{2\mu} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\Phi_1 + \Phi_2) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) \quad (7.70)$$

и сил, действующих на поровую жидкость по единичной площадке поперечного сечения ПУНЖ среды

$$\frac{\sigma_y^f}{2\mu} = -\zeta^2 (n_1 \Phi_1 + n_2 \Phi_2). \quad (7.71)$$

Используется преобразование Фурье по  $x$  с параметром  $\xi$ . С учетом условий на бесконечности потенциалы  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Psi$  находим в форме

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= [A_1 \exp(\alpha_1 y) + A_3 \exp(-\alpha_1 y)] \exp(i \xi x); \\ \Phi_2 &= [A_2 \exp(\alpha_2 y) + A_4 \exp(-\alpha_2 y)] \exp(i \xi x); \\ \Psi &= i [B_1 \exp(\alpha_3 y) + B_2 \exp(-\alpha_3 y)] \exp(i \xi x),\end{aligned}\tag{7.72}$$

$\alpha_i = \sqrt{\xi^2 - \beta_i^2 \zeta^2}$ ;  $\beta_i$  – отношения скоростей волн в двухфазной среде (см. (1.44), (1.53)),  $i = 1, 2, 3$ ;

Найдем перемещения поверхности при действии симметричных относительно оси  $Ox$  распределенных нагрузок на твердую фазу  $p_1$  и на жидкую фазу  $p_2$ .

Граничные условия при вертикальной нагрузке на обе фазы на свободной поверхности слоя от непроницаемого штампа и защемлением нижней грани слоя на глубине  $H$  (рис. 7.13) представляются формулами:

- напряжения на грани с нагрузкой ( $y = 0$ ):

касательное напряжение

$$\tau_{xy} = 0 \quad (-\infty < x < \infty, \quad y = 0);$$

нормальное эффективное напряжение

$$\sigma_y^{ef} = -p_1 \quad (|x| \leq 1, \quad y = 0);$$

давление на жидкую фазу

$$\sigma_y^f = \vartheta p_2 \quad (|x| \leq 1, \quad y = 0);$$

- перемещение фаз на жесткой границе ( $y = H$ ):

вертикальное

$$w^s = 0; \quad w^f = 0; \quad (-\infty < x < \infty);$$

горизонтальное

$$u^s = 0 \quad (-\infty < x < \infty).$$

Условия на бесконечности заключаются в требовании убывания перемещений  $\vec{u}$ ,  $\vec{U}$ .

Из граничных условий по формулам (7.68)–(7.71) получена система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $A_j(\xi)$  ( $j = 1, 2, \dots, 4$ )

и  $B_i(\xi)$  ( $i = 1, 2$ ) в виде

$$\begin{bmatrix} 2\xi\alpha_1 & 2\xi\alpha_2 & -2\xi\alpha_1 & -2\xi\alpha_2 & \alpha_\xi & \alpha_\xi \\ o_1 & o_2 & o_1 & o_2 & \xi\alpha_3 & -\xi\alpha_3 \\ \zeta^2 n_1 & \zeta^2 n_2 & \zeta^2 n_1 & \zeta^2 n_2 & 0 & 0 \\ \xi\varepsilon_1 & \xi\varepsilon_2 & \xi\kappa_1 & \xi\kappa_2 & \alpha_3\varepsilon_3 & -\alpha_3\kappa_3 \\ \alpha_1\varepsilon_1 & \alpha_2\varepsilon_2 & -\alpha_1\kappa_1 & -\alpha_2\kappa_2 & \xi\varepsilon_3 & \xi\kappa_3 \\ M_1\alpha_1\varepsilon_1 & M_2\alpha_2\varepsilon_2 & -M_1\alpha_1\kappa_1 & -M_2\alpha_2\kappa_2 & M_3\xi\varepsilon_3 & M_3\xi\kappa_3 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \mathbf{P}, \quad (7.73)$$

где

$$\mathbf{A} = (A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ B_1 \ B_2)^T; \quad \mathbf{P} = (0 \ -\bar{P}_1 \ \vartheta\bar{P}_2 \ 0 \ 0 \ 0)^T;$$

$\alpha_j = \sqrt{\xi^2 - \zeta^2 \beta_j^2}$ ;  $\varepsilon_j = \exp(\alpha_j H)$ ;  $\kappa_j = \exp(-\alpha_j H)$ ;  $s_j = \varepsilon_j - \kappa_j = 2 \operatorname{sh}(\alpha_j H)$ ;  $c_j = \varepsilon_j + \kappa_j = 2 \operatorname{ch}(\alpha_j H)$ ,  $j = 1, 2, 3$ ;  $\alpha_\xi = \xi^2 + \alpha_3^2$ ;  $o_i = \xi^2 - \zeta^2(m_i + qn_i)$ ,  $i = 1, 2$ ;  $q = (\vartheta - 1)/\vartheta$ ;  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$  – обратные преобразования Фурье нагрузок на твердую (1) и жидкую (2) фазы основания соответственно:

$$P_j = \bar{P}_j(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p_j(x) \exp(-i\xi x) dx, \quad j = 1, 2.$$

Для решения и дальнейшего анализа использовались компьютерные символьные преобразования.

Определитель матрицы  $M$  системы (7.73) является функцией Рэлея, описывающей поверхностную волну для слоя с заземленной нижней гранью, и имеет вид

$$\begin{aligned} F_R(\xi) = & \zeta^2 (M_1(\alpha_1((2\xi^4 c_3 \alpha_3(4n_2 \alpha_2 - c_1 c_2 n_1 \alpha_2) - \\ & -(c_1 \alpha_2 \alpha_3(c_2 c_3 \xi_\beta - 8\xi^2) - \xi^2 c_1 s_2 s_3 \xi_\beta) n_r + \\ & + 4\xi^2 \alpha_2 \alpha_3 c_n \xi_\beta + 2\xi^2 c_1 n_1 s_2 s_3 \alpha_2^2 \alpha_3^2) + \alpha_1(2\xi^4 c_3 n_2 s_1 s_2 \alpha_3 - \\ & - 2\xi^2 c_2 n_2 s_1 s_3 \alpha_2 \alpha_3^2))) - M_2 \alpha_2 (n_r (c_2 \alpha_1 \alpha_3 (8\xi^2 - c_1 c_3 \xi_\beta) + \xi^2 c_2 s_1 s_3 \xi_\beta) + \\ & + (4\xi^2 \alpha_1 \alpha_3 \xi_\beta c_n - 8\xi^4 c_3 n_1 \alpha_1 \alpha_3 + 2\xi^2 c_2 n_2 \alpha_1 \alpha_3 (\xi^2 c_1 c_3 - s_1 s_3 \alpha_1 \alpha_3) - \\ & - 2\xi^2 n_1 s_2 \alpha_2 \alpha_3 (\xi^2 c_3 s_1 - c_1 s_3 \alpha_1 \alpha_3)) + M_3 ((-s_3 \xi_\beta (c_1 s_2 \alpha_1 - c_2 s_1 \alpha_2) - \\ & - 8\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (c_1 - c_2)) \xi^2 n_r + 2\xi^4 c_3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (c_1 c_2 - 4)(n_1 + n_2) - \\ & - 2\xi^4 c_3 s_1 s_2 \alpha_3 (n_2 \alpha_1^2 + n_1 \alpha_2^2))). \end{aligned} \quad (7.74)$$

Определитель подобной системы для осесимметричной нагрузки получен в [71, (15)].

Решение системы (7.73) получено в виде

$$F_R(\xi) A_1(\xi) =$$

$$\begin{aligned}
&= P_1 \zeta^2 (M_3 \xi^2 (4\alpha_2 \alpha_3 (c_2 n_2 \alpha_1 - n_1 s_2 \alpha_2) - \kappa_1 (n_2 s_3 \xi_\beta (c_2 \alpha_2 + s_2 \alpha_1) + \\
&\quad + 8n_2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) + 2n_1 s_3 \alpha_2 \xi_\beta) - M_2 (\alpha_2 (4\xi^2 \alpha_3 (c_2 n_2 \alpha_1 - n_1 s_2 \alpha_2) + \\
&\quad + 2\xi^2 n_1 s_3 \xi_\beta) - c_2 n_2 \alpha_2 \kappa_1 \xi_\beta (s_3 \xi^2 + c_3 \alpha_1 \alpha_3)) + \\
&\quad + M_1 n_2 \alpha_1 \kappa_1 (\xi_\beta (\xi^2 s_2 s_3 - c_2 c_3 \alpha_2 \alpha_3) + 8\xi^2 \alpha_2 \alpha_3)) + \\
&\quad + P_2 \vartheta (M_2 \alpha_2 (\kappa_1 (a z (c_2 o_2 (\xi^2 s_3 + c_3 \alpha_1 \alpha_3) - 4\xi^2 \alpha_1 \alpha_3) - \\
&\quad - 2\xi^2 s_2 \alpha_2 \alpha_3 (\xi^2 c_3 + s_3 \alpha_1 \alpha_3)) + \\
&\quad + 4\xi^2 \alpha_3 (c_3 \alpha_1 \xi^2 - c_2 o_2 \alpha_1 + o_1 s_2 \alpha_2) - \\
&\quad - 2\xi^2 o_1 s_3 \xi_\beta) - M_3 \xi^2 (\kappa_1 (s_3 \xi_\beta (c_2 o_2 \alpha_2 + o_2 s_2 \alpha_1) - \\
&\quad - 2\alpha_2 \alpha_3 (\xi^2 c_3 (c_2 \alpha_1 + s_2 \alpha_2) - 4o_2 \alpha_1)) + \\
&\quad + 4\alpha_2 \alpha_3 (c_3 \alpha_1 \xi^2 - c_2 o_2 \alpha_1 + o_1 s_2 \alpha_2) - 2o_1 s_3 \alpha_2 \xi_\beta) + \\
&\quad + M_1 \alpha_1 \kappa_1 (\alpha_2 \alpha_3 (4\xi^2 (2o_2 + \xi_\beta) - c_2 c_3 (2\xi^4 + o_2 \xi_\beta)) + \\
&\quad + \xi^2 s_2 s_3 (2\alpha_2^2 \alpha_3^2 + o_2 \xi_\beta))); \tag{7.75}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_R(\xi) A_2(\xi) &= P_1 \zeta^2 (M_3 \xi^2 (4\alpha_1 \alpha_3 (c_1 n_1 \alpha_2 - n_2 s_1 \alpha_1) - \\
&\quad - \kappa_2 (n_1 s_3 \xi_\beta (c_1 \alpha_1 + s_1 \alpha_2) + 8n_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) + 2n_2 s_3 \alpha_1 \xi_\beta) - \\
&\quad - M_1 (2\xi^2 \alpha_1 (2\alpha_3 (c_1 n_1 \alpha_2 - n_2 s_1 \alpha_1) + n_2 s_3 \xi_\beta) - c_1 n_1 \alpha_1 \kappa_2 \xi_\beta (s_3 \xi^2 + c_3 \alpha_2 \alpha_3)) + \\
&\quad + M_2 n_1 \alpha_2 \kappa_2 (\xi_\beta (\xi^2 s_1 s_3 - c_1 c_3 \alpha_1 \alpha_3) + 8\xi^2 \alpha_1 \alpha_3)) + \\
&\quad + P_2 \vartheta (M_1 a_1 (\kappa_2 (\xi_\beta (c_1 o_1 (s_3 \xi^2 + c_3 a_2 a_3) - 4\xi^2 a_2 a_3) - 2\xi^2 s_1 a_1 a_3 (c_3 \xi^2 + s_3 a_2 a_3)) + \\
&\quad + 4\xi^2 a_3 (c_3 a_2 \xi^2 - c_1 o_1 a_2 + o_2 s_1 a_1) - 2\xi^2 o_2 s_3 \xi_\beta) - M_3 \xi^2 (\kappa_2 (o_1 s_3 \xi_\beta (c_1 a_1 + s_1 a_2) - \\
&\quad - 2a_1 a_3 (\xi^2 c_3 (c_1 a_2 + s_1 a_1) - 4o_1 a_2)) + \\
&\quad + 4a_1 a_3 (c_3 a_2 \xi^2 - c_1 o_1 a_2 + o_2 s_1 a_1) - 2o_2 s_3 a_1 \xi_\beta) + \\
&\quad + M_2 a_2 \kappa_2 (o_1 (\xi_\beta (\xi^2 s_1 s_3 - c_1 c_3 a_1 a_3) + 8\xi^2 a_1 a_3) + \\
&\quad + 4\xi^2 a_1 a_3 \xi_\beta - 2\xi^2 a_1 a_3 (\xi^2 c_1 c_3 - s_1 s_3 a_1 a_3))); \tag{7.76}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_R(\xi) A_3(\xi) &= P_1 \zeta^2 (M_3 \xi^2 (\varepsilon_1 (n_2 s_3 \xi_\beta (c_2 \alpha_2 - s_2 \alpha_1) - 8n_2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) + \\
&\quad + 4\alpha_2 \alpha_3 (c_2 n_2 \alpha_1 + n_1 s_2 \alpha_2) - 2n_1 s_3 \alpha_2 \xi_\beta) - M_2 (\alpha_2 (4\xi^2 \alpha_3 (c_2 n_2 \alpha_1 + n_1 s_2 \alpha_2) - \\
&\quad - 2\xi^2 n_1 s_3 \xi_\beta) + c_2 n_2 \alpha_2 \varepsilon_1 \xi_\beta (\xi^2 s_3 - c_3 \alpha_1 \alpha_3)) + \\
&\quad + M_1 n_2 \alpha_1 \varepsilon_1 (\xi_\beta (\xi^2 s_2 s_3 - c_2 c_3 \alpha_2 \alpha_3) + 8\xi^2 \alpha_2 \alpha_3)) + \\
&\quad + P_2 \vartheta (M_3 \xi^2 (\varepsilon_1 (2\alpha_2 \alpha_3 (\xi^2 c_3 (c_2 \alpha_1 - s_2 \alpha_2) - 4o_2 \alpha_1) + o_2 s_3 \xi_\beta (c_2 \alpha_2 - s_2 \alpha_1)) + \\
&\quad + 4\alpha_2 \alpha_3 (c_2 o_2 \alpha_1 - c_3 \alpha_1 \xi^2 + o_1 s_2 \alpha_2) - 2o_1 s_3 \alpha_2 \xi_\beta) - \\
&\quad - M_2 \alpha_2 (\varepsilon_1 (\xi_\beta (c_2 o_2 (\xi^2 s_3 - c_3 \alpha_1 \alpha_3) + 4\xi^2 \alpha_1 \alpha_3) - 2\xi^2 s_2 \alpha_2 \alpha_3 (\xi^2 c_3 - s_3 \alpha_1 \alpha_3)) + \\
&\quad + 4\xi^2 \alpha_3 (c_2 o_2 \alpha_1 - c_3 \alpha_1 \xi^2 + o_1 s_2 \alpha_2) - 2\xi^2 o_1 s_3 \xi_\beta) + \\
&\quad + M_1 \alpha_1 \varepsilon_1 (\alpha_2 \alpha_3 (4\xi^2 (2o_2 + \xi_\beta) - c_2 c_3 (2\xi^4 + o_2 \xi_\beta)) + \xi^2 s_2 s_3 (2\alpha_2^2 \alpha_3^2 + o_2 \xi_\beta))); \\
&\quad F_R(\xi) A_4(\xi) = P_1 \zeta^2 (M_1 (2\xi^2 \alpha_1 (n_2 s_3 \xi_\beta - 2\alpha_3 (c_1 n_1 \alpha_2 + n_2 s_1 \alpha_1)) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -c_1n_1\alpha_1\varepsilon_2\xi_\beta(\xi^2s_3 - c_3\alpha_2\alpha_3)) + \\
 & + M_3\xi^2(\varepsilon_2(n_1s_3\xi_\beta(c_1\alpha_1 - s_1\alpha_2) - 8n_1\alpha_1\alpha_2\alpha_3) + \\
 & + 4\alpha_1\alpha_3(c_1n_1\alpha_2 + n_2s_1\alpha_1) - 2n_2s_3\alpha_1\xi_\beta) + \\
 & + M_2n_1\alpha_2\varepsilon_2(\xi_\beta(\xi^2s_1s_3 - c_1c_3\alpha_1\alpha_3) + 8\xi^2\alpha_1\alpha_3)) + \\
 & + P_2\vartheta(M_3\xi^2(\varepsilon_2(2\alpha_1\alpha_3(\xi^2c_3(c_1\alpha_2 - s_1\alpha_1) - 4o_1\alpha_2) + o_1s_3\xi_\beta(c_1\alpha_1 - s_1\alpha_2)) + \\
 & + 4\alpha_1\alpha_3(c_1o_1\alpha_2 - c_3\alpha_2\xi^2 + o_2s_1\alpha_1) - 2o_2s_3\alpha_1\xi_\beta) - \\
 & - M_1\alpha_1(\varepsilon_2(\xi_\beta(c_1o_1(\xi^2s_3 - c_3\alpha_2\alpha_3) + 4\xi^2\alpha_2\alpha_3) - 2\xi^2s_1\alpha_1\alpha_3(\xi^2c_3 - s_3\alpha_2\alpha_3)) + \\
 & + 4\xi^2\alpha_3(c_1o_1\alpha_2 - c_3\alpha_2\xi^2 + o_2s_1\alpha_1) - 2\xi^2o_2s_3\xi_\beta) + \\
 & + M_2\alpha_2\varepsilon_2(o_1(\xi_\beta(\xi^2s_1s_3 - c_1c_3\alpha_1\alpha_3) + \\
 & + 8\xi^2\alpha_1\alpha_3) + 4\xi^2\alpha_1\alpha_3\xi_\beta - 2\xi^2\alpha_1\alpha_3(\xi^2c_1c_3 - s_1s_3\alpha_1\alpha_3))); \quad (7.77)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & F_R(\xi)B_1(\xi) = \\
 & = P_1\xi^2(2M_3\xi^3\kappa_3(s_1s_2(n_2\alpha_1^2 + n_1\alpha_2^2) - \alpha_1\alpha_2(c_1c_2 - 4)(n_1 + n_2)) - \\
 & - 2M_2\xi\alpha_2(\kappa_3(4\xi^2n_1\alpha_1 - c_2n_2\alpha_1(c_1\xi^2 + s_1\alpha_1\alpha_3) + \\
 & + n_1s_2\alpha_2(s_1\xi^2 + c_1\alpha_1\alpha_3)) - \alpha_1\xi_\beta c_n) - \\
 & - 2M_1\xi\alpha_1(\kappa_3(4\xi^2n_2\alpha_2 - c_1n_1\alpha_2(c_2\xi^2 + s_2\alpha_2\alpha_3) + \\
 & + n_2s_1\alpha_1(s_2\xi^2 + c_2\alpha_2\alpha_3)) + \alpha_2\xi_\beta c_n)) - \\
 & - P_2\vartheta(2M_2\xi\alpha_2(\kappa_3(4\xi^2o_1\alpha_1 - c_2o_2\alpha_1(c_1\xi^2 + s_1\alpha_1\alpha_3) + o_1s_2\alpha_2(s_1\xi^2 + c_1\alpha_1\alpha_3)) - \\
 & - \alpha_1\xi_\beta c_r + 2\xi^2\alpha_1\alpha_3(s_1\alpha_1 - s_2\alpha_2)) + \\
 & + 2M_1\xi\alpha_1(\kappa_3(4\xi^2o_2\alpha_2 - c_1o_1\alpha_2(c_2\xi^2 + s_2\alpha_2\alpha_3) + o_2s_1\alpha_1(s_2\xi^2 + c_2\alpha_2\alpha_3)) + \\
 & + \alpha_2(\xi_\beta c_r - 2\xi^2\alpha_3(s_1\alpha_1 - s_2\alpha_2))) - 2M_3\xi^3\kappa_3(s_1s_2(o_2\alpha_1^2 + o_1\alpha_2^2) - \\
 & - \alpha_1\alpha_2(c_1c_2 - 4)(o_1 + o_2))); \quad (7.78)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & F_R(\xi)B_2(\xi) = \\
 & = P_1\xi^2(2M_2\xi\alpha_2(\varepsilon_3(4\xi^2n_1\alpha_1 - c_2n_2\alpha_1(\xi^2c_1 - s_1\alpha_1\alpha_3) + \\
 & + n_1s_2\alpha_2(\xi^2s_1 - c_1\alpha_1\alpha_3)) - \alpha_1\xi_\beta c_n) - \\
 & - 2M_3\xi^3\varepsilon_3(s_1s_2(n_2\alpha_1^2 + n_1\alpha_2^2) - \alpha_1\alpha_2(c_1c_2 - 4)(n_1 + n_2)) + \\
 & + 2M_1\xi\alpha_1(\varepsilon_3(4\xi^2n_2\alpha_2 - c_1n_1\alpha_2(\xi^2c_2 - s_2\alpha_2\alpha_3) + \\
 & + n_2s_1\alpha_1(\xi^2s_2 - c_2\alpha_2\alpha_3)) + \alpha_2\xi_\beta c_n)) + \\
 & + P_2\vartheta(2M_1\xi\alpha_1(\varepsilon_3(4\xi^2o_2\alpha_2 - c_1o_1\alpha_2(\xi^2c_2 - s_2\alpha_2\alpha_3) + \\
 & + o_2s_1\alpha_1(\xi^2s_2 - c_2\alpha_2\alpha_3)) + \\
 & + \alpha_2(2\alpha_3(s_1\alpha_1 - s_2\alpha_2)\xi^2 + \xi_\beta c_r)) - 2M_2\xi\alpha_2(\alpha_1\xi_\beta c_r - \\
 & - \varepsilon_3(\alpha_1(4\xi^2o_1 - c_2o_2(c_1\xi^2 - s_1\alpha_1\alpha_3)) + o_1s_2\alpha_2(s_1\xi^2 - c_1\alpha_1\alpha_3)) + \\
 & + 2\xi^2\alpha_1\alpha_3(s_1\alpha_1 - s_2\alpha_2)) - 2M_3\xi^3\varepsilon_3(s_1s_2(o_2\alpha_1^2 + o_1\alpha_2^2) -
 \end{aligned}$$

$$- \alpha_1 \alpha_2 (c_1 c_2 - 4)(o_1 + o_2)), \quad (7.79)$$

где  $n_r = n_1 o_2 - n_2 o_1$ ;  $c_n = c_1 n_1 - c_2 n_2$ ;  $c_r = c_1 o_1 - c_2 o_2$ ;  $\xi_\beta = 2\xi^2 - \zeta^2 \beta_3^2$ .

