

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙ І ГЛОБАЛЬНОГО ІНФОРМАЦІЙНОГО
ПРОСТОРУ**

ЧЕРНІЙ ДМИТРО ІВАНОВИЧ

УДК 517.9; 519.6; 532.5

**МЕТОДОЛОГІЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ТЕХНОЛОГІЇ МОДЕЛЮВАННЯ
АЕРОГІДРОДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ**

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

**Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук**

Київ – 2021

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті телекомунікацій і глобального інформаційного простору Національної академії наук України.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук, професор, академік Національної академії наук України
Довгий Станіслав Олексійович,
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору Національної академії наук України, завідувач відділу фізичного і математичного моделювання

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор, член-кор. Національної академії наук України
Хіміч Олександр Миколайович,
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова Національної академії наук України, заступник директора

доктор технічних наук, професор
Ванін Віктор Антонович,
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»,
професор кафедри вищої математики,

доктор технічних наук, професор
Бомба Андрій Ярославович,
Національний університет водного господарства та природокористування, професор кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики

Захист відбудеться «__» _____ 2021 року о ____ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.255.01 в Інституті телекомунікацій і глобального інформаційного простору Національної академії наук України за адресою: 03186, м. Київ, Чоколівський бульвар, 13, кім. № 601.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору Національної академії наук України за адресою: 03186, м. Київ, Чоколівський бульвар, 13.

Автореферат розісланий «__» _____ 2021 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
кандидат технічних наук,
старший дослідник

О.Г. Лебідь

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Сьогоднішні вимоги до безпеки технологічних процесів, підтримки високого рівня надійності та стійкості споруд, забезпечення контролю за станом навколишнього середовища потребують високого рівня проектних робіт, передбачення імовірних загроз, прогнозування розвитку небажаних або небезпечних процесів з можливістю вчасного реагування на них з метою запобігання виникненню надзвичайних ситуацій. Все більш важливим стає запобіжне реагування (активний вплив) на розвиток процесів, що почалися в результаті природних катастроф або техногенних аварій, задля зменшення або послаблення їх шкідливих наслідків.

З розвитком обчислювальної техніки математичне моделювання стає одним з основних інструментів прогнозування швидкоплинних процесів. Так, при виникненні метеорологічних та гідрологічних катаклізмів, надзвичайних ситуацій на підприємствах, що сталися внаслідок техногенних або природних катастроф, з викидом забруднюючих речовин в повітря або водне середовище, саме прогнозування їх розповсюдження під впливом різноманітних факторів стає основною задачею для вчасного визначення сценаріїв ефективного запобігання небезпечному впливу. Потреба в обчислювальних технологіях, здатних забезпечувати моделювання динамічних процесів та виявлення критичних впливів у масштабі реального часу, визначається гострою необхідністю їх застосування в моделюючих системах, призначених для виявлення загроз небезпечних аварій і катастроф та прогнозування їх наслідків. Ці технології призначені для систем оперативного прогнозування, інформаційного забезпечення систем підтримки прийняття рішень та управління швидкоплинними процесами. Все це робить тему досліджень надзвичайно **актуальною**.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Основна частина наукової роботи за тематикою дисертації виконувались в рамках досліджень, які проводились в Інституті телекомунікацій і глобального інформаційного простору Національної академії наук України (ІТГП НАНУ), при виконанні наукових досліджень за темами:

– «Розробка програмно-моделюючої системи для дослідження нестационарних нелінійних аераційних процесів та експертизи стійкості і динаміки конструкцій та споруд під аерогідродинамічним впливом в системах підтримки прийняття інженерних рішень» (2007-2009рр., номер Державної реєстрації теми 0107U000563);

– «Розробка математичних моделей, методів та алгоритмів для програмно-моделюючих систем інженерно-технологічного призначення» (2010-2012рр., номер Державної реєстрації теми 0110U002719);

– «Розробка обчислювальних технологій моделювання нестационарних фізичних процесів» (2013-2015рр., номер Державної реєстрації теми 0112U007538);

– «Розробка обчислювальних технологій та методів моделювання для дослідження нестационарних процесів» (2016-2020рр., номер Державної реєстрації теми 0116U000793).