Отсюда трансформанты Фурье перемещений границы основания под непроницаемым штампом определены по формулам из (7.66) и (7.67):

– твердой фазы

$$w_s = \{\alpha_1 [A_1(\xi) - A_3(\xi)] + \alpha_2 [A_2(\xi) - A_4(\xi)] + \xi [B_1(\xi) + B_2(\xi)]\} / F_R(\xi);$$

– поровой жидкости

$$w_f = \{M_1 \alpha_1 [A_1(\xi) - A_3(\xi)] + M_2 \alpha_2 [A_2(\xi) - A_4(\xi)] + M_3 \xi [B_1(\xi) + B_2(\xi)]\} / F_R(\xi).$$

Полученные выражения учитывают все волновые процессы в рассматриваемой слоистой ПУНЖ среде, включая поверхностную волну и нормальные моды [12, 81].

### 7.3.2 Решение динамической контактной задачи

Решение основной задачи методом ортогональных полиномов в [266, § 3.4] сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов рядов функций  $r_i$ ,  $i = 1, 2$ , которые определены на отрезке  $x \in [-1, 1]$ , являются нечетными и обращаются в нуль при  $x = \pm 1$  и связанных с неизвестными эффективными напряжениями и поровым давлением интегродифференциальными соотношениями ( $q_j$ ,  $j = 1, 2$ )

$$r_1(x) = \int_0^x q_1(z) dz - t_1 x \quad \text{и} \quad r_2(x) = q_2'(x) - t_2 x,$$

где  $t_1$  и  $t_2$  – неизвестные постоянные:

$$t_1 = \int_0^1 q_1(x) dx \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 q_1(x) dx, \quad t_2 = q_2'(1) \equiv -q_2'(1).$$

Функции  $r_i$  представляем в виде

$$r_j(x) = -\frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k R_{j,2k} U_{2k-1}(x), \quad j = 1, 2, \quad (7.80)$$

где  $U_L(x)$  – полиномы Чебышева 2-го рода;  $R_{j,2k}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $k = 1, 2, \dots$  – неизвестные постоянные.

Для определения неизвестных коэффициентов  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $\mathcal{X}_{2k}$ ,  $\mathcal{Y}_{2k}$  в [266] получена бесконечная система линейных алгебраических уравнений

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} k \mathcal{X}_{2k} \int_0^{\infty} \frac{K_{11}^{(0)}(\xi)}{\xi} J_{2k}(\xi) J_0(\xi) d\xi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \mathcal{Y}_{2k} \int_0^{\infty} \frac{K_{12}^{(0)}(\xi)}{\xi} J_{2k}(\xi) J_0(\xi) d\xi +$$

$$+ t_1 \int_0^{\infty} K_{11}(\xi) s_s(\xi) J_0(\xi) d\xi + t_2 \int_0^{\infty} K_{12}(\xi) s_c(\xi) J_0(\xi) d\xi = 0, \quad (7.81)$$

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} k \mathcal{X}_{2k} \int_0^{\infty} \frac{K_{21}^{(0)}(\xi)}{\xi} J_{2k}(\xi) J_0(\xi) d\xi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \mathcal{Y}_{2k} \int_0^{\infty} \frac{K_{22}^{(0)}(\xi)}{\xi} J_{2k}(\xi) J_0(\xi) d\xi +$$

$$+ t_1 \int_0^{\infty} K_{21}(\xi) s_s(\xi) J_0(\xi) d\xi + t_2 \int_0^{\infty} K_{22}(\xi) s_c(\xi) J_0(\xi) d\xi = \pi W_0, \quad (7.82)$$

$$A_{11} \mathcal{X}_{2n} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} k \mathcal{X}_{2k} \int_0^{\infty} K_{11}^{(0)}(\xi) \xi^{-1} J_{2k}(\xi) J_{2n}(\xi) d\xi -$$

$$- A_{12} \mathcal{Y}_{2n} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} k \mathcal{Y}_{2k} \int_0^{\infty} K_{12}^{(0)}(\xi) \xi^{-1} J_{2k}(\xi) J_{2n}(\xi) d\xi +$$

$$+ 2 t_1 \int_0^{\infty} K_{11}(\xi) s_s(\xi) J_{2n}(\xi) d\xi +$$

$$+ 2 t_2 \int_0^{\infty} s_c(\xi) J_{2n}(\xi) d\xi = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7.83)$$

$$A_{21} \mathcal{X}_{2n} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} k \mathcal{X}_{2k} \int_0^{\infty} K_{21}^{(0)}(\xi) \xi^{-1} J_{2k}(\xi) J_{2n}(\xi) d\xi -$$

$$- 4 \sum_{k=1}^{\infty} k \mathcal{Y}_{2k} \int_0^{\infty} K_{22}^{(0)}(\xi) \xi^{-1} J_{2k}(\xi) J_{2n}(\xi) d\xi + 2 t_1 \int_0^{\infty} K_{21}(\xi) s_s(\xi) J_{2n}(\xi) d\xi +$$

$$+ 2 t_2 \int_0^{\infty} K_{22}(\xi) s_c(\xi) J_{2n}(\xi) d\xi = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7.84)$$

где  $s_s(\xi) = \sin(\xi)/\xi$ ;  $s_c(\xi) = [\xi \cos(\xi) - \sin(\xi)]/\xi^3$ . Отметим, что первые два уравнения (7.81), (7.82) системы фактически являются замыкающими уравнениями и заменяют условия ортогональности [33], выполнение которых необходимо для того, чтобы искомые функции  $r_1(x)$ ,  $r_2(x)$  не имели особенностей

при  $x \rightarrow 1$ , т. е. чтобы для них были справедливы дальнейшие представления (7.80).

Для нормированных контактных напряжений и их равнодействующих  $R_s$   $R_f$  имеем выражения

$$q_1(x) = t_1 + \frac{4}{\pi\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k \mathcal{X}_{2k} T_{2k}(x), \quad (7.85)$$

$$q_2(x) = t_2 \frac{x^2 - 1}{2} - \quad (7.86)$$

$$- \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathcal{Y}_{2k}}{4k^2 - 1} [(2k-1) U_{2k}(x) - (2k+1) U_{2k-2}(x)], \quad |x| < 1,$$

$$R_s = 2 \int_0^1 q_1(x) dx = 2 t_1, \quad (7.87)$$

$$R_f = 2 \int_0^1 q_2(x) dx = -\frac{2}{3} t_2 + \frac{1}{6} \mathcal{Y}_2. \quad (7.88)$$

С учетом разложений (7.80) получаем после замены переменной  $\xi = \zeta\eta$  для определения неизвестных коэффициентов  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $\mathcal{X}_{2k}$ ,  $\mathcal{Y}_{2k}$  бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & t_1 \int_0^{\infty} K_{11}(\eta) s_s(\zeta\eta) J_0(\zeta\eta) d\eta + \\ & + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \mathcal{X}_{2k} \int_0^{\infty} K_{11}^{(0)}(\eta) \eta^{-1} J_{2k}(\zeta\eta) J_0(\zeta\eta) d\eta + \\ & + t_2 \int_0^{\infty} K_{12}(\eta) s_c(\zeta\eta) J_0(\zeta\eta) d\eta + \end{aligned} \quad (7.89)$$

$$\begin{aligned} & + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \mathcal{Y}_{2k} \int_0^{\infty} K_{12}^{(0)}(\eta) \eta^{-1} J_{2k}(\zeta\eta) J_0(\zeta\eta) d\eta = 0; \\ & t_1 \int_0^{\infty} K_{21}(\eta) s_s(\zeta\eta) J_0(\zeta\eta) d\eta + \\ & + 2 \sum_{k=1}^{\infty} k \mathcal{X}_{2k} \int_0^{\infty} K_{21}^{(0)}(\eta) \eta^{-1} J_{2k}(\zeta\eta) J_0(\zeta\eta) d\eta + \end{aligned} \quad (7.90)$$



$$\begin{aligned}
 & + t_2 \int_0^\infty K_{22}(\eta) s_c(\zeta\eta) J_0(\zeta\eta) d\eta + \\
 & + 2 \sum_{k=1}^\infty k \mathcal{Y}_{2k} \int_0^\infty K_{22}^{(0)}(\eta) \eta^{-1} J_{2k}(\zeta\eta) J_0(\zeta\eta) d\eta = F; \\
 & 2 t_1 \int_0^\infty K_{11}(\eta) s_s(\zeta\eta) J_{2n}(\zeta\eta) d\eta + A_{11} \mathcal{X}_{2n} + \\
 & + 4 \sum_{k=1}^\infty k \mathcal{X}_{2k} \int_0^\infty \frac{K_{11}^{(0)}(\eta)}{\eta} J_{2k}(\zeta\eta) J_{2n}(\zeta\eta) d\eta + \\
 & + 2 t_2 \int_0^\infty K_{12}(\eta) s_c(\zeta\eta) J_{2n}(\zeta\eta) d\eta - \tag{7.91}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 4 \sum_{k=1}^\infty k \mathcal{Y}_{2k} \int_0^\infty \frac{K_{12}^{(0)}(\eta)}{\eta} J_{2k}(\zeta\eta) J_{2n}(\zeta\eta) d\eta = 0; \\
 & 2 t_1 \int_0^\infty K_{21}(\eta) s_s(\zeta\eta) J_{2n}(\zeta\eta) d\eta + A_{21} \mathcal{X}_{2n} + \\
 & + 4 \sum_{k=1}^\infty k \mathcal{X}_{2k} \int_0^\infty \frac{K_{21}^{(0)}(\eta)}{\eta} J_{2k}(\zeta\eta) J_{2n}(\zeta\eta) d\eta + \\
 & + 2 t_2 \int_0^\infty K_{22}(\eta) s_c(\zeta\eta) J_{2n}(\zeta\eta) d\eta - \tag{7.92}
 \end{aligned}$$

$$- 4 \sum_{k=1}^\infty k \mathcal{Y}_{2k} \int_0^\infty K_{22}^{(0)}(\eta) \eta^{-1} J_{2k}(\zeta\eta) J_{2n}(\zeta\eta) d\eta = 0; \quad n = 1, 2, \dots \infty.$$

Здесь для силовой нагрузки  $F = [R_0 - P/(a\mu)]/(m_0\zeta^2)$ , а для кинематической  $F = \pi W$  (когда задана амплитуда перемещения штампа, а реакция представляет собой механический импеданс, или обратную передаточную функцию);  $m_0 = 2h\rho/\{\pi a[\rho_s(1-\vartheta) + \rho_f\vartheta]\}$  – безразмерная масса;  $\rho$  – плотность материала штампа. Суммой

$$R_0 = R_s + R_f \tag{7.93}$$

определяется общая реакция основания. Перемещения штампа находим по формуле

$$w = (1 - R_0)/(\pi\mu\zeta^2 m_0). \tag{7.94}$$

В ядра  $K_{ij}(\eta)$ ,  $i, j = 1, 2$  подынтегральных выражений коэффициентов этой системы входят функции

$$\begin{aligned}\zeta F_R(\eta) K_{11}(\eta) &= \beta_3^2 F_1(\eta) + F_3(\eta); \quad \zeta F_R(\eta) K_{21}(\eta) = \beta_3^2 F_1(\eta); \\ \zeta F_R(\eta) K_{12}(\eta) &= \beta_3^2 [\vartheta F_2(\eta) + (1 - \vartheta)F_1(\eta)] - [\vartheta F_4(\eta) + (1 - \vartheta)F_3(\eta)]; \\ \zeta F_R(\eta) K_{22}(\eta) &= \beta_3^2 [(1 - \vartheta)F_1(\eta) + \vartheta F_2(\eta)]; \\ K_{11}^{(0)}(\eta) &= \zeta \eta K_{11}(\eta) - A_{11}, \quad K_{12}^{(0)}(\eta) = (\zeta \eta)^{-1} K_{12}(\eta) - A_{12}, \\ K_{21}^{(0)}(\eta) &= \zeta \eta K_{21}(\eta) - A_{21}, \quad K_{22}^{(0)}(\eta) = (\zeta \eta)^{-1} K_{22}(\eta).\end{aligned}$$

Выражения для функций следующие:

$$\begin{aligned}F_R(\xi) &= \zeta^2 (M_1(\alpha_1((2\xi^4 c_3 \alpha_3(4n_2 \alpha_2 - c_1 c_2 n_1 \alpha_2) - \\ &\quad - (c_1 \alpha_2 \alpha_3(c_2 c_3 \xi_\beta - 8\xi^2) - \xi^2 c_1 s_2 s_3 \xi_\beta) n_r + \\ &\quad + 4\xi^2 \alpha_2 \alpha_3 c_n \xi_\beta + 2\xi^2 c_1 n_1 s_2 s_3 \alpha_2^2 \alpha_3^2) + \\ &\quad + \alpha_1(2\xi^4 c_3 n_2 s_1 s_2 \alpha_3 - 2\xi^2 c_2 n_2 s_1 s_3 \alpha_2 \alpha_3^2))) - \\ &\quad - M_2 \alpha_2 (n_r (c_2 \alpha_1 \alpha_3 (8\xi^2 - c_1 c_3 \xi_\beta) + \xi^2 c_2 s_1 s_3 \xi_\beta) + \\ &\quad + (4\xi^2 \alpha_1 \alpha_3 \xi_\beta c_n - 8\xi^4 c_3 n_1 \alpha_1 \alpha_3 + 2\xi^2 c_2 n_2 \alpha_1 \alpha_3 (\xi^2 c_1 c_3 - s_1 s_3 \alpha_1 \alpha_3) - \\ &\quad - 2\xi^2 n_1 s_2 \alpha_2 \alpha_3 (\xi^2 c_3 s_1 - c_1 s_3 \alpha_1 \alpha_3)) + M_3((-s_3 \xi_\beta (c_1 s_2 \alpha_1 - c_2 s_1 \alpha_2) - \\ &\quad - 8 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (c_1 - c_2)) \xi^2 n_r + 2\xi^4 c_3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (c_1 c_2 - 4)(n_1 + n_2) - \\ &\quad - 2\xi^4 c_3 s_1 s_2 \alpha_3 (n_2 \alpha_1^2 + n_1 \alpha_2^2))); \quad (7.95)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_1(\eta) &= \eta^2 s_3 [d_1 M_{13}(d_2(4n_2 - n_1 c_1 c_2) + n_2 s_1 s_2 d_1) + \\ &\quad + d_2 M_{23}(d_1(4n_2 - n_2 c_1 c_2) + n_1 s_1 s_2 d_2)] + \\ &\quad + c_3 d_q M_{12}(n_1 c_1 s_2 d_2 - n_2 c_2 s_1 d_1); \quad (7.96)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_2(\eta) &= M_{12}(d_1 d_2 d_3 (4\eta^2 (s_1 d_1 - s_2 d_2) + c_3 (-c_1 m_1 s_2 d_2 + c_2 m_2 s_1 d_1 - \\ &\quad - \eta^2 (c_2 s_1 d_1 - c_1 s_2 d_2)))) + \eta^2 s_3 (M_{13} d_1 (c_1 c_2 d_2 \eta_1 - (4d_2 + s_1 s_2 d_1) \eta_2) - \\ &\quad - M_{23} d_2 ((4d_1 + s_1 s_2 d_2) \eta_1 - c_1 c_2 d_1 \eta_2)); \quad (7.97)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_3(\eta) &= M_{23}(\eta^2 \eta_\beta s_3 d_2 (M_1 d_1 (4n_1 - n_2 c_1 c_2) + M_2 n_1 s_1 s_2 d_2) + \\ &\quad + 2M_3 \eta^4 s_3 d_2 (d_1 (4n_1 - n_2 c_1 c_2) + n_1 s_1 s_2 d_2)) + \\ &\quad + M_{13}(\eta^2 \eta_\beta s_3 d_1 (M_2 d_2 (4n_2 - n_1 c_1 c_2) + M_1 n_2 s_1 s_2 d_1) + \\ &\quad + 2M_3 \eta^4 s_3 d_1 (d_2 (4n_2 - n_1 c_1 c_2) + n_2 s_1 s_2 d_1)) + \\ &\quad + M_{12} d_q (-\eta_\beta c_3 (M_1 n_2 c_2 s_1 d_1 - M_2 n_1 c_1 s_2 d_2) + \\ &\quad + 2M_3 \eta^2 c_3 (n_1 c_1 s_2 d_2 - n_2 c_2 s_1 d_1) - 8\eta^2 (n_2 s_1 d_1 M_{13} + n_1 s_2 d_2 M_{23})); \quad (7.98)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_4(\eta) &= -2\eta^2 d_q^2 s_1 s_2 s_3 M_{12}^2 + (d_q (2\eta^2 (4\eta^2 M_3 (d_1 s_1 - d_2 s_2) + \\ &\quad + (2\eta_\beta (M_1 d_1 s_1 - M_2 d_2 s_2) - M_3 c_3 (c_1 d_2 s_2 \eta_1 - c_2 d_1 s_1 \eta_2))) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + c_3 \eta_\beta (M_1 c_2 d_1 s_1 \eta_2 - M_2 c_1 d_2 s_2 \eta_1) + \\
 & + 2 \eta^2 d_q (d_1 s_1 M_{13} (c_2 c_3 \eta^2 + 4 \eta_2) - d_2 s_2 M_{23} (c_1 c_3 \eta^2 + 4 \eta_1)) M_{12} - \\
 & - (M_{13} s_3 d_1 \eta^2 (2 M_3 \eta^2 (\eta_2 (4 d_2 + d_1 s_1 s_2) - c_1 c_2 d_2 \eta_1) + \\
 & + \eta_\beta (\eta_2 (4 M_2 d_2 + M_1 d_1 s_1 s_2) - M_2 c_1 c_2 d_2 \eta_1)) + \\
 & + M_{23} \eta^2 s_3 d_2 (2 M_3 \eta^2 (\eta_1 (4 d_1 + d_2 s_1 s_2) - c_1 c_2 d_1 \eta_2) + \\
 & + \eta_\beta (\eta_1 (4 M_1 d_1 + M_2 d_2 s_1 s_2) - M_1 c_1 c_2 d_1 \eta_2))), \quad (7.99)
 \end{aligned}$$

где  $\eta_\beta = - (2\eta^2 - \beta_3^2)$ ;  $n_m = n_1 (m_2 - \eta^2) - n_2 (m_1 - \eta^2)$ ;

$$\eta_1 = m_1 - \eta^2; \quad \eta_2 = m_2 - \eta^2;$$

$$d_i = \sqrt{\eta^2 - \beta_i^2}, \quad i = 1, 2, 3; \quad d_q = d_1 d_2 d_3;$$

$$n_r = n_1 o_2 - n_2 o_1; \quad c_n = c_1 n_1 - c_2 n_2; \quad c_r = c_1 o_1 - c_2 o_2;$$

$$M_{12} = M_1 - M_2; \quad M_{13} = M_1 - M_3; \quad M_{23} = M_2 - M_3.$$

Определены асимптотики функций (7.95)–(7.99) при  $\eta \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} F_R(\eta) = \eta^3 C_R \beta_M;$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} F_1(\eta) = \eta^2 C_1 \beta_M / 4; \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} F_2(\eta) = \eta^2 C_2 \beta_M; \quad (7.100)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} F_3(\eta) = 0; \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} F_4(\eta) = -\eta^3 C_4 \beta_M / 2,$$

где

$$\beta_M = M_1 (\beta_2^2 + \beta_3^2) - M_2 (\beta_1^2 + \beta_3^2) + M_3 (\beta_1^2 - \beta_2^2); \quad (7.101)$$

$$C_R = 4 [n_2 (m_1 - \beta_1^2 / 2) - n_1 (m_2 - \beta_2^2 / 2)]; \quad C_1 = n_1 - n_2;$$

$$C_2 = (m_2 - \beta_2^2 / 2) - (m_1 - \beta_1^2 / 2); \quad C_3 = 2 [n_2 (M_{13}) - n_1 (M_{23})]; \quad (7.102)$$

$$C_4 = 2 [M_{23} (m_1 - \beta_1^2 / 2) - M_{13} (m_2 - \beta_2^2 / 2)];$$

$$A_{11} = (\beta_3^2 C_1 - C_3) / C_R; \quad A_{12} = -\vartheta C_4 / C_R;$$

$$A_{21} = \beta_3^2 C_1 / C_R; \quad A_{22} = \beta_3^2 [\vartheta C_2 - (1 - \vartheta) C_3] / C_R. \quad (7.103)$$

Асимптотики получены по методике работы [266, п. 3.1.4] после вынесения из функций  $F_R(\eta)$  и  $F_j(\eta)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  сомножителя  $s_1 s_2 s_3$  с учетом асимптотических равенств  $s_j = c_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  при  $\eta \rightarrow \infty$ ,  $\zeta > 0$ ,  $H > 0$ . Асимптотики (7.100) отличаются от соответствующих асимптотических выражений для ПУНЖ полуплоскости [266] множителем (7.101).

Точность числового результата определяется максимальным значением числа  $k$  в (7.80) и точностью оценки интегралов в коэффициентах системы (7.89)–(7.92). Тестовые расчеты проведены при значениях  $k$  от 3 до 8, результаты изменяются незначительно уже при  $k \geq 5$ . Далее приводятся числовые результаты, полученные при удержании 5 членов рядов в (7.80).

### 7.3.3 Импеданс и реакция слоя

Выполнены расчеты для ПУНЖ слоя в условиях плоской деформации со следующими параметрами [368]: пористостью  $\vartheta = 0,48$ , плотностями  $\rho_s = 2670 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_f = 990 \text{ кг/м}^3$ , модулем сдвига твердой фазы  $\mu = 9,8 \cdot 10^7 \text{ Па}$  и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Переменными являются: высота слоя  $H = \bar{H}/a = 2,4,8$  ( $a = 1 \text{ м}$  и  $a = 10 \text{ м}$ ); для коэффициента фильтрации рассмотрены значения  $k_f = 0,000254 \text{ м/с}$  и  $k_f = 0,00254 \text{ м/с}$ .

На рис. 7.14 – 7.19 показана функция импеданса основания (реакции основания при гармонических колебаниях невесомого штампа с единичной амплитудой перемещения)  $|Z_0|$ ,  $\text{Re}Z_0$ ,  $\text{Im}Z_0$  и составляющие импеданса для твердой ( $|Z_s|$ ,  $\text{Re}Z_s$ ,  $\text{Im}Z_s$ ) и жидкой ( $|Z_f|$ ,  $\text{Re}Z_f$ ,  $\text{Im}Z_f$ ) фаз – графики  $a) - \text{в}$ ) соответственно. В рассматриваемом диапазоне частот  $\zeta < 9,389$  изменение скорости первой продольной волны (параметра  $\beta_1$ ) незначительно. На представленных графических иллюстрациях деление оси  $\zeta$  выполнено с учетом резонансных частот, на которых в слое зарождаются нормальные моды

$$\zeta_K = \pi(K + 1/2)/(H\beta_1), \quad K = 0, 1, 2, \dots$$

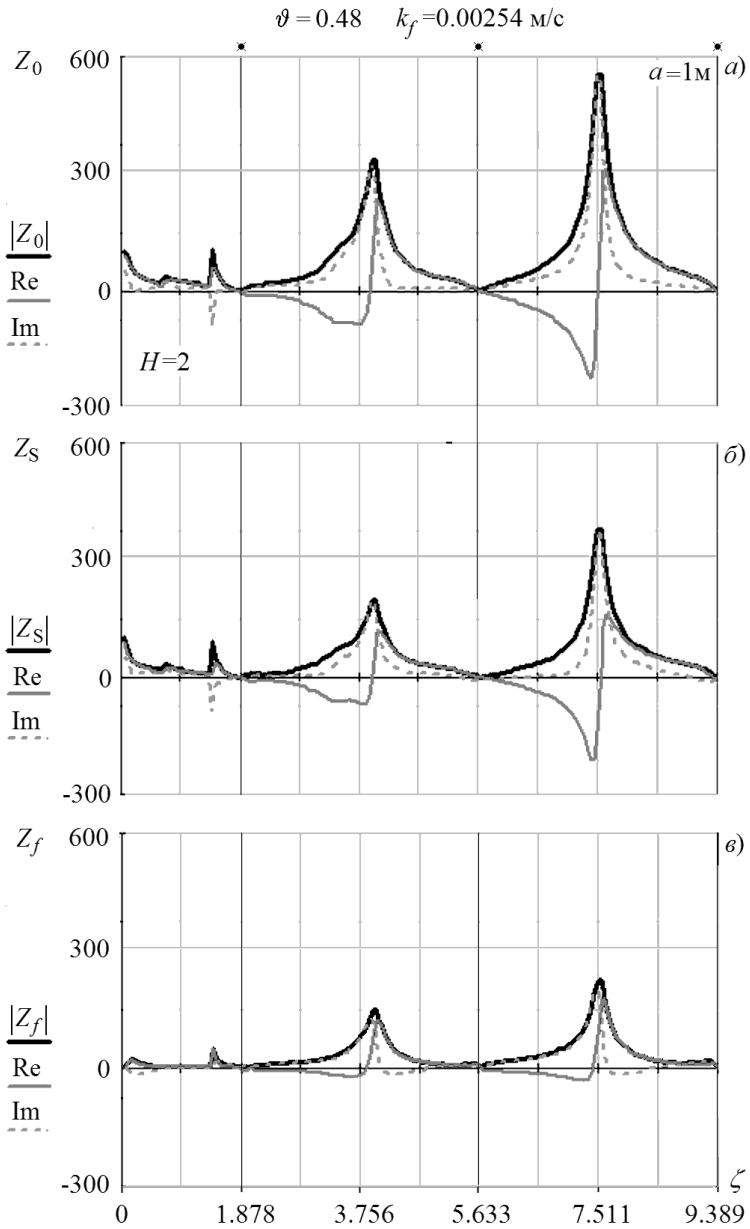
При этом, согласно [12], перемещения поверхности слоя резко увеличиваются, а реакция уменьшается до 0. Шаг делений на оси  $\zeta$  принят равным  $\pi/(2H\beta_1)$ , частоты  $\zeta_K$  обозначены метками над графиками  $a)$ .

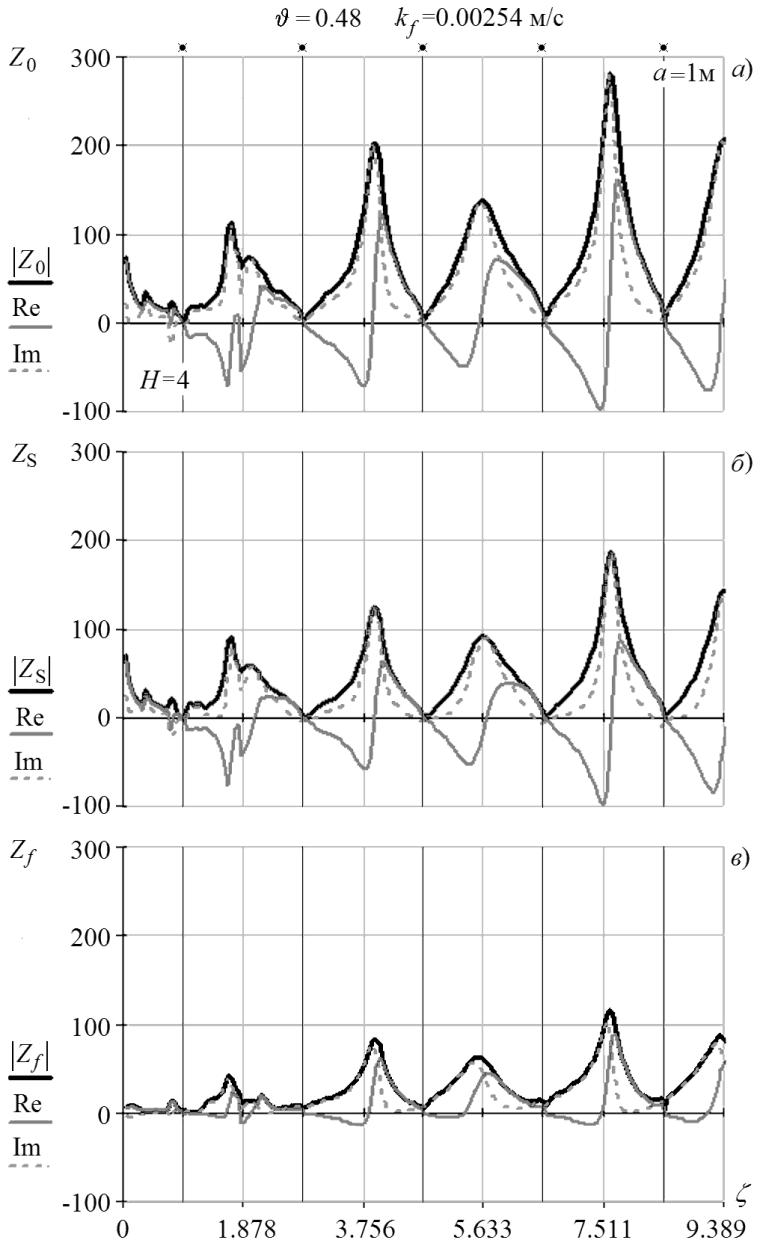
На рис. 7.20 – 7.22 показано изменение с частотой теоретического коэффициента динамичности для реакции основания  $R_0$  относительно действующей на штамп вертикальной силы  $P$ , т. е. реакцию основания  $|R_0|$ ,  $\text{Re}R_0$ ,  $\text{Im}R_0$  и реакции твердой ( $|R_s|$ ,  $\text{Re}R_s$ ,  $\text{Im}R_s$ ) и жидкой ( $|R_f|$ ,  $\text{Re}R_f$ ,  $\text{Im}R_f$ ) фаз – графики  $a) - \text{в}$ ) соответственно. Инерционная характеристика взаимодействия штампа и основания  $m_0$  вычисляется при  $h = 1 \text{ м}$  и  $\rho = 2400 \text{ кг/м}^3$ .

Влияние второй продольной волны пренебрежимо мало. Для слоистого ПУНЖ основания зависимость реакции от частоты усложняется относительно реакций упругой полуплоскости [233, 238]. Кроме максимума, обусловленного инерционным взаимодействием, возникают резонансные максимумы на наборе частот, меньших соответствующих частот загибания слоя как волновода. Амплитуды реакции увеличиваются с уменьшением толщины слоя. Вклад реакции жидкой фазы незначительно увеличивается с возрастанием частоты.

Как показывают результаты расчетов, при увеличении коэффициента фильтрации (сравниваем рис. 7.17 и рис. 7.19 для импеданса и рис. 7.20 и рис. 7.21 для массивного штампа) реакция слоя, ее составляющая от поровой жидкости и степень взаимодействия фаз снижаются.

При расчетах оценивается также теоретическое распределение контактных эффективных напряжений и порового давления.

Рис. 7.14. Импеданс при  $H = 2$ ,  $k_f = 0,00254 \text{ м/с}$



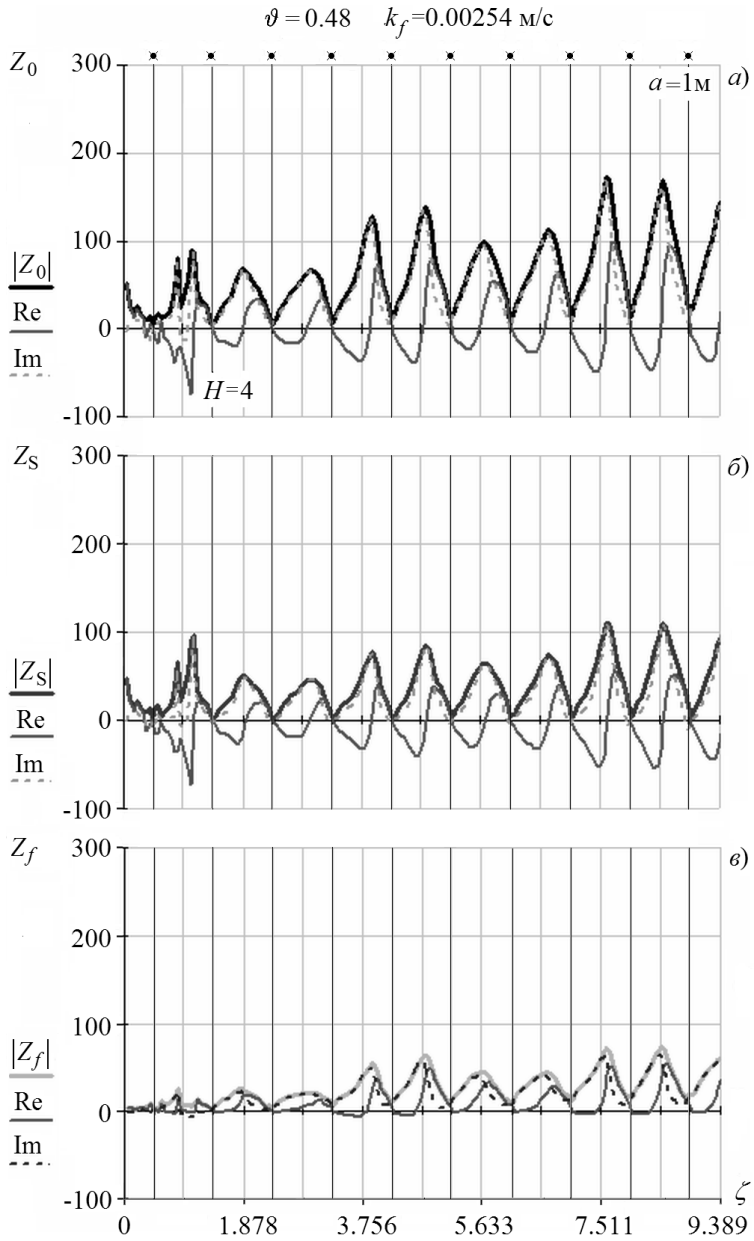


Рис. 7.16. Импеданс при  $H = 8$ ,  $k_f = 0,00254 \text{ м/с}$

$$\vartheta = 0.48 \quad k_f = 0.00254 \text{ м/с}$$

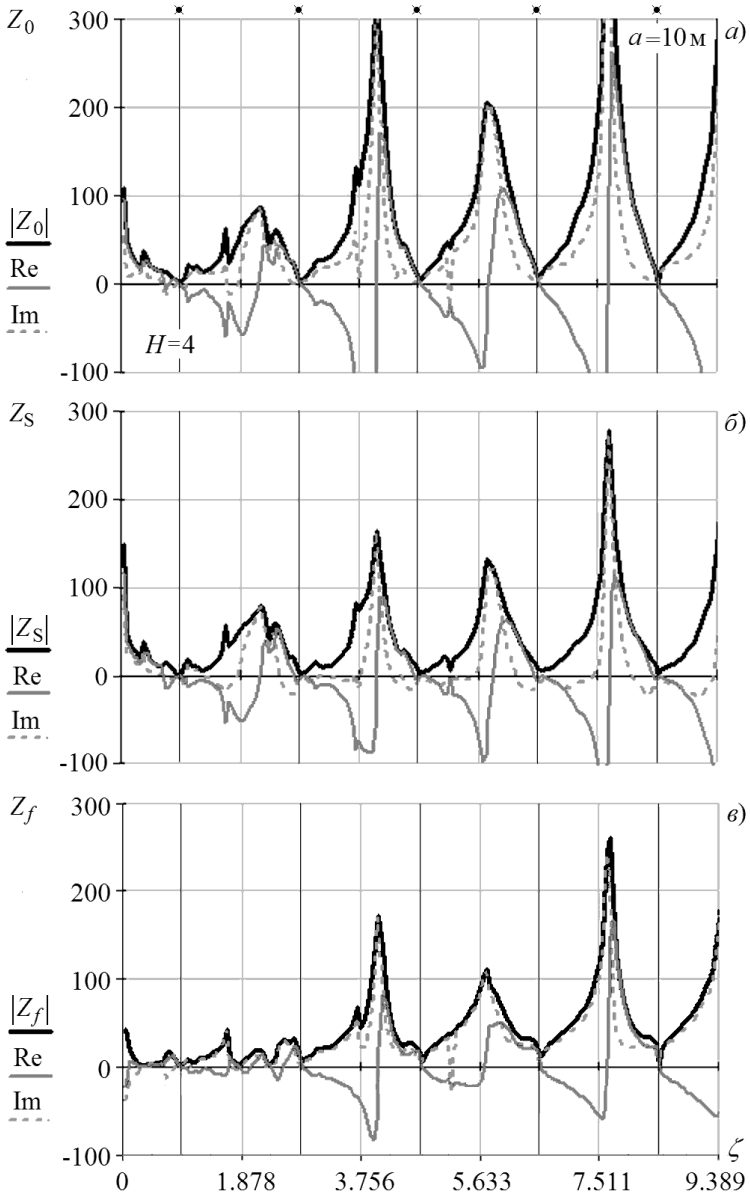


Рис. 7.17. Импеданс при  $H = 4$ ,  $k_f = 0,00254$  м/с,  $a = 10$  м



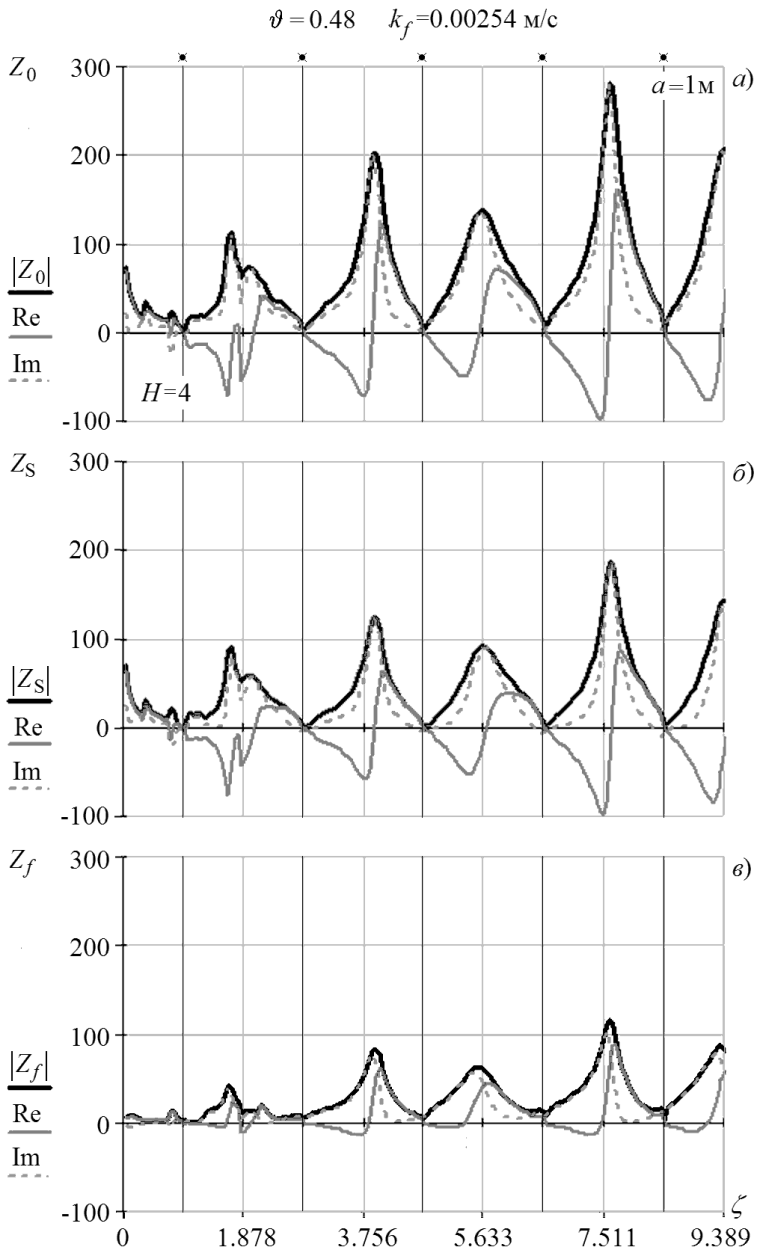


Рис. 7.18. Импеданс при  $H = 4$ ,  $k_f = 0,00254 \text{ м/с}$

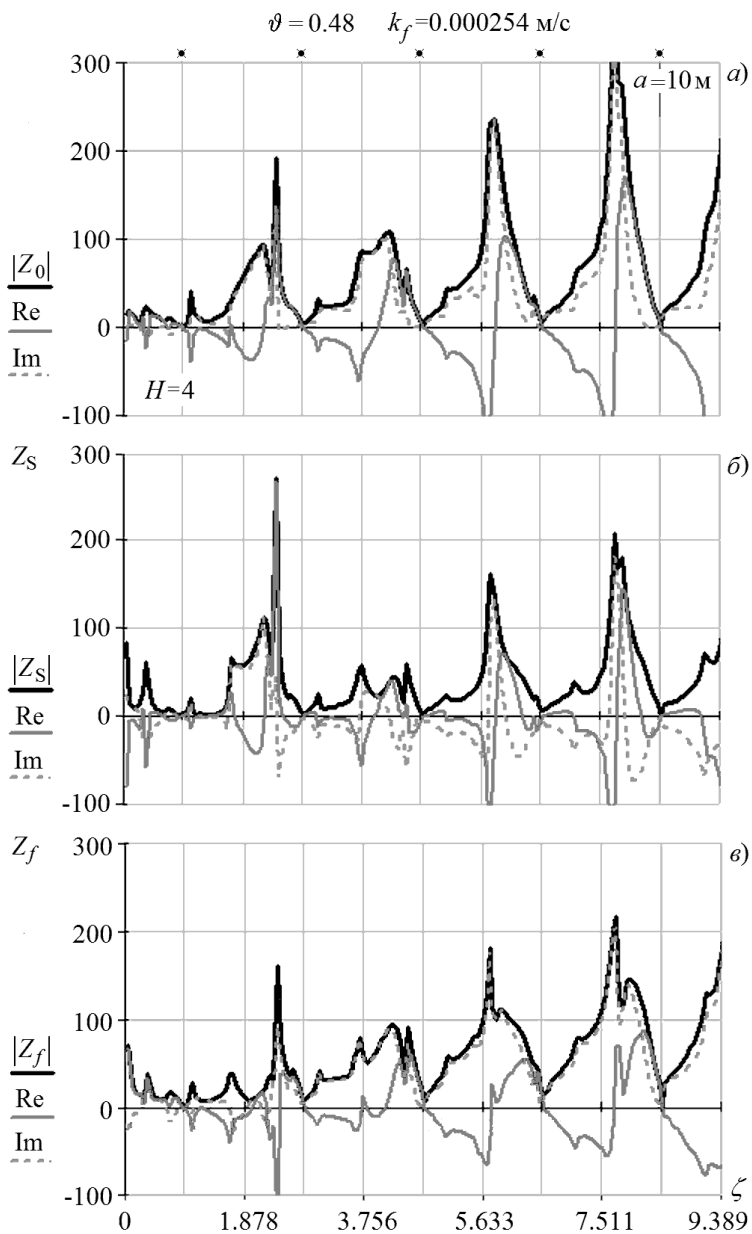


Рис. 7.19. Импеданс при  $H = 4$ ,  $k_f = 0,000254 \text{ м/с}$ ,  $a = 10 \text{ м}$