Об'єкт досліджень – гідроаеродинамічні процеси, вихорові та циркуляційні течії, відривні ефекти режимів обтікання, струменеві явища.

Предмет досліджень – методи моделювання гідродинамічних процесів та систем, нелінійні нестационарні моделі, обчислювальні алгоритми та обчислювальні технології комп'ютерного моделювання.

Мета і завдання дослідження

Основною метою дисертаційної роботи є розв'язання науково-прикладної проблеми підвищення ефективності моделювання аерогідродинамічних процесів та систем шляхом урахування їх особливостей і спеціальних властивостей, створення технологій моделювання, придатних для застосування в комп'ютерних системах прогнозування та керування швидкоплинними процесами в реальному масштабі часу.

Для досягнення поставленої мети в роботі необхідно вирішити наступні завдання:

1. Розробити методологію побудови обчислювальних технологій моделювання, придатних для застосування в комп'ютерних системах online прогнозування, інформаційної підтримки прийняття рішень та забезпечення керування швидкоплинними процесами;
2. Розробити математичні моделі течій, з врахуванням в'язких, тривимірних та відривних ефектів, які придатні для використання в обчислювальних технологіях моделювання швидкоплинних аерогідродинамічних процесів в реальному масштабі часу.
3. Розробити методи та алгоритми обчислень кінематичних та динамічних характеристик аерогідродинамічного процесу, які придатні для моделювання швидкоплинних аерогідродинамічних змін в реальному масштабі часу;
4. Побудувати обчислювальну технологію призначену для застосування в комп'ютерних системах моделювання та забезпечення прогнозування швидкоплинних аерогідродинамічних процесів в реальному масштабі часу.

Методи досліджень. В роботі використовувались методи математичного аналізу та математичної фізики, обчислювальні методи, а також методи теорії розмірностей та лабораторного моделювання.

Наукова новизна результатів дисертаційної роботи полягає в тому, що в ній

– *вперше:*

1) розроблено методологію побудови обчислювальних технологій, здатних забезпечити моделювання за умов реального часу, призначених для застосування в комп'ютерних системах експрес-прогнозування швидкоплинних аерогідродинамічних процесів;

2) запропоновано нову методологію опису циркуляційної течії та процесів масопереносу у шарі скінченної товщини навколо перешкод, яка базується на зрощуванні розв'язків теорії потенціалу з розв'язками теорії в'язкого шару скінченної товщини та застосуванні підходу Лагранжа при побудові математичних моделей адвекції поверхневих забруднень в акваторіях;

3) розроблено обчислювальну технологію, що базується на дискретизованих моделях сингулярних та гіперсингулярних інтегральних представлень, методах та

алгоритмах перетворення систем дискретних особливостей, яка надає можливість визначати за умов реального часу динамічні параметри аерогідродинамічних процесів та явищ.

4) створено новий метод та алгоритм перетворення системи дискретних особливостей для коректного обчислення значень характеристичних функцій математичних моделей, які засновані на сингулярних та гіперсингулярних інтегральних представленнях. Перетворення системи дискретних особливостей є основою нового методу визначення значень локальних та розподілених динамічних характеристик процесу, що обираються із вже існуючих розв'язків вихідної кінематичної задачі, що надає можливість явного визначення впливів рухомості та деформовності границь, нестационарності течії, відриву та вихороутворення.

– *удосконалено:*

1) метод дискретних замкнених вихорових елементів для створення моделей тривимірних циркуляційних течій, що виникають під впливом багатозв'язних вихрових структур. Розроблено моделі, із застосуванням яких встановлено особливості взаємодії струменевих течій з граничною поверхнею та виявлено умови виникнення ефекту інверсії струменю при заданій формі отвору;

2) модель Лагранжа відносно розповсюдження забруднень на водній поверхні, яка базується на методах розв'язування задач адвекції. В моделі враховано умови гладкості границь області та мінливість впливів зовнішніх факторів (вітру, нагонних течій) на формування домінуючих течій. На цій основі продемонстровано, як забезпечення умов гладкості меж області впливає на коректність обчислювальної задачі;

– *набули подальшого розвитку:*

1) топологічний підхід до побудови дискретизованих моделей тривимірних вихрових течій з розривами полів швидкостей, як узагальнення методу дискретних вихорних елементів;

2) метод дискретних особливостей, з виявленням нових властивості для його застосування в системах експрес-прогнозування швидкоплинних аерогідродинамічних процесів;

3) методологія гідродинамічних досліджень, тестування та верифікації моделей нестационарних течій на лабораторному стенді з плоским каналом скінченої товщини, з перешкодами та межами довільної форми.