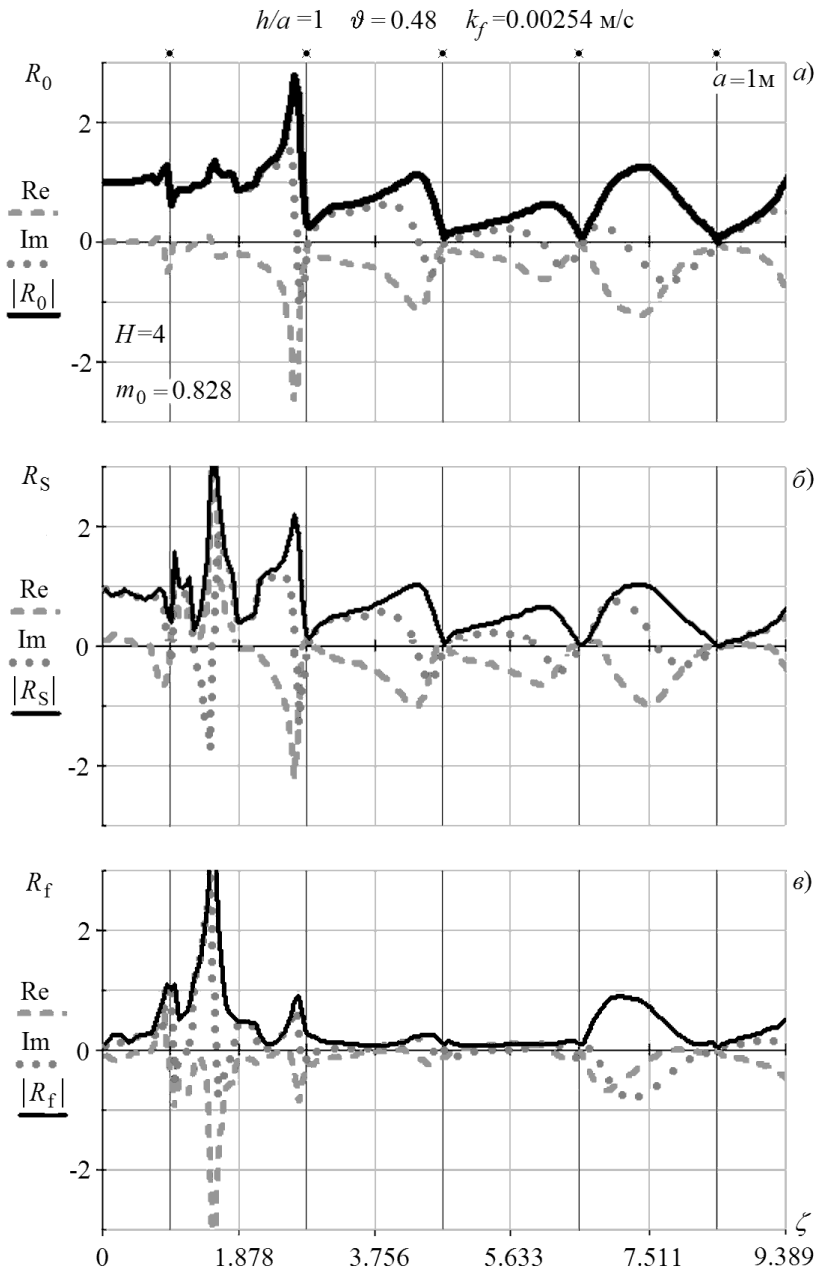


Рис. 7.20. Реакция при  $H = 4$ ,  $h = 1 \text{ м}$ ,  $a = 1 \text{ м}$

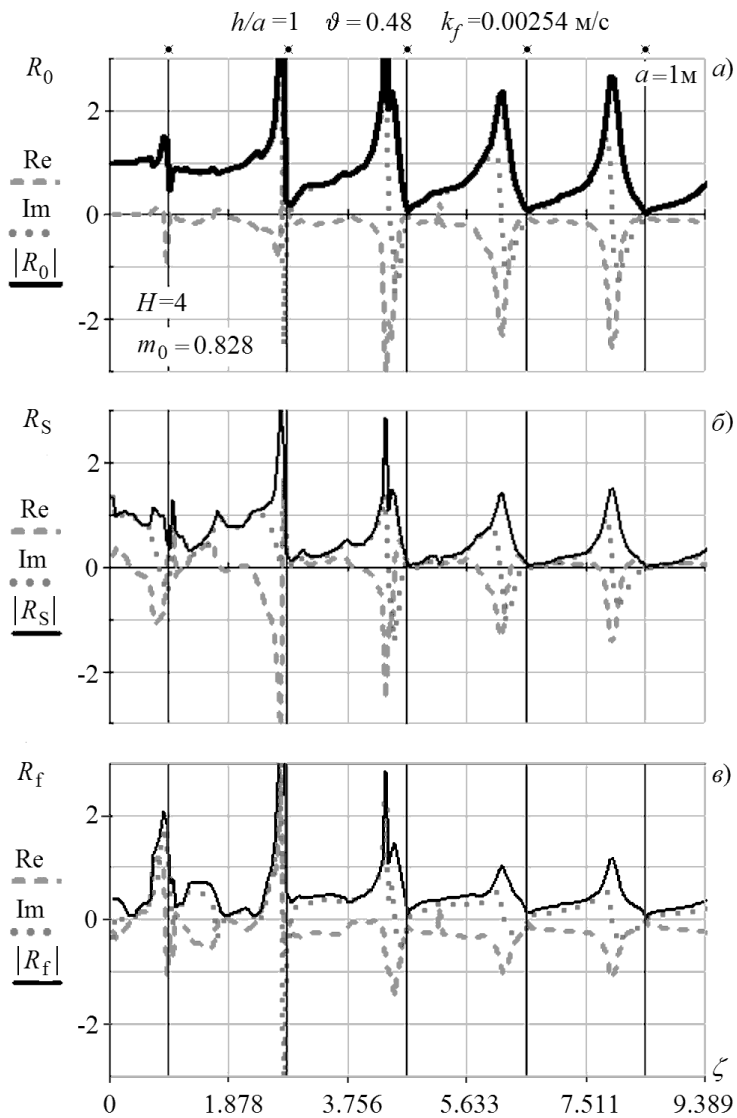


Рис. 7.21. Реакция при  $H = 4$ ,  $h = 1 \text{ м}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ ,  $k_f = 0,00254 \text{ м/с}$

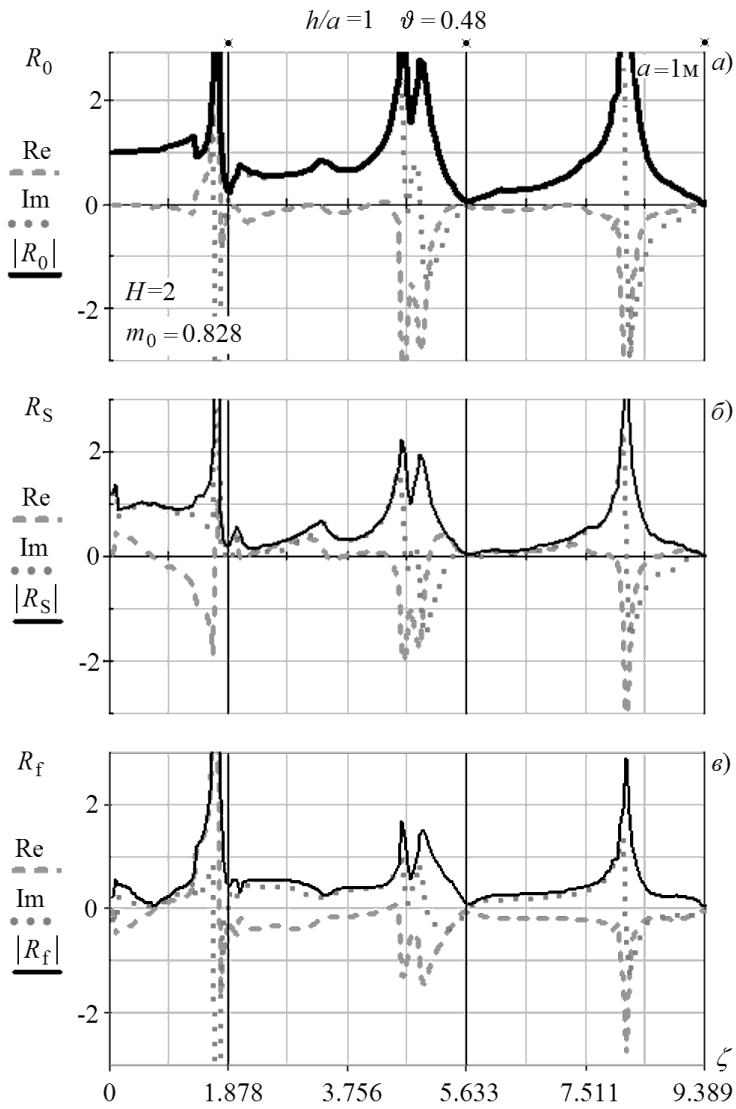


Рис. 7.22. Реакция при  $H = 2$ ,  $h = 1$  м,  $a = 1$  м,  $k_f = 0,000254$  м/с

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абелев М. Ю. Строительство промышленных и гражданских сооружений на водонасыщенных грунтах / М. Ю. Абелев. – М. : Стройиздат, 1986. – 248 с.
2. Абрамов В. М. Исследование случая несимметричного давления штампа круглого сечения на упругое полупространство / Докл. АН СССР. – 1939. – Т. **23**, № 8. – С. 759–763.
3. Александров В. М. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями / В. М. Александров, Е. В. Коваленко. – М. : Наука, 1986. – 336 с.
4. Александров В. М. О методе ортогональных полиномов в плоских смешанных задачах теории упругости / В. М. Александров, В. А. Кучеров. // Прикл. математика и механика. – 1970. – **34**, вып. 4. – С. 643–652.
5. Александров А. Я. Пространственные задачи теории упругости / А. Я. Александров, Ю. И. Соловьев. – М. : Наука, 1978. – 464 с.
6. Александрович В. А. Виброустойчивость песчаных оснований в диапазоне частот вынужденных колебаний 5 – 50 Гц / В. А. Александрович, В. Г. Таранов // Зб. наук. праць (галузеве машинобуд., буд-во). – Полтава : ПНТУ, 2012. – Вип. 4 (**34**), Т. 1. – С. 24–29.
7. Александрович В. А. Анализ некоторых испытаний виброустойчивости оснований фундаментов с точки зрения современных достижений / В. А. Александрович // Зб. наук. праць (галузеве машинобуд., буд-во). – Полтава : ПНТУ, 2013. – Вип. 3 (**38**), Т. 2. – С. 15–23.
8. Алексеев С. И. Механика грунтов: учебное пособие для студентов вузов / С. И. Алексеев. – СПб. : Петербургский государственный университет путей сообщения, 2007. – 111 с.
9. Апелъцин В. Ф. Аналитические свойства волновых полей / В. Ф. Апелъцин, А. Г. Кюркчан. – М. : Изд-во МГУ, 1990. – 208 с.
10. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации / Н. И. Ахиезер. – М.–Л. : ГИТТЛ, 1947. – 324 с.
11. Бабешко В. А. Об условиях излучения для упругого слоя / В. А. Бабешко // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. **213**, № 3. – С. 547–549.

12. Бабешко В. А. Динамика неоднородных линейно-упругих сред / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Ж. Ф. Зинченко. – М. : Наука, 1989. – 343 с.
13. Бабешко В. А. Нестационарное взаимодействие штампа с упругой средой / В. А. Бабешко, Ж. Ф. Зинченко, А. В. Смирнова // Изв. АН СССР. МТТ. – 1982. – № 4. – С. 136–140.
14. Баженов В. Г. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / В. Г. Баженов, Л. А. Игумнов. – М. : Физматлит, 2008. – 352 с.
15. Базалий Б. В. О спектре потенциала двойного слоя на кривой ограниченного вращения / Б. В. Базалий, В. Ю. Шелепов // Граничные задачи для дифференциальных уравнений. – К. : Наук. думка, 1980. – С. 13–30.
16. Баранцев Р. Г. Локализация особенностей в задаче рассеяния на контурах с неканоническими границами / Р. Г. Баранцев, В. В. Грудцын // Асимптотические методы. Задачи и модели механики. – Новосибирск : Наука, 1987. – С. 95–136.
17. Бари Н. К. Тригонометрические ряды / Н. К. Бари. – М. : ГИФМЛ, 1961. – 936 с.
18. Басовский В. Г. Излучение звука жесткой цилиндрической оболочкой конечной длины / В. Г. Басовский, А. М. Гомилко, В. В. Мелешко // Акуст. журнал. – 1989. – Т. 35, вып. 6. – С. 983–989.
19. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1965. – 296 с.
20. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1974. – 296 с.
21. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Функции Ламе и Маттьей / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1967. – 300 с.
22. Белоконь А. В. Колебания и волны в полуграниченных и ограниченных телах : Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Ростов-на-Дону, 1987. – 450 с.
23. Белоцерковский С. М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов. – М. : Наука, 1985. – 253 с.
24. Бирбраер А. Н. Расчет конструкций на сейсмостойкость / А. Н. Бирбраер // СПб. : Наука, 1998. – 255 с.
25. Бондаренко П. С. К вопросу об единственности для бесконечных систем линейных уравнений / П. С. Бондаренко // Матем. сборник. – 1951. – Т. 29, № 2. – С. 403–418.
26. Бородай М. Д. Динамика прямоугольного фундамента при контакте с вязкоупругой слоистой средой / М. Д. Бородай, О. А. Савицкий, В. М. Сеймов // Гидротехн. стр.-во. – 1995. – 7. – С. 15–19.

27. Бородачев Н. М. Об определении напряжений под колеблющимся фундаментом / Н. М. Бородачев // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1962. – 3. – С. 4–7.
28. Бородачев Н. М. Колебания штампа, лежащего на упругом полупространстве, под действием горизонтальной гармонической силы / Н. М. Бородачев // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1963. – № 9. – С. 19–26.
29. Бородачев Н. М. Контактные задачи теории упругости при динамическом нагружении / Н. М. Бородачев // Контактные задачи и их инженерные приложения. – М., 1969. – С. 160–168.
30. Бровко Г. Л. Модель неоднородной жидкогазонаполненной среды с деформируемым твердым каркасом / Г. Л. Бровко // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1998. – № 5. – С. 45–52.
31. Будаев Б. В. Дифракция упругих волн от свободного клина: Редукция к сингулярному интегральному уравнению / Б. В. Будаев // Математические вопросы теории распространения волн. Записки науч. семин. ЛОМИ. – 1989. – Т. 179. – С. 37–45.
32. Буланов Г. С. О методе однородных решений в задачах со смешанными граничными условиями / Г. С. Буланов, В. А. Шалдырван // Прикл. механика. – 1989. – Т. 25, № 9. – С. 21–30.
33. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений / Н. П. Векуа. – М. : Наука, 1970. – 380 с.
34. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1981. – 512 с.
35. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И. А. Викторов. – М. : Наука, 1981. – 288 с.
36. Вовк И. В. О расширении возможностей метода частичных областей применительно к задачам излучения и рассеяния звука / И. В. Вовк, В. Т. Гринченко // Акуст. журн. – 1989. – Т. 35, вып. 1. – С. 29–36.
37. Вовк И. В. Об особенностях применения метода частичных областей в волновых задачах / И. В. Вовк, А. М. Гомилко, Н. С. Городецкая // Акуст. журн. – 1995. – Т. 41, вып. 3. – С. 399–404.
38. Вознесенский Е. А. Поведение грунтов при динамических нагрузках. Учебн. изд. / Е. А. Вознесенский. – М. : Изд-во МГУ, 1997. – 286 с.
39. Волновые задачи акустики / В. Т. Гринченко, И. В. Вовк, В. Т. Мачыпура. – К. : Интерсервис, 2013. – 572 с.
40. Ворович И. И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек / И. И. Ворович // Труды 2-го Всесоюзного съезда по теоретич. и прикл. механике. Механика твердого тела. – М. : Наука, 1966. – С. 116–136.
41. Ворович И. И. Постановка краевых задач теории упругости при бесконечном интеграле энергии и базисные свойства однородных решений / И. И. Ворович // Механика деформ. тел и конструкций. – М. : Машиностроение, 1975. – С. 112–128.



42. Ворович И. И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. – М. : Наука, 1974. – 456 с.
43. Ворович И. И. Динамические смешанные задачи теории упругости / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. – М. : Наука, 1979 – 319 с.
44. Ворович И. И. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах / И. И. Ворович, В. А. Бабешко, О. Д. Пряхина – М. : Науч. мир, 1999. – 248 с.
45. Ворович И. И. О базисных свойствах одной системы однородных решений / И. И. Ворович, В. Е. Ковальчук // Прикл. матем. и механика. – 1967. – Т. **31**, вып. 5. – С. 861–870.
46. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Миттра Р. – М. : Мир, 1977. – 485 с.
47. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств / Б. З. Вулих. – М. : ГИФМЛ, 1961. – 408 с.
48. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции / Дж. Гарнетт. – М. : Мир, 1974. – 470 с.
49. Гахов Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М. : Наука, 1977 – 640 с.
50. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций / Е. В. Гобсон. – М. : ИЛ, 1952. – 476 с.
51. Годин Ю. А. Осесимметричная задача электростатики о диэлектрическом шаре около проводящей плоскости / Ю. А. Годин, А. С. Зильберглейт // Журнал технической физики. – 1986. – Т. **56**, вып. 6. – С. 1082–1090.
52. Гомилко А. М. Асимптотика неизвестных в задаче о жестко заземленной пластинке / А. М. Гомилко // Тр. 11 науч. конф. молодых ученых Ин-та механики АН УССР. Ч. 2. – 1986. – С. 290–295. – Рук. деп. ВИНТИ 28.07.86, № 5507-В86.
53. Гомилко А. М. Закон асимптотических выражений в теории функциональных уравнений в  $K_\sigma$ -пространствах / А. М. Гомилко // Укр. матем. журнал. – 1987. – Т. **39**, № 5. – С. 551–554.
54. Гомилко А. М. Гипотеза Рэлея в задаче об отражении волны Рэлея–Лэмба от криволинейного торца волновода / А. М. Гомилко // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1993. – № 2. – С. 61–66.
55. Гомилко А. М. Разложение по части собственных функций пучка дифференциальных операторов четвертого порядка / А. М. Гомилко // Укр. матем. журнал. – 1993. – **45**, № 12. – С. 1601–1612.
56. Гомилко А. М. Об одном классе бесконечных систем линейных алгебраических уравнений / А. М. Гомилко // Журнал выч. матем. и матем. физики. – 1993. – Т. **33**, вып. 7. – С. 979–995.
57. Гомилко А. М. Рекуррентные формулы для решений одной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений / А. М. Гомилко // Укр. матем. журнал. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1328–1332.

58. Гомилко А. М. Интегральные уравнения метода суперпозиции / А. М. Гомилко // Укр. матем. журнал. — 1998. — Т. 50. — С. 613–622.
59. Гомилко А. М. Классическая задача Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе / А. М. Гомилко // Дифференциальные уравнения. — 1998. — **34**, № 2. — С. 228–237.
60. Гомилко А. М. Гипотеза Рэлея в задаче Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе с криволинейным торцом / А. М. Гомилко // В кн: Актуальные аспекты физико-механических исследований. Механика. — К. : Наук. думка, 2007. — С. 83–86.
61. Гомилко А. М. Продольные волны Лэмба в полубесконечном упругом слое / А. М. Гомилко, Н. С. Городецкая, В. В. Мелешко // Прикл. механика. — 1991. — Т. **27**, № 6. — С. 53–59.
62. Гомилко А. М. Гармонические колебания жесткого непроницаемого штампа на пористоупругом основании / А. М. Гомилко, Н. С. Городецкая, А. Н. Трофимчук // Прикл. механика. — 1999. — **35**, № 12. — С. 85–93.
63. Гомилко А. М. Принцип отражения в плоских граничных задачах для уравнения Гельмгольца / А. М. Гомилко, В. Т. Гринченко, Е. В. Лобова // Акустичний вісник. — 1998. — Т. **1**, вып. 2. — С. 48–56.
64. Гомилко А. М. О возможностях метода однородных решений в смешанной задаче теории упругости для упругой полуполосы / А. М. Гомилко, В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко // Теоретич. и прикл. механика. — 1987. — Т. 18. — С. 3–8.
65. Гомилко А. М. Асимптотика неизвестных при решении методом суперпозиции плоской задачи для упругой полуполосы / А. М. Гомилко, В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко // Прикл. механика. — 1988. — Т. **24**, № 7. — С. 77–83.
66. Гомилко А. М. Однородные решения в задаче о равновесии упругого цилиндра конечной длины / А. М. Гомилко, В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко // Теоретич. и прикл. механика. — Киев-Донецк. — 1989. — Т. 20. — С. 3–9.
67. Гомилко А. М. Задача Неймана для уравнения Гельмгольца во внешности прямолинейно-круговой луночки / А. М. Гомилко, В. И. Денисенко // Акустичний вісник. — 2004. — Т. **7**, вып. 4. — С. 28–33.
68. Гомилко А. М. Точное решение задачи пространственной теории потенциала для двух сфер / А. М. Гомилко, Ю. Ф. Диденко, В. Ф. Ковальчук. — Киев, 1988. — 40 с. — Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.44.
69. Гомилко А. М. Асимптотика решений бесконечной системы линейных алгебраических уравнений теории потенциала / А. М. Гомилко, В. Ф. Ковальчук // Украинский математический журнал. — 2001. — **53**, № 9. — С. 1184–1193.