Достовірність наукових положень дисертації забезпечується: коректною постановкою математичних задач, застосуванням класичних методів аналізу, використанням верифікованих математичних моделей, контрольованою точністю обчислювальних методів, повторюваністю обчислювального та лабораторного експерименту, узгодженістю між собою аналітичних, чисельних та експериментальних результатів, які були отримані у процесі досліджень, несуперечливістю результатів дисертаційних досліджень відносно результатів інших авторів, які працювали над даною темою.

Наукове значення роботи. Результати роботи мають наукове значення для розвитку теорії математичного моделювання, для створення нових нелінійних моделей та обчислювальних технологій, з використанням методів дискретизації

сингулярних інтегралів та алгоритмів перетворення систем дискретних особливостей, для досліджень процесів в гідроаеродинаміці.

Практичне значення одержаних результатів. Реалізація запропонованої в дисертації методології побудови моделей та обчислювальних технологій дозволяє створювати системи комп'ютерного прогнозування, програмно-моделюючі системи інженерно-технологічного призначення (проектно-конструкторського застосування), які здатні підсилити прогнозування методом моделювання різноманітних процесів для застосування в системах реального часу.

Розроблені в дисертаційній роботі математичні моделі, методи, алгоритми, обчислювальні технології та методологічні підходи було впроваджено, що підтверджується відповідними актами:

- 1) в Українському інституті сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського, при проведенні проектно-конструкторських робіт з розробки висотних конструкцій;
- 2) в ДП «Київський науково-дослідний інститут гідроапаратури», для забезпечення проведення дослідних та проектно-конструкторських робіт зі створення гідроакустичних систем;
- 3) в «Актюбінському науково-дослідному геологорозвідувальному нафтовому інституті» (Республіка Казахстан), при розробці «Програмної системи прогнозування еколого-аераційних процесів»;
- 4) на факультеті кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, при розробці навчальних програм та формуванні нормативних курсів;
- 5) в Університеті ім. К. Жубанова (Республіка Казахстан), при розробці лекційних курсів з інформаційних технологій;
- 6) в Київському науково-дослідному інституті судових експертиз Міністерства Юстиції України, для інформаційного забезпечення практичної діяльності;
- 7) в Національному авіаційному університеті України, для дослідження нестационарних аеродинамічних процесів в будівельних комплексах щільної забудови.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. Аналітичні результати, розробка моделей, методів, обчислювальних алгоритмів та обчислювальних технологій, розробка конструкції лабораторного стенду та методології досліджень, належать автору. Всі положення, які виносяться на захист, належать особисто автору.

У роботах опублікованих у співавторстві, постановка задач, експериментальні дослідження, обробка даних та обговорення результатів виконувались із залученням співавторів.

Апробація результатів дисертації. Положення та результати дисертаційної роботи доповідалися й обговорювалися на 2-х конгресах, 13 симпозиумах та 26 конференціях, які мають міжнародний статус, зокрема:

- 21-st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (21-st ICTAM, 2004, Warsaw);
- 23-rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (23-rd ICTAM, 2012, Beijing, China);