70. Гомилко А. М. Асимптотическое решение контактной гармонической задачи для непроницаемого штампа на пористо-упругом основании / А. М. Гомилко, А. Н. Трофимчук // Акуст. вісн. – 1998. – 1, № 3. – С. 30–37.
71. Гомилко А. М. Гармонические колебания пористоупругого насыщенного жидкостью слоя на жестком основании / А. М. Гомилко, А. А. Гуржий, А. Н. Трофимчук // Акуст. вісн. – 1999. – 2, № 3. – С. 33–41.
72. Гомилко А. М. Гармонические волны в полубесконечном упругом слое / А. М. Гомилко, В. В. Мелешко // Доклады АН УССР, сер. А. – 1985. – № 2. – С. 28–32.
73. Гомилко А. М. Задача Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе / А. М. Гомилко, В. В. Мелешко // Доклады АН СССР. – 1987. – Т. 294, № 5. – С. 1046–1048.
74. Гомилко А. М. О методе Файлона разложения функций в ряды по однородным решениям в задачах теории упругости / А. М. Гомилко, В. В. Мелешко // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 4. – С. 48–53.
75. Гомилко А. М. Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения / А. М. Гомилко, Г. В. Радзиевский // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 3. – С. 384–396.
76. Гомилко А. М. Гармонические колебания прямоугольного штампа на пористоупругом насыщенном жидкостью основании / А. М. Гомилко, О. А. Савицкий, А. Н. Трофимчук // “Современные проблемы механики сплошной среды”, том 2. – Ростов-на-Дону : Изд-во ООО “ЦВВР”, 2002. – С. 53–57.
77. Гомілко О. М. Динамічний тиск на контактi прямокутного штампа та пористопружного насиченого рiдиною пiвпростору / О. М. Гомілко, О. А. Савицький, О. М. Трофимчук // Наукові Вісті НТТУ “КПІ”. – 2002. – 4. – С. 136–142.
78. Гомилко А. М. Классическая задача Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе с криволинейным торцом / А. М. Гомилко, А. Н. Трофимчук // Доповiдi НАН України. – 2016. – 5. – С. 13–18.
79. Городецкая Н. С. Симметричные колебания пористо-упругой полосы со свободными поверхностями для случая закрытых пор / Н. С. Городецкая // Акуст. вісн. – 1998. – 1, № 1. – С. 17–24.
80. Городецкая Н. С. Нормальные волны в пористо-упругом слое со свободными поверхностями для случая открытых пор / Н. С. Городецкая // Акуст. вісн. – 1998. – 1, № 2. – С. 65–72.
81. Городецкая Н. С. Затухание симметричных волн при распространении в пористо-упругом слое со свободными поверхностями / Н. С. Городецкая // Акуст. вісн. – 1998. – 1, № 4. – С. 4–18.

82. Городецкая Н. С. Отражение волн от свободной границы пористо-упругого насыщенного жидкостью полупространства / Н. С. Городецкая // Акуст. вісн. – 2002. – 5, № 4. – С. 5–14.
83. Городецкая Н. С. Волны на границе пористо-упругого полупространства. I. Свободная граница / Н. С. Городецкая // Акуст. вісн. – 2005. – 8, № 1–2. – С. 28–41.
84. Городецкая Н. С. Волны в пористо-упругих насыщенных жидкостью средах / Н. С. Городецкая // Акуст. вісн. – 2007. – 10, № 2. – С. 43–63.
85. Гохберг И. Ц. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн // Успехи мат. наук. – 1957. – Т. 12, вып. 6. – С. 43–118.
86. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 1100 с.
87. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В. Т. Гринченко. – К. : Наук. думка, 1978. – 264 с.
88. Гринченко В. Т. Развитие метода решения задач излучения и рассеяния звука в неканонических областях / В. Т. Гринченко // Гидромеханика. – 1996. – Вып. 70. – С. 27–40.
89. Гринченко В. Т. Волновые задачи рассеяния звука на упругих облочках / В. Т. Гринченко, И. В. Вовк. – К. : Наук. думка, 1986. – 286 с.
90. Гринченко В. Т. Основы акустики. Навчальний посібник / В. Т. Гринченко, І. В. Вовк, В. Т. Маціпура. – К. : Наук. думка, 2007. – 640 с.
91. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – К. : Наук. думка, 1981. – 284 с.
92. Гринченко В. Т. Равновесие упругих тел канонической формы / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко. – К. : Наук. думка, 1985. – 280 с.
93. Грінченко В. Т. Динамічні властивості в'язко-пружного шару при гармонічному навантаженні круговим штампом / В. Т. Грінченко, В. Н. Олійник // Акуст. вісн. – 2005. – 8, № 1–2. – С. 42–50.
94. Губайдуллин А. А. Распространение волн вдоль границы насыщенной пористой среды и жидкости / А. А. Губайдуллин, О. Ю. Болдырева // Акуст. ж. – 2006. – 52, № 2. – С. 201–211.
95. Гузь А. Н. Дифракция упругих волн / А. Н. Гузь, В. Д. Кубенко, М. А. Черевко. – К. : Наук. думка, 1978. – 307 с.
96. Далматов Б. И. Механика грунтов, основания и фундаменты (включая специальный курс инженерной геологии). 2-е изд. перераб. и доп. / Б. И. Далматов. – Л. : Стройиздат, 1988. – 415 с.
97. Данилюк И. И. Нерегулярные граничные задачи / И. И. Данилюк. – М. : Наука, 1975. – 295 с.
98. ДБН В.1.1-12:2014. Будівництво у сейсмічних районах України. – К. : Міністерство регіонального розвитку, будівництва та житлово-комунального господарства України. – 2014. – 110 с.

99. Джанелидзе Г. Ю. Метод однородных решений в математической теории упругости / Г. Ю. Джанелидзе, В. К. Прокопов // Труды 4-го Всесоюзного математического съезда. – Л. : Наука, 1964. – С. 551–557.
100. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. Пер. с англ. Ред. Р. В. Гольдштейн. – М. : Мир, 1989. – 509. с.
101. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М. М. Джрбашян. – М. : Наука, 1966. – 672 с.
102. Динамика морской платформы, взаимодействующей с основанием и водной средой / В. М. Сеймов, А. Н. Трофимчук, О. А. Савицкий, Н. П. Ермоленко // Динамические системы. – 1998. – Вып. 14. – Симферополь : Таврия. – С. 78–87.
103. Динамика сплошных сред в расчетах гидротехнических сооружений / Под ред. В. М. Ляtxера и Ю. С. Яковлева. – М. : Энергия, 1976. – 392 с.
104. Динамические контактные задачи для пористоупругих насыщенных жидкостью сред / А. М. Гомилко, О. А. Савицкий, В. М. Сеймов, А. Н. Трофимчук // Изв. вузов. Сев. Кавк. регион. Естеств. науки. – 2000. – № 3. – С. 145–150.
105. Добрушкин В. А. Краевые задачи динамической теории упругости для клиновидных областей / В. А. Добрушкин. – Минск : Наука и техника, 1988. – 416 с.
106. Донцов В. Е. Распространение волн давления в пористой среде, насыщенной жидкостью / В. Е. Донцов, В. В. Кузнецов, В. Е. Накоряков // ЖПМТФ. – 1988. – 167, № 1. – С. 120–130.
107. Доусон Т. Проектирование сооружений морского шельфа / Т. Доусон. – Л. : Судостроение, 1986. – 286 с.
108. Дыхта В. В. Метод интегральных преобразований в волновых задачах гидроакустики / В. В. Дыхта. – К. : Наук. думка, 1981. – 286 с.
109. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции / М. А. Евграфов. – М. : Наука, 1979. – 320 с.
110. Евграфов М. А. Аналитические функции / М. А. Евграфов. – М. : Наука, 1991. – 448 с.
111. Жданович В. Ф. Формулы для нулей полиномов Дирихле и квазиполиномов / В. Ф. Жданович // Доклады АН СССР. – 1961. – Т. 135, № 5. – С. 1046–1049.
112. Жиленков А. Г. Взаимодействие сейсмических волн с морской стационарной платформой в шельфовой зоне / А. Г. Жиленков, С. И. Капустянский // Сейсмостойкое стр-во. – 1998. – № 6. – С. 5–6.
113. Заргарян С. С. Об асимптотике решений интегральных уравнений теории потенциала в окрестности угловых точек / С. С. Заргарян, В. С. Мазья // Прикл. матем. и мех. – 1984. – Т. 48, вып. 1. – С. 169–164.

114. Зарембо Л. К. Нелинейная акустика / Л. К. Зарембо, В. И. Тимошенко. – М. : Изд-во моск. ун-та, 1984. – 103 с.
115. Зарецкий Ю. К. Об обобщении метода П. И. Клубина решения плоской контактной задачи / Ю. К. Зарецкий // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1974. – № 2. – С. 25–26.
116. Зарецкий Ю. К. Лекции по современной механике грунтов / Ю. К. Зарецкий; отв. ред. В. А. Ильичев. – Ростов-на-Дону : Изд-во Рост. ун-та, 1989. – 608 с.
117. Ильичев В. А. Определение вертикальных перемещений поверхности вне колеблющегося относительно горизонтальной оси штампа / В. А. Ильичев, В. С. Михайлюк // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2008. – № 1. – С. 2–7.
118. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. – М. : Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.
119. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М. : Мир, 1967. – 624 с.
120. Исакович М. А. Общая акустика: Учеб. пособие для ВТУЗов // М. А. Исакович. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1973. – 496 с.
121. Исрафилов Р. М. Волны в насыщенном жидкостью пористом вязкоупругом материале / Р. М. Исрафилов, Е. В. Савельева // Прикладная механика. – 2014. – **50**, 6. – С. 97–109.
122. Ісрафілов Р. Розв'язання двовимірної динамічної задачі для насиченого пористого півпростору / Р. Ісрафілов, К. Савельєва // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. – 2014. – Вип. 2(32). – С. 42–45.
123. Исследования сейсмостойкости реакторного отделения атомной станции с учетом взаимодействия с основанием / В. М. Сеймов, А. Н. Трофимчук, О. А. Савицкий, М. Д. Бородай, Н. П. Ермоленко // Сейсмостойкое стр-во. – 1998. – № 1. – С. 16–19.
124. Калинчук В. В. Динамика поверхности неоднородных сред / В. В. Калинчук, Т. И. Белянкова. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 307 с.
125. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.
126. Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – М.-Л. : ГИФМЛ, 1962. – 708 с.
127. Капица П. Л. Симметричные электрические колебания идеально проводящего полого цилиндра конечной длины / П. Л. Капица, В. А. Фок, Л. А. Вайнштейн // ЖТФ. – 1959. – **29**, № 10. – С. 1188–1205.
128. Керчман В. И. Контактная задача теории консолидации водонасыщенной среды / В. И. Керчман // Изв. АН СССР. МТТ. – 1974. – № 3. – С. 102–109.

129. Керчман В. И. Задачи консолидации и связанной термоупругости для деформируемого полупространства / В. И. Керчман // Изв. АН СССР. МТТ. – 1976. – № 1. – С. 45–54.
130. Клубин П. И. Расчет балочных и круглых плит на упругом основании / П. И. Клубин // Инж. сб. – 1952. – № 12. – С. 95–136.
131. Коваленко Е. В. Развитие метода ортогональных функций. В кн: Механика контактных взаимодействий (ред. Ворovich И. И., Александров В. М.). – М. : Физматгиз, 2001. – 672 с., с. 125–136.
132. Ковтун Ал. А. Об уравнениях модели Био и их модификациях / Ал. А. Ковтун // Вопросы геофизики. Вып. 44. – СПб., 2011. – С. 3–26.
133. Ковтун Ал. А. Дисперсионные уравнения для пористого слоя Био между упругими полупространствами / Ал. А. Ковтун // Вопросы геофизики. Вып. 45. – СПб., 2012. – С. 17–34.
134. Колдоркина В. А. О решениях уравнения  $\Delta \Delta u = f$  в кусочно-гладкой области / В. А. Колдоркина // Дифференц. ур. – 1972. – 8, 2. – С. 374–376.
135. Колебания фундамента на водонасыщенном основании / А. М. Гомилко, О. А. Савицкий, В. М. Сеймов, А. Н. Трофимчук // Будівельні конструкції: Міжвід. наук.-техн. зб. За матеріалами 4-ї Української наук.-техн. конф. “Механіка ґрунтів та фундаментобудування”. – Київ, 2000. – Кн. 1, вип. 53. – С. 365–370.
136. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах / Г. Кольский. – М. : Издательство иностранной литературы, 1955. – 194 с.
137. Кондауров В. И. Термодинамически согласованные уравнения термоупругой насыщенной пористой среды / В. И. Кондауров // Прикладная математика и механика. – 2007. – 71, № 4. – С. 562–579.
138. Кондратьев В. А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях / В. А. Кондратьев, О. А. Олейник // Успехи матем. наук. – 1983. – 38, вып. 3. – С. 3–76.
139. Копасенко В. В. Исследование алгебраической системы бесконечного порядка, возникающей при решении задачи для полуполосы / В. В. Копасенко // Прикл. матем. и мех. – 1973. – 37, вып. 4. – С. 715–723.
140. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1978. – 831 с.
141. Косачевский Л. Я. О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах // ПММ. – 1959. – 23, № 6. – С. 1115–1123.
142. Косачевский Л. Я. Об отражении звуковых волн от слоистых двухкомпонентных сред // ПММ. – 1961. – 25, № 6. – С. 1076–1082.
143. Коялович Б. М. Исследования о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений / Б. М. Коялович // Изв. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1930. – 3. – С. 41–167.

144. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. – М. : Наука, 1971. – 104 с.
145. Крылов В. И. Вычислительные методы высшей математики. Том. 1. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. Ред. И. П. Мысовских. – Минск : Высшая школа, 1972. – 584 с.
146. Крылов В. И. Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа / В. И. Крылов, Н. С. Скобля. – Минск : Наука и техника, 1968. – 296 с.
147. Крылов В. И. Справочная книга по численному гармоническому анализу / В. И. Крылов, А. Г. Кругликова. – Минск : Наука и техника, 1968. – 166 с.
148. Крылов В. И. Справочная книга по численному интегрированию / В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина. – М. : Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1966. – 372 с.
149. Кубенко В. Д. О нестационарном деформировании упругого слоя при смешанных граничных условиях / В. Д. Кубенко // Доповіді НАНУ. – 2015. – № 7. – С. 47–53.
150. Кубенко В. Д. Нестационарное деформирование упругого слоя при смешанных граничных условиях // Прикладная механика. – 2016. – Т. 52(62), № 6. – С. 5–25.
151. Кузьмин Р. О. Об одном классе бесконечных систем линейных уравнений / Р. О. Кузьмин // Изв. АН СССР. Отд. матем. и естеств. наук. – 1934. – 4. – С. 515–546.
152. Кусис П. Введение в теорию пространств  $H^p$  / П. Кусис. – М. : Мир, 1984. – 366 с.
153. Кюркчан А. Г. Особенности продолжения волновых полей / А. Г. Кюркчан, Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов // Успехи физических наук. – 1996. – Т. 166, № 12. – С. 1285–1308.
154. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. – М. : Наука, 1970. – 288 с.
155. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения / Н. Н. Лебедев. – М.-Л. : ГИФМЛ, 1963. – 360 с.
156. Лепендин Л. Ф. Акустика: Учеб. пособие для ВТУЗов // Л. Ф. Лепендин. – М. : Высш. школа, 1978. – 448 с.
157. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом / Г. С. Литвинчук. – М. : Наука, 1977. – 448 с.
158. Лопатинский Я. Б. Теория общих граничных задач. Избранные труды / Я. Б. Лопатинский. – К. : Наук. думка, 1984. – 316 с.
159. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1955. – 492 с.
160. Лурье А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 939 с.
161. Лэмб Г. Гидродинамика // Г. Лэмб. – М. : Гостехиздат, 1967. – 928 с.



162. Лятхер В. М. Свободные колебания жестких плит на песчаном водонасыщенном основании / В. М. Лятхер, И. И. Борзенко, Н. В. Халтурина // Гидротехн. стр.-во. – 1972. – № 1. – С. 25–29.
163. Мазья В. Г. Граничные интегральные уравнения. Итоги науки и техники. ВИНТИ. Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления / В. Г. Мазья. – 1988. – Т. **27**. – С. 131–228.
164. Мазья В. Г. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи конических точек / В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский // Доклады АН СССР. – 1974. – Т. **219**, № 2. – С. 286–289.
165. Мазья В. Г. Оценки в  $L_p$  и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда-Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе / В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский // Math. Nachr. – 1978. – 81. – S. 25–82.
166. Мазья В. Г. О принципе максимума для бигармонического уравнения в области с коническими точками / В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский // Изв. вузов. Сер. матем. – 1981. – № 2 – С. 52–59.
167. Мардонов Б. Вертикальные колебания кругового штампа на упруго-пористом полупространстве, насыщенном жидкостью // Газовая и волновая динамика. Тр. мех.-мат. фак-та МГУ. – 1975. – № 1. – С. 70–75.
168. Марков М. Г. О скорости и затухании волны типа Стоунли на границе жидкость-пористое полупространство / М. Г. Марков, А. Ю. Юматов // Акуст. журн. – 1987. – **33**, № 2. – С. 293–297.
169. Марфин Е. А. Упругие волны в насыщенных пористых средах : Учебно-методическое пособие / Е. А. Марфин, М. Н. Овчинников. – Казань : Казанский университет, 2012. – 28 с.
170. Механика грунтов / В. Г. Шаповал, Л. И. Седин, А. В. Шаповал и др. – Днепропетровск : Пороги, 2009. – 168 с.
171. Механика контактных взаимодействий / ред. И. И. Ворович, М. А. Александров. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 672 с.
172. Механика насыщенных пористых сред / В. Н. Николаевский, К. С. Басниев, А. Т. Горбунов и др. – М. : Недра, 1970. – 336 с.
173. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными / С. Мизохата. – М. : Мир, 1977. – 504 с.
174. Митра Р. Аналитические методы теории волноводов / Р. Митра, С. Ли. – М. : Мир, 1974. – 327 с.
175. Мишель А. Г. Колебания штампа на двухфазном основании / А. Г. Мишель, С. Г. Шульман // Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева. – 1983. – **166**. – С. 39–41.
176. Мишель А. Г. Решение плоских задач динамики двухфазных грунтовых сред методом конечных элементов : автореф. дис. на соискание науч. степени канд. техн. наук : спец. 05.23.02 “Основания, фундаменты и подземные сооружения”. – Л. : 1984. – 24 с.

177. Молотков Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах / Л. А. Молотков. – Л. : Наука, 1984. – 202 с.
178. Молотков Л. А. Эффективные модели слоистых сред, содержащих пористые слои Био / Л. А. Молотков, А. В. Бакулин // Зап. науч. семин. ПОМИ. – 1997. – 239. – С. 140–163.
179. Молотков Л. А. О методах вывода уравнений, описывающих эффективные модели слоистых сред / Л. А. Молотков // Записки науч. семин. ЛОМИ (ПОМИ). – 1998. – № 250. – С. 219–243.
180. Моссаковский В. И. Контактные задачи для упругого полупространства с круговыми или близкими к круговым линиями раздела граничных условий / В. И. Моссаковский, А. Б. Ковура // Динамика и прочность тяжелых машин. – 1980. – Вып. 5. – С. 132–135.
181. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 708 с.
182. Назаров С. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей / С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский. – М. : Наука, 1991. – 336 с.
183. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
184. Немиш Ю. Н. Связанные задачи о напряженном состоянии насыщенных пористых сред в окрестности некруговых цилиндрических полостей / Ю. Н. Немиш, Р. М. Исафилов // Прикл. мех. – 1987. – 4. – С. 9–18.
185. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред / Р. И. Нигматулин. – М. : Наука, 1978. – 336 с.
186. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Часть 1 / Р. И. Нигматулин. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 464 с.
187. Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Часть 2 / Р. И. Нигматулин. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 360 с.
188. Никифоров А. Ф. Основы теории специальных функций. Учеб. пособие / А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. – М. : Наука, 1974. – 303 с.
189. Николаевский В. Н. Геомеханика и флюидодинамика / В. Н. Николаевский. – М. : Недра, 1996. – 447 с.
190. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 872 с.
191. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции / Ф. Олвер. – М. : Наука, 1990. – 528 с.
192. Олейник О. А. Принцип Сен-Венана в плоской теории упругости и краевые задачи для бигармонического уравнения в неограниченных областях / О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян // Сиб. матем. журнал. – 1978. – Т. 19, № 5. – С. 1154–1165.

193. Олейник О. А. Об асимптотике решений бигармонического уравнения в окрестности нерегулярных точек границы области и на бесконечности / О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, И. Н. Тавхелидзе // Труды Московского матем. об-ва. – 1981. – Т. 42. – С. 160–175.
194. О сейсмических колебаниях морской платформы с учетом взаимодействия с основанием и водной средой / В. М. Сеймов, Н. П. Ермоленко, О. А. Савицкий, А. Н. Трофимчук // “Будівництво в сейсмічних районах України”. IV Наук.-техн. конф. Доповіді. – Ялта (Автономна республіка Крим), 18-21 травня 1999 р. – 1999. – С. 64–70.
195. Панич О. И. Эквивалентная регуляризация и разрешимость краевых задач с нулевым индексом для полигармонических уравнений и сильно эллиптических систем второго порядка на плоскости // Сиб. матем. журнал. – 1966. – Т. 7, № 3. – С. 591–619.
196. Папкович П. Ф. Два вопроса теории изгиба тонких упругих плит / П. Ф. Папкович // Прикладная математика и механика. – 1941. – 5, вып. 3. – С. 359–374.
197. Партон В. З. Интегральные уравнения теории упругости / В. З. Партон, П. И. Перлин. – М. : Наука, 1977. – 312 с.
198. Пельц С. П. О сходимости метода однородных решений в динамической смешанной задаче для полуполосы / С. П. Пельц, В. М. Шихман // Докл. АН ССР. – 1987. – Т. 295, № 4. – С. 821–824.
199. Попов Г. Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам / Г. Я. Попов // Прикл. матем. и механика. – 1963. – 27, № 5. – С. 821–832.
200. Попов Г. Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам / Г. Я. Попов // Прикл. матем. и механика. – 1964. – 28, № 3. – С. 442–451.
201. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г. Я. Попов. – М. : Наука, 1982. – 344 с.
202. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания / Г. Я. Попов. – Киев-Одесса : Вища школа, 1982. – 168 с.
203. Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости / В. Б. Поручиков. – М. : Наука, 1986. – 328 с.
204. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений / З. Пресдорф. – М. : Мир, 1979. – 496 с.
205. Прокопов В. К. Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра / В. К. Прокопов // Труды ЛПИ. – 1950. – № 2. – С. 286–303.
206. Прокопов В. К. Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям / В. К. Прокопов // Труды ЛПИ. – 1967. – № 279. – С. 31–46.

207. Прудников А. П. Интегралы и ряды / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М. : Наука, 1981. – 800 с.
208. Прудников А. П. Интегралы и ряды. В 3 т. Т. 2. Специальные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – 2-е изд., исправ. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 664 с.
209. Пряхина О. Д. К задаче о неустановившемся движении штампа на упругом основании / О. Д. Пряхина, А. В. Смирнова // Тез. докл. II Всесоюз. науч. конф. Смешанные задачи механики деформируемого тела, Днепропетровск, 15–18 сент. 1981 г. – Днепропетровск, 1981. – С. 133–134.
210. Радон И. О краевых задачах для логарифмического потенциала / И. Радон // Успехи матем. наук. – 1946. – Т. 1, вып. 5. – С. 96–124.
211. Развитие теории контактных задач в СССР. – М. : Наука, 1976. – 493 с.
212. Рвачев В. Л. Контактные задачи теории упругости для неклассических областей / В. Л. Рвачев, В. С. Проценко. – К. : Наук. думка, 1977. – 236 с.
213. Рекомендации по проведению полевых испытаний виброустойчивости оснований фундаментов турбоагрегатов / В. А. Ильичев, В. И. Керчман, В. Г. Таранов, В. Я. Хаин. – М. : НИИОСП-ДИИТ, 1986. – 30 с.
214. Ремез Н. С. Чисельні методи розв'язання навчальних і науково-технічних задач / Н. С. Ремез, І. А. Лучко, В. Ф. Мейш ; Нац. техн. ун-т України “Київ. політехн. ін-т”. – К. : НТУУ “КПІ”, 2011. – Ч. 2. – 248 с.
215. Ремез Н. С. Чисельні методи розв'язання навчальних і науково-технічних задач / Н. С. Ремез, І. А. Лучко, В. Ф. Мейш ; Нац. техн. ун-т України “Київ. політехн. ін-т”. – К. : НТУУ “КПІ”, 2011. – Ч. 1. – 2011. – 211 с.
216. Рисс Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М. : Мир, 1979. – 592 с.
217. Руцицкий Я. Я. Элементы теории смеси / Я. Я. Руцицкий. – К. : Наук. думка, 1991. – 160 с.
218. Руцицкий Я. Я. Волны в полупространстве из насыщенного жидкостью пористого материала I / Я. Я. Руцицкий, Р. М. Исафилов // Прикладная механика. – 2001. – **37 (47)**, 4. – С. 115–125.
219. Руцицкий Я. Я. Волны в полупространстве из насыщенного жидкостью пористого материала II / Я. Я. Руцицкий, Р. М. Исафилов // Прикладная механика. – 2001. – **37 (47)**, 5. – С. 104–111.
220. Савина Т. В. О формуле отражения для уравнения Гельмгольца / Т. В. Савина, Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов // Радиотехника и электроника. – 1993. – Т. 38, № 2. – С. 229–240.
221. Савинов О. А. Полвека в мире механических колебаний : Записки инженера-исследователя / О. А. Савинов. – СПб : Стройиздат, С.-Петербург. отд-ние, 1992. – 295 с.

222. Савинов О. А. Современные конструкции фундаментов под машины и их расчет / О. А. Савинов. – Л. : Стройиздат, 1979. – 200 с.
223. Савицкий О. А. Динамические модели грунтового основания для прямоугольного фундамента / О. А. Савицкий // Будівельні конструкції : Міжвід. наук.-техн. збірник наукових праць (будівництво). Механіка ґрунтів, геотехніка, фундаментобудування. Вип. 61. том 1. – К. : НДІБК, 2004. – С. 152–157.
224. Савицкий О. А. Импеданс и реакция пористоупругого насыщенного жидкостью полупространства при гармонических колебаниях прямоугольного штампа / Савицкий О. А. ; Ин-т гидромеханики НАН Украины. – Киев, 2012. – 69 с. – Библиогр. : 154 назв. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины 24.01.2012, № 1-Ук2012.
225. Савицкий О. А. Динаміка фундаменту на шарі водонасиченого ґрунту / О. А. Савицький // Основи та фундаменти : Міжвід. наук.-техн. збірник. За заг. ред. І. П. Бойка. Вип. 37. – К. : КНУБА, 2015. – С. 128–137.
226. Савицький О. А. Реакція пористопружної водонасиченої основи на вимушені коливання невагомого фундамента / О. А. Савицький, О. М. Трофимчук // Будівельні конструкції : Міжвід. наук.-техн. збірник наукових праць (будівництво). – Вип. 83. : В 2-х кн. : Книга 1. – К. : ДП НДІБК, 2016. – С. 305–311.
227. Садовничий В. А. О нулях целых функций одного класса / В. А. Садовничий, В. А. Любишкин, Ю. Белаббаси // Труды семин. им. И. Г. Петровского. – 1982. – Т. 8. – С. 211–217.
228. Сеге Г. Ортогональные многочлены / Г. Сеге. – М. : Физматгиз, 1962. – 500 с.
229. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. I, II. 5-е изд. / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1994.
230. Сеймов В. М. Динамические контактные задачи / В. М. Сеймов. – К. : Наук. думка, 1976. – 284 с.
231. Сеймов В. М. Нестационарные контактные задачи для цилиндра в слое жидкости на твердом полупространстве / В. М. Сеймов // Акуст. вісн. – 1999. – 2, № 4. – С. 58–68.
232. Сеймов В. М. Неосесимметричные периодические и нестационарные колебания круглого штампа на упругом полупространстве / В. М. Сеймов, Н. П. Ермоленко, Е. А. Зайцева // Прикладная механика. – 1997. – 33, 5. – С. 41–48.
233. Сеймов В. М. Динамика и сейсмостойкость гидротехнических сооружений / В. М. Сеймов, Б. Н. Островерх, А. И. Ермоленко. – К. : Наук. думка, 1983. – 318 с.
234. Сеймов В. М. Колебания цилиндра в слое жидкости на упругом полупространстве / В. М. Сеймов, О. А. Савицкий, Н. П. Ермоленко //

- Будівельні конструкції : Міжвід. наук.-техн. зб. наук. праць (будівництво). Механіка ґрунтів, геотехніка, фундаментобудування. Вип. 61. том 2. – К. : НДІБК, 2004. – С. 243–250.
235. Сеймов В. М. Вертикальные колебания цилиндра (морской платформы) в слое жидкости на упругом полупространстве / В. М. Сеймов, О. А. Савицкий, Н. П. Ермоленко // Будівельні конструкції: Міжвід. наук.-техн. зб. наук. праць (будівництво). Механіка ґрунтів, геотехніка, фундаментобудування. Вип. 64. – К. : НДІБК, 2006. – С. 302–307.
236. Сеймов В. М. Исследования динамики взаимодействия цилиндра (морской платформы) с упругим полупространством и слоем жидкости / В. М. Сеймов, О. А. Савицкий, Н. П. Ермоленко // Гідромелірація та гідротехнічне будівництво. Зб. наук. праць. Вип. 31. – Рівне, 2007. – С. 205–211.
237. Сеймов В. М. Расчет сейсмических колебаний морской платформы / В. М. Сеймов, О. А. Савицкий, И. В. Ловцов // Проблемы гидромеханики в освоении океана. Мат. конф. по прикл. гидромеханике. АНУ, Ин-т гидромех. – 1992. – С. 127–128.
238. Сеймов В. М. Колебания и волны в слоистых средах / В. М. Сеймов, А. Н. Трофимчук, О. А. Савицкий. – К. : Наук. думка, 1990. – 224 с.
239. Сеймов В. М. Исследование эффектов взаимодействия морской гравитационной платформы с водной средой и основанием при динамических воздействиях / В. М. Сеймов, А. Н. Трофимчук, О. А. Савицкий // 5-я международная конференция РАО-2001 “Освоение шельфа арктических морей России”. 11-14 сент. 2001 г. Санкт-Петербург. Труды. – 2001. – С. 206–208.
240. Сеймов В. М. Численный анализ горизонтальных сейсмических колебаний морской платформы гравитационного типа при учете взаимодействия с основанием и слоем жидкости / В. М. Сеймов, А. Н. Трофимчук, О. А. Савицкий, Н. П. Ермоленко // Сейсмостойкое стр-во. Безопасность сооружений. – 2000. – № 1. – С. 38–42.
241. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. – М. : Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
242. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул / С. Л. Соболев. – М. : Наука, 1974. – 808 с.
243. Соболевский Ю. А. Водонасыщенные откосы и основания / Ю. А. Соболевский. – Минск : Вышэйшая школа, 1975. – 400 с.
244. Справочник геотехника. Основания, фундаменты и подземные сооружения / Под общей редакцией В. А. Ильичева и Р. А. Мангушева. – М. : Изд-во АСВ, 2016. – 1040 с.
245. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. Пер. с англ. В. А. Диткин, Л. Н. Кармазина. – М. : Наука, 1979. – 832 с.

246. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн. – М. : Мир, 1973. – 344 с.
247. Столл Р. Д. Акустические волны в водонасыщенных осадках / Р. Д. Столл // Акустика морских осадков. – М., 1977. – С. 28–46.
248. Суворова Т. В. Динамическое взаимодействие систем полуграниченных и ограниченных деформируемых тел, моделирующих железнодорожный путь и объекты инфраструктуры : автореф. дис. на соискание науч. степени докт. физ.-мат. наук : спец. 01.02.04 “Механика деформируемого твердого тела” / Т. В. Суворова. – Краснодар, 2004. – 46 с.
249. Суетин П. Л. Классические ортогональные многочлены / П. Л. Суетин. – М. : Наука, 1979. – 416 с.
250. Сумбатян М. А. Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике / М. А. Сумбатян, А. Скалия. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 327 с.
251. Таранов В. Г. Розрахунково-експериментальні методи визначення рівня коливань й оцінка вібростійкості основ фундаментів машин : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня докт. техн. наук : 05.23.02 “Підвалини та фундаменти”. – Дніпропетровськ : 1999. – 33 с.
252. Таранов В. Г. Взаимодействие фундамента с основанием при крутильных колебаниях / В. Г. Таранов, Е. А. Шалимов // Світ геотехніки. – 2009. – 1. – С. 9–13.
253. Теория механизмов и машин: Учеб. для вузов / К. В. Фролов, С. А. Попов, А. К. Мусатов и др.; Под ред. К. В. Фролова. – М. : Высш. школа, 1987. – 496 с.
254. Терцаги К. Теория механики грунтов. – М. : Госстройиздат, 1961. – 508 с.
255. Тимошенко С. Теория упругости. Перев. с англ. / С. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 576 с.
256. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титчмарш. – М.–Л. : ГИТТЛ, 1948. – 480 с.
257. Титчмарш Е. Теория функций / Е. Титчмарш. – М. : Наука, 1980. – 464 с.
258. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 288 с.
259. Трофимчук А. Н. Асимптотические решения нестационарных контактных задач для насыщенных жидкостью пористоупругих сред / А. Н. Трофимчук // Тез. докл. IV Всесоюз. конф. Смешанные задачи механики деформируемого тела. Ч. II. – Одесса, 1989. – С. 111.
260. Трофимчук А. Н. Колебания штампа на слоистой насыщенной жидкостью среде / А. Н. Трофимчук, И. В. Ловцов // Гидротехническое стр-во. – 1995. – № 7. – С. 20–22.
261. Трофимчук А. Н. Динамическое взаимодействие жесткой плиты с водонасыщенным пористоупругим основанием // Приклад. механика. – 1996. – 32, № 1. – С. 69–74.

262. Трофимчук А. Н. Численный анализ межфазного взаимодействия в пористо-упругой насыщенной жидкостью среде / А. Н. Трофимчук, О. А. Савицкий // Обчислювальна та прикладна математика. – 1997. – № 2 (82). – С. 84–89.
263. Трофимчук А. Н. Численное моделирование динамического поведения пористоупругой насыщенной жидкостью среды / А. Н. Трофимчук // Доповіді НАН України. – 1998. – № 11. – С. 44–48.
264. Трофимчук А. Н. Сейсмостойкость сооружений с учетом их взаимодействия с грунтовым основанием / А. Н. Трофимчук. – К. : УИИОСР, 2004. – 72 с.
265. Трофимчук А. Н. Горизонтально-вращательные колебания жесткого пронизываемого штампа на двухфазном пористоупругом основании / А. Н. Трофимчук, А. М. Гомилко, О. А. Савицкий // Прикладна гідромеханіка. – 2000. – 2 (74), № 1. – С. 70–78.
266. Трофимчук А. Н. Динамика пористоупругих насыщенных жидкостью сред / А. Н. Трофимчук, А. М. Гомилко, О. А. Савицкий. – К. : Наук. думка, 2003. – 230 с.
267. Трофимчук А. Н. Моделирование сейсмических колебаний системы плитный фундамент-грунт с использованием усложненных моделей грунтового основания / А. Н. Трофимчук, О. А. Савицкий // Будівельні конструкції : Міжвід. наук.-техн. зб. наук. праць (будівництво). Механіка ґрунтів, геотехніка, фундаментобудування. Вип. 64. – К. : НДІБК, 2006. – С. 262–267.
268. Трофимчук О. М. Моделирование динамической реакции грунтовой основы под массивными фундаментами методом ортогональных полиномов / О. М. Трофимчук, О. А. Савицкий // Будівельні конструкції : Міжвід. наук.-техн. збірник наукових праць (будівництво). Механіка ґрунтів, геотехніка, фундаментобудування. Вип. 75 : В 2-х кн. : Книга 2. – К. : НДІБК, 2011. – С. 22–30.
269. Трофимчук А. Н. Импеданс и реакция водонасыщенного основания при колебаниях фундамента / А. Н. Трофимчук, О. А. Савицкий // Будівельні конструкції : Міжвід. наук.-техн. збірник наукових праць (будівництво). Будівництво в сейсмічних районах України. – Вип. 76. – К. : ДП НДІБК, 2012. ТОВ «Видавництво “Сталь”», 2012. – С. 286–293.
270. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина / К. Флетчер. – М. : Мир, 1988. – 352 с.
271. Уиттекер Э. Т. Курс современного анализа: В 2-х томах / Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. – М. : ГИФМЛ, 1963. – Т. 2. – 516 с.
272. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости / А. Ф. Улитко. – К. : Наук. думка, 1979. – 262 с.
273. Улитко А. Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости / А. Ф. Улитко. – К. : Академперіодика, 2002. – 342 с.



274. Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А. А. Ильюшина (Москва, 20–21 января 2011 года) / Под ред. проф. И. А. Кийко, проф. Г. Л. Бровко, проф. Р. А. Васина. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 2011. – 483 с.
275. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я. С. Уфлянд. – Л. : Наука, 1967. – 404 с.
276. Федорюк М. В. Интегральные преобразования. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 13 / М. В. Федорюк. – М. : ВИНТИ, 1986. – С. 211–253.
277. Франк Ф. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики / Ф. Франк, Р. Мизес. – М. : ОНТИ, 1937. – 1000 с.
278. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмoeлектрических явлений во влажной почве / Я. И. Френкель // Изв. АН СССР. Сер. географическая и геофизическая. – 1944. – 8, № 4. – С. 133–149.
279. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. – М. : Мир, 1968. – 428 с.
280. Хашпель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хашпель, Г. Бреннен. – М. : Мир, 1976 - 631 с.
281. Хенл Х. Теория диракции / Х. Хенл, А. Мауэ, А. Вестпфаль. – М. : Мир, 1964. – 428 с.
282. Хорошун Л. П. К основам термомеханики пористых насыщенных сред // Прикладная механика. – 1988. – Т. 24, № 4. – С. 3–13.
283. Хорошун Л. П. Термоупругость двухкомпонентных смесей / Л. П. Хорошун, Н. С. Солтанов; отв. ред И. А. Мотовиловец; Ин-т механики АН УССР. – К. : Наук. думка, 1984. – 112 с.
284. Чебанова Н. А. Асимптотика коэффициентов Фурье для задачи Дирихле в неограниченной области с криволинейным участком границы / Н. А. Чебанова // Вестник ЛГУ. – 1979. – 7. – С. 82–86.
285. Чернов Ю. Т. Передаточные и импульсные переходные функции в задачах динамического расчета массивных фундаментов и систем виброизоляции / Ю. Т. Чернов, А. И. Новожилов // Сейсмостойкое стр-во. Безопасность сооружений. – 2006. – № 1. – С. 55–59.
286. Шаповал В. Г. Особенности взаимодействия весомого водонасыщенного основания с расположенными на нем зданиями и сооружениями // В. Г. Шаповал, П. Н. Нажа, А. В. Шаповал. – Днепропетровск : Пороги, 2010. – 251 с.
287. Шаповал А. В. Теория взаимосвязанной фильтрационной консолидации / А. В. Шаповал, В. Г. Шаповал. – Днепропетровск : Пороги, 2009. – 311 с.
288. Шейнин И. С. Колебания конструкций гидросооружений в жидкости / И. С. Шейнин. – Л. : Энергия, 1967. – 314 с.

289. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики / Е. Л. Шендеров / Л. : Судостроение, 1972. – 352 с.
290. Шендеров Е. Л. Излучение звука при осесимметричных колебаниях конечной открытой трубы / Е. Л. Шендеров // Акуст. журнал. – 1989. – Т. **35**, № 1. – С. 138–147.
291. Шестопал А. Ф. Разложение по фундаментальным решениям эллиптических операторов / А. Ф. Шестопал. – К. : Ин-т математики АН УССР, 1968. – 208 с.
292. Шестопал В. П. Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн / А. Ф. Шестопал. – Харьков : Изд-во Харьковского ун-та, 1971. – 400 с.
293. Шехтер О. Я. Исследование распространения поверхностных волн в двухфазной среде / О. Я. Шехтер // Вибрации оснований и фундаментов. Сб. трудов НИИ по основаниям и фундаментам. – 1950. – № 16. – С. 5–28.
294. Шехтер О. Я. Об учете инерционных свойств грунтов при расчете вертикальных вынужденных колебаний массивных фундаментов // Вибрации сооружений и фундаментов. Сб. трудов. – Стройвоенмориздат. – 1948. – № 12.
295. Шехтер О. Я. О распространении сейсмических волн в водонасыщенных грунтах / О. Я. Шехтер // В сб. : Вибрации оснований и фундаментов. № 22. – М. : Госстройиздат, 1953. – С. 47–78.
296. Шехтер О. Я. Вынужденные горизонтальные колебания круглого штампа на упругом полупространстве // Основания, фундаменты и подземные сооружения. – М. : Стройиздат, 1971. – № 61.
297. Шкаликов А. А. Разложение по собственным функциям в плоской задаче теории упругости / А. А. Шкаликов // Неклассические задачи уравнений математической физики : сб. науч. тр. – Новосибирск, 1982. – С. 171–174.
298. Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях / А. А. Шкаликов // Труды сем. им. И. Г. Петровского. – 1983. – Т. **9**. – С. 190–229.
299. Шкаликов А. А. Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве / А. А. Шкаликов // Труды сем. им. И. Г. Петровского. – 1989. – Т. **14**. – С. 140–224.
300. Шульга Н. А. Основы механики слоистых сред периодической структуры / Н. А. Шульга. – К. : Наук. думка, 1981. – 200 с.
301. Шульман С. Г. Расчеты сейсмостойкости гидросооружений с учетом влияния водной среды / С. Г. Шульман. – М. : Энергия, 1976. – 336 с.
302. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении: В 2-х томах / Р. Эдвардс. – М. : Мир, 1985 – Т. 1. – 262 с.
303. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении: В 2-х томах / Р. Эдвардс. – М. : Мир, 1985. – Т. 2. – 400 с.

304. Эйслер Л. А. К вопросу о построении системы уравнений движения водонасыщенного несвязного грунта как многокомпонентной среды / Л. А. Эйслер // Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева. – 1968. – Т. 86. – С. 236–246.
305. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Емде, Ф. Леш. – М. : Наука, 1968. – 344 с.
306. Achenbach J. D. Wave propagation in Elastic Solid / J. D. Achenbach. – Amsterdam : Elsevier science publishers B. V., 1975. – 425 p.
307. Agmon S. Maximum theorems for solutions of higher order elliptic equations / S. Agmon. – Bull. Amr. Math. Soc. – 1960 – **66**, No 2. – P. 77–88.
308. Agmon S. Multiple layer potentials and the Dirichlet problem for higher order elliptic equations in the plane / S. Agmon // Comm. Pure Appl. Math. – 1957. – 10. – P. 179–238.
309. Albert D. G. A comparison between wave propagation in water-saturated and air-saturated porous materials / D. G. Albert // J. Appl. Phys. – 1993. – **73**, No 1. – P. 28–36.
310. Antes H. The boundary integral approach to contact problems / H. Antes, P. D. Panagiotopoulos. – Basel, Boston, Berlin : Birkhauser Verlag, 1992. – 307 p.
311. Apsel R. J. Impedance functions for foundations embedded in a layered medium : an integral equation approach / R. J. Apsel, J. E. Luco // Earthquake Engng Struct. Dyn. – 1987. – **15**. – P. 213–231.
312. Arnold R. N. Forced vibrations of a body on an infinite elastic solid / R. N. Arnold, G. N. Bycroft, G. B. Warburton // J. Appl. Mech. – 1955. – **E22**. – P. 391–400.
313. Bedford A. Application of Biot's equations to a medium of alternating fluid and solid layers / A. Bedford // J. Wave Mater. Interact. – 1986. – 1. – P. 34–53.
314. Biot M. A. Effect of certain discontinuities on the pressure distribution in a loaded soil / M. A. Biot // Physics. – 1935. – Vol. 6. – P. 367–375.
315. Biot M. A. General theory of three dimensional consolidation / M. A. Biot // J. Appl. Phys. – 1941. – 12. – P. 155–164.
316. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Lower-frequency range / M. A. Biot // J. Acoust. Soc. Amer. – 1956. – **28**, No 2. – P. 168–178.
317. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range / M. A. Biot // J. Acoust. Soc. Amer. – 1956. – **28**, No 2. – P. 179–191.
318. Biot M. A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media / M. A. Biot // J. Appl. Phys. – 1962. – 33. – P. 1482–1498.
319. Biot M. A. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media / M. A. Biot // J. Acoust. Soc. Amer. – 1962. – **34**, No 9. – P. 1254–1264.

320. Biot M. A. The elastic coefficients of the theory of consolidation / M. A. Biot, D. G. Willis // *Journal of applied mechanics*. – 1957. – 24. – P. 594–601.
321. Bocharov O. B. Simplest deformation models of a fluid-saturated poroelastic medium / O. B. Bocharov, V. Ya. Rudyak, A. V. Seryakov // *Journal of Mining Science*. – 2014. – V. **50**, No 2. – P. 235–248.
322. de Boer R. Highlights in the historical development of the porous media theory : Toward a consistent macroscopic theory / R. de Boer // *Appl. Mech. Rev. ASME*. – **49**, No 4. – 1996. – P. 201–262.
323. de Boer R. Reflections on the development of the theory of porous media / R. de Boer // *Appl. Mech. Rev. ASME*. – **56**, No 6. – 2003. – P. 27–42.
324. de Boer R. Trends in continuum mechanics of porous media / R. de Boer. – Dordrecht : Springer, 2005. – 280 p.
325. Bogy D. B. The effect of couple-stresses on the corner singularity due to an asymmetric shear loading / D. B. Bogy, E. Sternberg // *Int. J. Solids Struct.* – 1968. – **4**, No 2. – P. 159–174.
326. Bogy D. B. Plane steady vibration of an orthogonal elastic wedge / D. B. Bogy, K. C. Wang // *J. Elasticity*. – 1974. – V. **4**, No 1. – P. 1–16.
327. Bougacha S. Seismic analysis of gravity dams. II: effects of sediments / S. Bougacha, J. L. Tassoulas / *J. Engrg. Mech., ASCE*. – 1991. – V. 117. – P. 1839–1850.
328. Bougacha S. Dynamic stiffness of foundations on fluid-filled poroelastic stratum / S. Bougacha, J. L. Tassoulas, J. M. Roesset // *J Eng Mech Div ASCE*. – 1993. – **119**, 8. – P. 1649–1662.
329. Bourbié T. Acoustics of Porous Media / T. Bourbié, O. Coussy, B. Zinszner. – Gulf Publishing Company, Book Division, 1987. – 334 p.
330. Brovko G. L. Continuum models of discrete heterogeneous structures and saturated porous media: constitutive relations and invariance of internal interactions / G. L. Brovko, A. G. Grishayev, O. A. Ivanova // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2007. – 62. – P. 1–22.
331. Burrige R. Poroelasticity equations derived from microstructure / R. Burrige, J. B. Keller // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1981. – 70 (4). – P. 1140–1146.
332. Bycroft G. N. Forced Vibrations of a Rigid Circular Plate on a Semi-Infinite Elastic Space and on an Elastic Stratum / G. N Bycroft // *Phil. Trans. Roy. Soc. A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. – 1956. – **248**, 948. – P. 327–368.
333. Chen S. L. A new method for dynamic impedance of foundation on saturated poroelastic soil / S. L. Chen, C. Zhen // *15th World Conference on Earthquake Engineering (15 WCEE) – (24/28-Sept-2012)*. – P. 593–602.
334. Chen S.-S. A dimensionless parametric study for forced vibrations of foundation–soil systems / S.-S. Chen, K.-H. Liao, J.-Y. Shi // *Computers and Geotechnics*. – 2016. – 76. – P. 184–193.

335. Cherny H. J. A probability approach using in the plate stability research on water saturated seismic loaded foundation / H. J. Cherny, A. N. Trofymchuk, V. H. Cherny // *Geoechn. problems with man-made and man influenced grounds. Proc. XIII Europ. Conf. soil mech. and geotechn. eng. Prague, Czech Rep., 25–28 Aug. 2003, Czech geotechn. soc. CICE, 2003, Vol. 2. – P. 491–496.*
336. Chin-Bing Ling Stresses in a semi-infinite strip / Chin-Bing Ling, Fa-Hwa Cheng // *Int. J. Eng. Sci. – 1967. – 5, No 2. – P. 155–170.*
337. Chotiros N. P. An acoustic model of a laminar sand bed / N. P. Chotiros, D. J. Yelton, M. Stern // *J. Acoust. Soc. Am. – 1999. – 106 (4), 1. – P. 1681–1693.*
338. Cleary M. P. Fundamental solutions for a fluid-saturated porous solid / M. P. Cleary // *Int. J. Solids and Struct. – 1977. – 13. – P. 785–806.*
339. Cohen J. The Dirichlet problem for the biharmonic equation in a domain in a plane / J. Cohen, J. Gosselin // *Indiana Univ. Math. J. – 1983. – 32, No 5. – P. 635–685.*
340. Colton D. L. A reflection principle for solutions to the Helmholtz equation and an application to the inverse scattering problem / D. L. Colton // *Glasgow Math. J. – 1977. – V. 18. – P. 125–130.*
341. Costabel J. Boundary integral operators on curved polygons / J. Costabel // *Ann. mat. pura ed appl. – 1983. – 33. – P. 305–326.*
342. Costabel J. Curvature terms in the asymptotics expansion for solution of boundary integral equations on curved polygons / J. Costabel, E. Stephan // *J. Integral Equations. – 1983. – 3. – P. 353–371.*
343. Coussy O. Poromechanics / O. Coussy. – Chippenham : John Wiley & Sons Ltd., 2004. – 298 p.
344. Dahlberg B. E. L. The Dirichlet problem for the biharmonic equation in a Lipschitz domain / B. E. L. Dahlberg, C. E. Kenig, G. C. Verchota // *Annales de l'institut Fourier. – 1986. – 36, No 3 – P. 109–135.*
345. Dargush G. F. Dynamic analysis of axisymmetric foundation on poroelastic media / G. F. Dargush, M. B. Chopra // *J Eng Mech Div ASCE. – 1996. – 122, 7. – P. 623–632.*
346. de Barros C. P. Identification of foundation impedance functions and soil properties from vibration tests of the Hualien containment model / C. P. de Barros, and J. E. Luco // *Soil Dyn. Earthquake Eng. – 1995. – 14, 4. – P. 229–248.*
347. Deresiewicz H. On uniqueness in dynamic poroelasticity / H. Deresiewicz, R. Skalak // *Bull. Seismol. Soc. Am. – 1963. – 53, No 4. – P. 783–788.*
348. Dougoll T. An analytical theory of the equilibrium of an isotropic elastic plate / T. Dougoll // *Trans. Roy. Soc. of Edinburgh. – 1904. – Vol. 41, pt 1. – P. 143–197.*
349. Filon L. M. G. On the expansion of polynomials in series of functions / L. M. G. Filon // *Proc. London Math. Soc., 2-ser. – 1907. – V. 4. – P. 396–430.*

350. Forristal G. Z. Elastodynamics of a wedge / G. Z. Forristal, J. D. Ingram // Bull. Seismol. Soc. Amer. – 1971. – V. **61**, No 2. – P. 275–287.
351. Gautesen A. K. Scattering of a plane longitudinal wave by an elastic quarter space / A. K. Gautesen // Wave Motion. – 1985 – V. **7**, No 6. – P. 557–568.
352. Gautesen A. K. Scattering of a Rayleigh wave by an elastic wedge / A. K. Gautesen // Wave Motion. – 1987. – V. **9**, No 1. – P. 51–59.
353. Gazetas G. Formulas and charts for impedances of surface and embedded foundations / G. Gazetas // J. Geotech. Engng ASCE. – 1991. – **117**, 9. – P. 1363–1381.
354. Gerasik V. Poroelastic acoustic wave trains excited by harmonic line tractions / V. Gerasik, M. Stastna // Proc. Roy. Soc. A. Math. Phys. & Engng Sci. – 2008. – **464**. – P. 491–511.
355. Gladwell G. M. L. The calculation of mechanical impedances relating to an indenter vibrating on the surface of a semiinfinite elastic body / G. M. L. Gladwell // J. Sound Vib. – 1968. – **8**, 2. – P. 215–228.
356. Gladwell G. M. L. A contact problem for a circular cylindrical punch in adhesive contact with an elastic half-space: the case of rocking, and translation parallel to the plane / G. M. L. Gladwell // Int. J. Engng Sci. – Vol. **7**. – P. 295–307.
357. Gomitko A. M. A Dirichlet problem for the biharmonic equation in a semi-infinite strip / A. M. Gomitko // Journal of Engineering Mathematics. – 2003. – **46**, Nos 3–4. – P. 253–368.
358. Gomitko A. M. Asymptotic solution of contact harmonic problem for an impenetrable stamp on a poroelastic base / A. M. Gomitko, A. N. Trofimchuk // Inter. J. Fluid. Mech. Res. – 2001. – **28**, Nos 1–2. – P. 173–184.
359. Gomitko A. M. Harmonic vibration of a rigid impervious punch on a porous elastic base / A. M. Gomitko, N. S. Gorodetskaya, A. N. Trofymchuk // International Applied Mechanics. – 1999. – **35**, 12. – P. 1277–1286.
360. Gomitko A. M. Asymptotic solution of a harmonic contact problem for a permeable stamp on and liquid saturated base / A. M. Gomitko, O. A. Savitsky, A. N. Trofymchuk // Нелінійні коливання. – 2002. – **5**, № 1. – С. 3–22.
361. Gomitko A. M. On asymptotic behaviour of some series depending on parameter / A. M. Gomitko, A. F. Ulitko // Asymptotic Analysis. – 2007. – V. **53**, Nos 1–2. – P. 83–95.
362. Gregory R. D. Green's functions, bi-linear forms, and completeness of the eigenfunctions for the elastostatic strip and wedge / R. D. Gregory // J. Elasticity. – 1979 – **9**, No 3. – P. 283–309.

363. Gregory R. D. The semi-infinite strip  $x \geq 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ ; completeness of the Papkovitch-Fadle eigenfunctions when are  $\phi_{xx}(0, y)$ ,  $\phi_{yy}(0, y)$  prescribed / R. D. Gregory // *J. Elasticity*. – 1980 – **10**, No 1. – P. 7–80.
364. Gregory R. D. The traction boundary value problem for the elastostatic semi-infinite “strip” existence of solution and completeness of the Papkovitch-Fadle eigenfunctions / R. D. Gregory // *J. Elasticity*. – 1980 – **10**, No 3. – P. 295–327.
365. Gregory R. D. The cantilever beam under tension, bending or flexure at infinity / R. D. Gregory, I. Gladwell // *J. Elasticity*. – 1982 – **12**, No 4. – P. 317–343.
366. Gucunski N. Vertical vibrations of circular flexible foundations on layered media / N. Gucunski, R. Peek // *Soil Dyn. Earthquake Eng.* – 1993. – **12**. – P. 183–192.
367. Halpern M. R. Response of poroelastic half-space to steady-state harmonic surface tractions / M. R. Halpern, P. Christiano // *Int. J. Numer. and Anal. Meth. Geotech.* – 1986. – **10**, No 6. – P. 609–632.
368. Halpern M. R. Steady-state harmonic response of a rigid plate bearing on a liquid-saturated poroelastic half-space / M. R. Halpern, P. Christiano // *Earthquake Eng. and Struct. Dyn.* – 1986. – **14**, No 3. – P. 439–454.
369. Harper J. F. Stokes flow between parallel plates due to a transversely moving end wall / J. F. Harper, G. C. Wake // *IMA J. Appl. Math.* – 1983 – **30**, No 2. – P. 141–149.
370. Helmholtz H. Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden / H. Helmholtz // *J. reine angew. Mathem.* – 1860. – Bd. **57**, H. 1. – S. 1–72.
371. Hill N. R. Limits of convergence of the Rayleigh method for surface scattering / N. R. Hill, V. Celli // *Phys. Rev. B*. – 1978. – **17**, No 6 – P. 2478–2481.
372. Hunt J. T. Finite element approach to acoustic radiation from elastic structures / J. T. Hunt, M. R. Knittel, D. Barach // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1974. – V. **55**, No 2. – P. 269–280.
373. Japón B. R. Dynamic stiffness of foundations on saturated poroelastic soils / B. R. Japón, R. Gallego, J. Dominguez // *J. Eng. Mech.* – 1997. – V. **123**. – P. 1121–1129.
374. Jin Bo Vertical vibration of a rigid circular plate on a poroelastic half space with mixed boundary permeability condition / Bo Jin // *Acta Mech Solida Sin.* – 1999. – **20** (3). – P. 267–271.
375. Jin Bo Vertical dynamic response of a disk on a saturated poroelastic half-space / B. Jin, H. Liu // *Soil Dyn. Earthquake Eng.* – 1999. – **18**, 6. – P. 437–443.
376. Josef D. D. The convergence of biorthogonal series for biharmonic and Stokes flow edge problems. Part 1. / D. D. Josef // *SIAM J. Appl. Math.* – 1977. – **33**, No 2. – P. 337–347.

377. Josef D. D. The convergence of biorthogonal series for biharmonic and Stokes flow edge problems. Part 2. / D. D. Josef, L. Sturges // *SIAM J. Appl. Math.* – 1978. – **34**, No 1. – P. 7–26.
378. Josef D. D. Convergence of biorthogonal series of biharmonic eigenfunctions by the method of Titchmarsh / D. D. Josef, L. D. Sturges, W. H. Warner // *Archiv Rat. Mech. Anal.* – 1982. – 78. – P. 223–279.
379. Junger M. Sound, structures and their interaction / M. Junger, D. Feit. – MIT: Cambridge, 1972. – 448 p.
380. Kassir M. K. Vertical vibration of a circular footing on a saturated half space / M. K. Kassir, K. K. Bandyopadhyay, J. Xu // *Int. J. Eng. Sci.* – 1989. – 27. – P. 353–361.
381. Kassir M. K. Rotary and horizontal vibrations of a circular surface footing on a saturated elastic half-space / M. K. Kassir, J. Xu, K. K. Bandyopadhyay // *Int. J. Solids Struct.* – 1996. – 33. – P. 265–281.
382. Kim Y. Dynamic characterization of poroelastic materials / Y. Kim, H. Kingsbury // *Exp. Mech.* – 1979. – **19**. – P. 252–258.
383. Kim Y. Y. Modifications of series expansions for general end conditions and corner singularities on the semi-infinite strip / Y. Y. Kim, C. R. Steele // *J. Appl. Mech.* – 1990. – 57. – P. 581–588.
384. Kingsbury H. B. Determination of material parameters of poroelastic media / H. B. Kingsbury // *Transport phenomena in porous media*. Eds J. Bear, M. Y. Corapcioglu. – Dordrecht, Boston, Lancaster : Martinus Nijhoff Publ., 1984. – P. 581–615.
385. Kurashige M. Identification of the Biot model of fluid-filled porous media by spectrum analysis (proposal of method) / M. Kurashige, T. Ohyoshi // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A.* – 1992. – **58**, No 552. – P. 1467–1473.
386. Lamb H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid / H. Lamb // *Phil. Trans. Roy. Soc. London.* – 1904. – **A.203**. – P. 1–42.
387. Levin L. On the inadequacy of discrete mode-matching techniques in some waveguide discontinuity problem / L. Levin // *IEEE*. – 1970. – **MTT-18**. – No 7. – P. 364–369.
388. Liang J. In-plane soil-structure interaction in layered, fluid-saturated, poroelastic half-space. I : Structural response / J. Liang, J. Fu, M. I. Todorovska, M. Trifunac // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering.* – 2016. – 81. – P. 84–111.
389. Luco J. E. Dynamic response of a rigid footing bonded to an elastic half space / J. E. Luco, R. A. Westmann // *J. Appl. Mech.* – 1972. – **39**, 2. – P. 527–534.
390. Luco J.E. Impedance functions for a rigid foundation on a layered medium / J.E. Luco // *Nuclear Engineering and Design.* – 1974. – 31. – P. 204–217.



391. Lysmer J. Shear Waves in Plane Infinite Structures / J. Lysmer, G. Waas // Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE. – 1972. – V. **98**, Is. 1. – P. 85–105.
392. Mei C. C. Wave-induced responses in a fluid-filled poro-elastic solid with a free surface – a boundary layer theory / C. C. Mei and M. A. Foda // Geophys. J. R. astr. Soc. – 1981. – **66**. – P. 597–631.
393. Millar R. F. On the Rayleigh assumption in scattering by a periodic surface / R. F. Millar // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1969. – 65. – P. 773–791.
394. Millar R. F. On the Rayleigh assumption in scattering by a periodic surface. II. / R. F. Millar // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1971. – 69. – P. 217–225.
395. Miranda C. Theorema del massimo modulo e theorema di esistenza edunicata per il problema Dirichlet relative alle equazioni ellitiche in due variabili / C. Miranda // Ann. Math. Pure Appl. – 1958. – 46. – P. 265–311.
396. Norris A. N. Radiation from a point source and scattering theory in a fluid-saturated porous solid / A. N. Norris // J. Acoust. Soc. Am. – 1985. – **77**, 6. – P. 2012–2023.
397. Norris A. N. On the viscodynamic operator in Biot's equation of poroelasticity / A. N. Norris // Journal of Wave-Material Interaction. – 1986. – **1**, 4. – P. 365–380.
398. Nussenzveig H. M. Solution of adiffraction problem, II / H. M. Nussenzveig // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. – 1959. – **252**. – P. 31–51.
399. Oien M. A. Steady motion of rigid strip bonded an elastic halfspace / M. A. Oien // Paper of the ASME. WA/APM. – 1970. – 56. – P. 1–7.
400. Pak R. Y. S. Rocking rotation of a rigid disc in a half-space / R. Y. S. Pak, J.-D. M. Saphores // Int. J. Struct. – 1991. – 3. – P. 389–401.
401. Petit R. Sur la diffraction d'une onde plane par un reseau infiniment conducteur / R. Petit, M. Cadilhac // C.R. Acad. Sc. Paris, ser. B. – 1966. – **262**, No 7. – P. 468–471.
402. Philippacopoulos A. J. Axisymmetric vibration of disk resting on saturated layered half space / A. J. Philippacopoulos // J Eng Mech Div ASCE. – 1989. – **115**, 9. – P. 1867–1881.
403. Richart F. E. Jr Comparison of footing vibration tests with theory / F. E. Richart Jr, R. V. Whitman // Journal of Soil Mechanics & Foundations Div. – 1967. – **93**, No SM6. – P. 143–168.
404. Rocking vibration of a rigid strip footing on saturated soil / X. H. Ma, Y. M. Cheng, S. K. Au et al. // Computers and Geotechnics. – 2009. – 36. – P. 928–933.
405. Rogers P. H. Mathematical model for a free-flooded piezoelectric cylinder transducer / P. H. Rogers // J. Acoust. Soc. Amer. – 1986. – V. **80**, No 1. – P. 13–18.

406. Rosenbaum J. N. Synthetic microseismograms: logging in porous formations // *Geophysics*. – 1974. – **39**, No 1. – P. 14–32.
407. Sandig A.-M. Das Maximum-Prinzip fur Miranda-Agmon-Typ fur Lozungen der biharmonischen Gleichung in einem Rechteck / A.-M. Sandig // *Math. Nachr.* – 1980. – 96. – S. 49–51.
408. Sawicki A. Mechanics of a sandy subsoil subjected to cyclic loadings / A. Sawicki, W. Świdziński // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* – 1989. – **13**, 5. – P. 511–529.
409. Schanz M. Dynamic fundamental solutions for compressible and incompressible modeled poroelastic continua / M. Schanz, D. Pryl // *Int. J. of Solids and Structures*. – 2004. – 41. – P. 4047–4073.
410. Schanz M. Wave propagation in a simplified modelled poroelastic continuum : Fundamental solutions and a time domain boundary element formulation / M. Schanz, V. Struckmeier // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* – 2005. – 64. – P. 1816–1839.
411. Schiff P. A. Sur l'équilibre dun elastique / P. A. Schiff // *T. Math. pures et appl.* – 1983. – Ser. 3., T. 9. – P. 407–421.
412. Schmidt H. Vibration of elastic circular plate on an elastic halfspace – a direct approach / H. Schmidt, S. Krenk // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1981. – **48**, No 2. – P. 161–168.
413. Schmidt H. Asymmetric vibrations of a circular elastic plate on an elastic half space // H. Schmidt, S. Krenk / *International Journal of Solids and Structures*. – 1982. – **18**, 2. – P. 91–105.
414. Seif J. B. On the Green's functions for the biharmonic equation in an infinite wedge / J. B. Seif // *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1973. – **182**, No 1 – P. 241–260.
415. Seimov V. M. Dynamic contact problems of the theory of saturated porous media / V. M. Seimov, A. N. Trofimchuk // “Waves in saturated Porous Media”. *Euromech Colloquium 264*, Poznan, Poland : August 28–31, 1990. – IPPT PAN. – 1990. – P. 70–71.
416. Selvadurai A. P. S. On the indentation of a poroelastic layer / A. P. S. Selvadurai, Z. Q. Yue // *Int. j. numer. anal. methods geomech.* – 1994. – **18**. – P. 161–175.
417. Senjuntichai T. Dynamics of a rigid strip bonded to a multilayered poroelastic half-plane / T. Senjuntichai, R. K. N. D. Rajapakse // In : Selvadurai A. P. S., editor. *Mechanics of poroelastic media*. – Dordrecht (The Netherlands) : Kluwer Academic, 1996. – P. 353–369.
418. Senjuntichai T. Forced vertical vibration of circular plate in multilayered poroelastic medium / T. Senjuntichai, Y. Sapsathiarn // *J Eng Mech Div ASCE*. – 2003. – **129**, 11. – P. 1330–1341.
419. Senjuntichai T. Vertical vibration of an embedded rigid foundation in a poroelastic soil / T. Senjuntichai, S. Mania, R. K. N. D. Rajapakse // *Soil Dyn. Earthquake Engng.* – 2006. – **26**, 6–7. – P. 626–636.

420. Sezawa K. Further studies on Rayleigh waves having some azimuthal distribution / K. Sezawa // Bulletin of the Earthquake Research Institute. Tokyo. – 1929. – 6. – P. 1–18.
421. Shun-Lien Chuang Scattering of waves from periodic surfaces / Shun-Lien Chuang, Jin Au Kong // Proc. IEEE. – 1981. – **69**, No 9 – P. 1132–1144.
422. Silverberg M. An efficient method for numerical Laplace transform inversion based on error control / M. Silverberg // IEEE Intern. Conv. Rec. – 1967. – **15**, No 5. – P. 117–120.
423. Simos N. Impedance function calculations for saturated layered soils / N. Simos, A. J. Philippacopoulos et al. // Transactions, SMiRT 16, Washington DC, August 2001, Paper No 1755. – P. 1–8.
424. Skempton A. W. The pore-pressure coefficients A and B / A. W. Skempton. – Géotechnique. – 1954. – V. **4**, Is. 4. – P. 143–147.
425. Smith G. M. Elements of Soil Mechanics. Seventh edition / G. M. Smith. – BSP Professional Books, 1990. – 509 p.
426. Spence D. A. A class of biharmonic end-strip problems arising in elasticity and Stokes flow / D. A. Spence // IMA J. Appl. Math. – 1983. – **30**, No 2 – P. 107–139.
427. Stoll R. D. Wave attenuation in saturated sediments / R. D. Stoll, G. M. Bryan // J. Acoust. Soc. Amer. – 1970. – **47**, No 5. – Part 2. – P. 1440–1447.
428. Stoll R. D. Reflection of acoustic waves at water-sediment interface / R. D. Stoll, T.-K. Kan // J. Acoust. Soc. Am. – 1981. – **70**, 1. – P. 149–156.
429. Stoll R. D. Marine sediment acoustics / R. D. Stoll // J. Acoust. Soc. Amer. – 1985. – **77**, 5. – P. 1789–1799.
430. Stoll R. D. Comments on “Biot model of sound propagation on water-saturated sand” [J. Acoust. Soc. Amer., 97, 199–214, (1995)] / R. D. Stoll // J. Acoust. Soc. Amer. – 1998. – **103**, 5, Pt. 1. – P. 2722–2725.
431. Strutt J. W. (Lord Rayleigh) On the theory of resonance / J. W. Strutt (Lord Rayleigh) // Phil. Trans. Roy. Soc. L. – 1871. – 161. – P. 77–118.
432. Sun F. Wave propagation theory in anisotropic periodically layered fluid-saturated porous media / F. Sun, P. Banks-Lee, H. Peng // J. Acoust. Soc. Amer. – 1993. – **93**, No 3. – P. 1277–1285.
433. Terzaghi K. / Theoretical soil mechanics / K. Terzaghi. – New York, London : John Wiley and Sons, Inc., 1943. – 510 p.
434. Torvic P. J. Reflections of wave trains in semiinfinite plates / P. J. Torvic // J. Acoust. Soc. Amer. – 1967. – **41**, No 2. – P. 346–353.
435. Trofymchuk O. M. Dynamic contact problems for poroelastic liquid-saturated half-space / O. M. Trofymchuk, O. M. Gomilko, O. A. Savitsky // Proceedings of the second Biot conference on poromechanics, Grenoble, France, 26–28 aug., 2002. – Poromechanics II, Auriault et al (eds). – P. 833–838.

436. Trofimchuk A. N. Horizontal rotational oscillations of a rigid permeable die placed on a two-phase poroelastic base / A. N. Trofimchuk, A. M. Gomilko, O. A. Savitsky // *Inter. J. Fluid. Mech. Res.* – 2002. – **29**, 5. – 14 p.
437. Turgut A. Measurements of acoustic wave velocities and attenuation in marine sediments / A. Turgut, T. Yamamoto // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1990. – **87**, 6. – P. 2376–2383.
438. Ulitko A. F. Torsional load transfer from a rigid shaft to an elastic plane with a slit / A. F. Ulitko, V. V. Lyakh // *Journal of Engineering Mathematics.* – 2003. – **6**, Nos 3–4. – P. 395–408.
439. Wang K. C. Plane steady vibration of an elastic wedge / K. C. Wang, D. B. Bogy // *J. Elasticity.* – 1975. – V. **5**, No 1 – P. 15–30.
440. Waterman P. C. Matrix theory of elastic wave scattering / P. C. Waterman // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1976. – V. **60**. – P. 567–580.
441. Wilmanski K. A few remarks on Biot's model and linear acoustics of poroelastic saturated materials / K. Wilmanski // *Soil Dyn. Earthquake Engng.* – 2006. – 26. – P. 509–536.
442. Yamamoto T. Acoustic propagation in the ocean with a poro-elastic bottom / T. Yamamoto // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1983. – **73**, 5. – P. 1587–1596.
443. Zeng X. Vertical vibrations of a rigid disk embedded in a poroelastic medium / X. Zeng, R. K. N. D. Rajapakse // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* – 1999. – 23. – P. 2075–2095.

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ГЛАВ 1, 6, 7

ПУНЖ	–	пористоупругая насыщенная жидкостью (среда)
$A, \mathcal{N}, Q, \mathcal{R}$	–	упругие постоянные ПУНЖ среды, Па
$a$	–	полуширина участка приложения нагрузки, полуширина прямоугольной подошвы штампа или радиус круглого штампа, м
$b$	–	полудлина прямоугольного участка приложения нагрузки или полудлина прямоугольной подошвы штампа, м
$b$	–	коэффициент диссипации в двухфазной среде, $\text{кг}/(\text{м}^3 \text{с})$
$B$	–	безразмерный коэффициенты диссипации в двухфазной среде
$c$	–	обобщенная скорость волн в двухфазной среде, м/с
$c_0$	–	скорость звука в жидкости, м/с
$c_1$	–	скорость продольной волны, м/с
$c_{12}$	–	скорость второй продольной волны в двухфазной среде, м/с
$c_2$	–	скорость поперечной волны, м/с
$e_{ij}$	–	тензор деформации твердой фазы двухфазной среды
$f$	–	частота, Гц
$\mathbf{F}(\omega)$	–	функция, учитывающая зависимость взаимодействия фаз от частоты
$g$	–	ускорение силы тяжести, $9,81 \text{ м}/\text{с}^2$
$H(\cdot)$	–	функция Хевисайда, ступенчатая единичная функция
$K_{pr}$	–	коэффициент проницаемости, $\text{м}^2$
$K_r$	–	истинный модуль сжимаемости зерен твердой фазы, Па
$K_s = \lambda + 2\mu/3$	–	модуль всестороннего сжатия пористого скелета (матрицы) с пустыми порами, Па
$K_0$	–	модуль объемной сжимаемости жидкости, Па
$k_f$	–	коэффициент фильтрации, м/с
$M_c$	–	масса прямоугольного штампа, кг

$m_s = M_c / (\pi^2 a^3 \rho_e)$	–	безразмерный параметр массы прямоугольного штампа на двухфазном основании
$p$	–	параметр преобразования Лапласа по времени, $\text{с}^{-1}$
$p_0$	–	гидродинамическое поровое давление, Па
$q = (\vartheta - 1) / \vartheta$	–	обозначение
$r = \bar{r} / a, z = \bar{z} / a$	–	безразмерные цилиндрические координаты
$\bar{r}, \theta, \bar{z}$	–	цилиндрические координаты, м
$\bar{r}_0$	–	радиус цилиндрической конструкции, м
$s$	–	параметр преобразования Лапласа по безразмерному времени
$t = \bar{t} c_2 / a$	–	безразмерное время
$\bar{t}$	–	время, с
$\vec{U}, U_i$	–	вектор и компоненты вектора перемещения жидкой фазы в двухфазной среде, м
$\vec{u}, u_i$	–	вектор и компоненты вектора перемещения твердой фазы в двухфазной среде, м
$x = \bar{x} / a, y = \bar{y} / a,$		
$z = \bar{z} / a$	–	безразмерные декартовы координаты
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	–	декартовы координаты, м
$\alpha = b / a$	–	отношение сторон прямоугольного штампа
$\Delta = \nabla^2$	–	оператор Лапласа
$\delta_{ij}$	–	символ Кронекера
$\delta(\cdot)$	–	дельта-функция Дирака
$\gamma$	–	коэффициент затухания в вязкоупругой среде
$\varepsilon_{ij}$	–	тензор деформации жидкой фазы двухфазной среды
$\lambda, \mu$	–	параметры Ламе однородной упругой среды, Па
$\nu$	–	коэффициент Пуассона упругой среды (скелета грунта)
$\theta_0$	–	динамическая (абсолютная) вязкость поровой жидкости, Па·с
$\vartheta$	–	открытая осредненная пористость твердой фазы двухфазной среды
$\rho_h$	–	плотность материала упругого полупространства, $\text{кг}/\text{м}^3$
$\rho_B$	–	плотность жидкости (воды), $\text{кг}/\text{м}^3$
$\rho_f$	–	плотность жидкой фазы (поровой жидкости), $\text{кг}/\text{м}^3$
$\rho_s$	–	плотность минерала скелета грунта, $\text{кг}/\text{м}^3$

$\rho_{12}$	–	параметр инерционной связи фаз в модели Био, кг/м <sup>3</sup>
$\rho_{11} =$		
$= (1 - \vartheta) \rho_s - \rho_{12}$	–	плотность пористого скелета грунта, кг/м <sup>3</sup>
$\rho_{22} = \vartheta \rho_f - \rho_{12}$	–	плотность жидкой фазы грунта, кг/м <sup>3</sup>
$\rho_e = \rho_{11} - \rho_{12}^2 / \rho_{22}$	–	плотность двухфазной среды, кг/м <sup>3</sup>
$\rho$	–	плотность материала штампа, кг/м <sup>3</sup>
$\sigma_{ij}$	–	компоненты тензора напряжений в упругой среде, Па
$\sigma_{ij}^{ef}$	–	компоненты тензора эффективных напряжений в твердом скелете, Па
$\sigma^f$	–	сила, действующая на поровую жидкость, отнесенная к единице поперечного сечения пористой среды, Па
$\tau$	–	касательное напряжение на границе твердого тела, Па
$\xi, \eta$	–	параметры преобразования Фурье (по декартовым координатам)
$\xi$	–	параметр преобразований Ханкеля (по радиусу в цилиндрических координатах)
$\zeta$	–	безразмерная частота колебаний
$\omega = 2\pi f$	–	круговая частота установившихся колебаний, 1/с
$\nabla$	–	векторный дифференциальный оператор Гамильтона, градиент
$\equiv$	–	знак между функцией и ее интегральным преобразованием Лапласа

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	3
ГЛАВА 1 ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД И ОБ- ЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИСПОЛЪЗУЕМЫХ МЕТОДОВ	5
1.1 Уравнения акустики . . . . .	5
1.2 Уравнения динамической теории упругости . . . . .	8
1.3 Уравнения движения пористоупругой насыщенной жидкостью среды . . . . .	14
1.3.1 Многофазные модели грунтовой среды . . . . .	14
1.3.2 Уравнения модели Био . . . . .	17
1.4 Методы суперпозиции и собственных функций . . . . .	27
1.5 Метод ортогональных многочленов . . . . .	33
1.6 Интегральные преобразования . . . . .	39
1.6.1 Преобразование Фурье . . . . .	39
1.6.2 Преобразование Лапласа . . . . .	41
1.6.3 Преобразование Меллина . . . . .	44
1.6.4 Преобразование Ханкеля . . . . .	45
ГЛАВА 2 ИНТЕГРОАЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА СУПЕРПОЗИЦИИ	48
2.1 Интегральные уравнения метода суперпозиции . . . . .	49
2.2 Об одном классе бесконечных систем алгебраических уравнений	61
2.3 Закон асимптотических выражений в абстрактной формулировке	76
2.4 Бесконечная система линейных алгебраических уравнений в за- даче теории потенциала . . . . .	85
2.5 Асимптотическое поведение некоторых рядов, зависящих от па- раметра . . . . .	104
ГЛАВА 3 МЕТОД СУПЕРПОЗИЦИИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ	117
3.1 Задача Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе	118
3.2 Бигармоническая задача в прямоугольнике . . . . .	136



3.3	Связь методов суперпозиции и собственных функций . . . . .	148
3.4	Задача Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе с криволинейным торцом. Сведение к системе интегральных уравнений . . . . .	157
3.5	Разрешимость задачи Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе с криволинейным торцом . . . . .	170
ГЛАВА 4		
МЕТОД СУПЕРПОЗИЦИИ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И АКУСТИКИ		180
4.1	Плоская задача о деформировании упругой полуполосы . . . . .	180
4.2	Смешанная граничная задача для полуполосы . . . . .	188
4.3	Гармонические волны в полубесконечном слое . . . . .	193
4.4	Динамическая задача для четверть-плоскости . . . . .	199
4.5	Принцип отражения в плоских задачах акустики . . . . .	208
4.6	Задача об акустическом волноводе . . . . .	220
4.7	Задача об излучении звука конечной цилиндрической оболочкой	232
ГЛАВА 5		
МЕТОД СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ		242
5.1	Сходимость разложений по собственным функциям в бигармонической задаче для полуполосы . . . . .	243
5.2	Расходимость рядов по собственным функциям . . . . .	249
5.3	Разложение по собственным функциям в задаче о деформировании упругой полуполосы . . . . .	253
5.4	Асимптотика коэффициентов разложения по собственным функциям в смешанной задаче для упругой полуполосы . . . . .	258
5.5	Бигармоническое уравнение в полуполосе с криволинейным торцом . . . . .	263
5.6	Ограниченная применимость гипотезы Рэлея в задаче об отражении волны Рэлея-Лэмба от криволинейного торца волновода	270
5.7	Однородные решения в задаче о равновесии упругого цилиндра	277
ГЛАВА 6		
МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ. ДИНАМИЧЕСКИЕ НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КРУГЛОГО ШТАМПА НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ		285
6.1	Нестационарные неосесимметричные контактные задачи для круглого штампа на упругом полупространстве . . . . .	286
6.1.1	Перемещения при однонаправленной горизонтальной нагрузке . . . . .	289
6.1.2	Перемещения при вертикальной нагрузке, антисимметричной относительно диаметра круга . . . . .	291
6.1.3	Горизонтальные колебания круглого штампа . . . . .	293

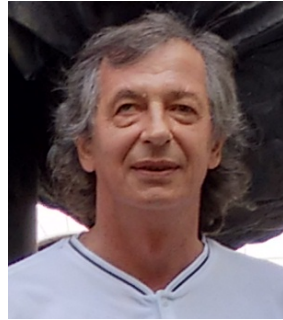
6.1.4	Поворот круглого штампа в вертикальной плоскости . . .	297
6.1.5	Горизонтально-вращательные колебания круглого штампа	307
6.2	Колебания цилиндра в слое жидкости на упругом полупространстве . . . . .	313
6.2.1	Горизонтальные колебания жесткого цилиндра в слое жидкости на жестком основании . . . . .	314
6.2.2	Жесткий цилиндр на упругом полупространстве под слоем жидкости при горизонтальных колебаниях . . . . .	317
6.2.3	Колебаниях упругого цилиндра в слое жидкости на упругом полупространстве . . . . .	326
ГЛАВА 7		
МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ. ШТАМП НА ПУНЖ		
ОСНОВАНИИ		
7.1	Грунтовое водонасыщенное основание сооружений . . . . .	341
7.2	Вертикальные колебания прямоугольного штампа с непроницаемой подошвой на ПУНЖ полупространстве . . . . .	346
7.2.1	Перемещения ПУНЖ полупространства при действии нормальной нагрузки . . . . .	350
7.2.2	Динамическая контактная задача при вертикальных колебаниях прямоугольного штампа . . . . .	353
7.2.3	Расчет импеданса основания . . . . .	364
7.2.4	Расчет реакций с учетом массы штампа . . . . .	371
7.3	Динамика фундамента на слое водонасыщенного грунта . . . . .	374
7.3.1	Перемещения свободной грани слоя от вертикальной распределенной нагрузки . . . . .	375
7.3.2	Решение динамической контактной задачи . . . . .	381
7.3.3	Импеданс и реакция слоя . . . . .	387
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .		397
ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ГЛАВ 1, 6, 7 . . . . .		428
ОГЛАВЛЕНИЕ . . . . .		430

### **Гомілко Олександр Михайлович**

доктор фізико-математичних наук, професор, професор факультету математики та інформатики Університету Миколая Коперніка, м. Торунь, Республіка Польща.

Наукові інтереси: півгрупи лінійних операторів, спектральна теорія звичайних диференціальних операторів, граничні задачі математичної фізики.

Автор більш як 120 наукових праць, в тому числі 2-х монографій.



### **Alexander Gomilko**

D. Sc. in Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Faculty of Mathematics and Computer Science in Nicolaus Copernicus University, Toruń, Poland.

Scientific interests: semigroup of linear operators, spectral theory of ordinary differential operators, boundary value problems in mathematical physics.

Author of more than 120 scientific works including 2 monographs.

### **Савицький Олег Анатолійович**

доктор технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу гідродинамічної акустики Інституту гідромеханіки НАН України, м. Київ.

Наукові інтереси: динамічна взаємодія фундаментів споруд з ґрунтовою основою, динамічні контактні задачі.

Автор більш як 60 наукових праць, в тому числі 3-х монографій.

E-mail: [osavitsky@ukr.net](mailto:osavitsky@ukr.net)



### **Oleh Savitskyi**

D. Sc. in Engineering, senior researcher, leading researcher of Hydrodynamic Acoustic Department in Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine, Kyiv.

Scientific interests: dynamic interaction between constructions foundations and soil base, dynamic contact problems.

Author of more than 60 scientific works including 3 monographs.

## **Трофимчук Олександр Миколайович**

член-кореспондент НАН України, доктор технічних наук, професор, директор Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, м. Київ.

Лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, Заслужений діяч науки і техніки України.

Наукові інтереси: динамічні моделі ґрунтових середовищ, сейсмостійкість споруд; дослідження екологічної безпеки з використанням геоінформаційних систем та даних дистанційного зондування Землі.

Автор більш як 460 наукових праць, в тому числі більше 20 монографій.



## **Oleksandr Trofymchuk**

Corresponding Member of National academy of Sciences of Ukraine, D. Sc. in Engineering, Professor, Director of the Institute of Telecommunication and Global Information Space of NAS of Ukraine, Kyiv.

Laureate of the State Prize of Ukraine in the field of science and technology, Honored master of sciences and engineering of Ukraine.

Scientific interests: dynamic models of soil grounds, constructions seismic resistance; study of environmental safety using GIS and ERS methods.

Author of more than 460 scientific works including more than 20 monographs.

**Наукове видання**

**Національна академія наук України**

**Інститут телекомунікацій  
і глобального інформаційного простору, м. Київ**

**Інститут гідромеханіки, м. Київ**

**Університет Миколая Коперніка, м. Торунь, Республіка Польща**

**ГОМІЛКО** Олександр Михайлович

**САВИЦЬКИЙ** Олег Анатолійович

**ТРОФИМЧУК** Олександр Миколайович

**МЕТОДИ СУПЕРПОЗИЦІЇ, ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ  
ТА ОРТОГОНАЛЬНИХ БАГАТОЧЛЕНІВ  
У ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ І АКУСТИКИ**

Російською мовою

**Київ, Науково-виробниче підприємство  
«Видавництво “Наукова Думка” НАН України», 2016**

Підписано до друку 28.12.2016 р.

Формат 60х90/16. Друк офсетний.

Ум.-друк. арк. 27.5. Тираж 300 прим. Зам. № 12/017

Надруковано на поліграфічному комплексі

Видавничого дому «Юстон»

01034, м. Київ, вул. О. Гончара, 36.

Тел.: (044) 360-22-66

Реєстраційне свідоцтво НБ № 153324 від 05.11.2012 р.