- IUTAM-Symposium «Hamiltonian dynamics. Vortex structure. Turbulence» (Moscow, 2006);
- IUTAM Symposium «150 Year of Vortex Dynamics» (Lyngby & Copenhagen, Denmark, 2008);
- IUTAM Symposium on «Vortex Dynamics: Formations, Structure and Function» (Fukuoka, Japan, 2013);
- International Symposium «Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics/Методи дискретних особливостей в задачах математическої фізики» (X-XIX DSMMPH/МДОЗМФ, Ukraine, – 2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015, 2017, 2019);
- Fluid Mechanics Conference 6 (EFMC6 KTH–EUROMECH, Stockholm, 2006);
- 62-nd Annual Meeting of the APS division of Fluid Dynamics (Minneapolis, Minnesota, USA, 2009);
- 7th Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations (BBVIV-7), (Carry-le-Rouet, Marseille, France, 2018);
- International Conference «PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES» (XX PDMU-2012, Brno, Czech Republic; XXII PDMU-2013, Yalta-Foros, Ukraine; XXIII PDMU-2014, Mukachevo, Ukraine; XXIV PDMU-2014, Cesky Rudoles, Czech Republic; XXVI PDMU-2015, Odessa, Ukraine; XXVII PDMU-2016, Tbilisi-Batumi, Georgia; XXVIII PDMU-2016, Brno, Czech Republic; XXX PDMU-2017, Vilnius, Lithuania; XXXI PDMU-2018, Baku, Azerbaijan; XXXV PDMU-2020, Baku, Azerbaijan);
- International Conference «DYNAMICAL SYSTEM MODELLING and STABILITY INVESTIGATION» (XVII DSMSI-2015, Kyiv, Ukraine; XVIII DSMSI-2017, Kyiv, Ukraine; XIX DSMSI-2019, Kyiv, Ukraine);
- VI, VIII Міжнародна конференція імені академіка І. І. Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика» (Київ, 2013р., 2015р.);
- Всеукраїнська наукова конференція: «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (XXI APAMCS-2015; XXIV APAMCS-2018, Львівський національний університет імені Івана Франка);
- IV, V Міжнародна науково-практична конференція «Комп'ютерна гідромеханіка», Інститут гідромеханіки НАН України (Київ, 2014р, 2017р.);
- X, XII, XV, XVI Міжнародна науково-практична конференція: «Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях», (Київ, Україна, 2011р., 2013р., 2016р., 2017р., 2018р., 2019р.);
- 2019 IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory ATIT/Kyiv/ (IEEE ATIT 2019, Ukraine).

Робота та її складові частини доповідалась на семінарах в Інституті телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАНУ, в Інституті гідромеханіки НАНУ, на семінарі кафедри математичної фізики механіко-математичного факультету та на семінарах кафедри обчислювальної математики та кафедри моделювання складних систем факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Публікації. Результати дисертації опубліковано у 59 роботах: в окремих главах монографії [1,2,3] (зі співавторами), 25 статтях, у тому числі в фахових вітчизняних та зарубіжних виданнях 25 [3-27] (із яких – 5 [8 12, 22, 23, 24] без співавторів), з опублікованих робіт 4 [3, 4, 5, 6] індексовані у базі Scopus та Web of Science, 20 [7-28] статті у виданнях, які входять до інших міжнародних наукометричних баз. З опублікованих за дисертацією робіт налічується 30 робіт в збірниках наукових праць і тезах міжнародних конгресів, симпозіумів та конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, шести розділів, висновків, списку використаних джерел, двох додатків. Робота включає 302 сторінок основного тексту, 157 рисунків, 6 таблиць, 300 використаних джерел.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано важливість і актуальність теми дисертації, сформульовано науково-прикладну проблему, мету, об'єкт і предмет, завдання і методи досліджень та сформульовано основні положення, які виносяться на захист, їх наукова новизна та практичне значення. Визначено особистий внесок здобувача, відомості про апробацію результатів та їх впровадження.

В першому розділі представлено огляд та аналіз існуючих актуальних питань і методів моделювання, визначено невирішені проблеми та нові задачі, які пов'язані зі створенням систем здатних забезпечити прогнозування швидкоплинних процесів в реальному часі.

Основні важливі положення, які пов'язані з темою дисертаційних досліджень та підходами до розв'язання задач динаміки рідини та динаміки вихрових структур, доволі повно представлені в монографіях В.І. Арнольда, С.М. Білоцерківського, А.Я. Бомби, Г.М. Вайникко, Ю.В. Ганделя, О.Г. Гомана, Д.М. Горелова, В.О. Горбаня, В.Т. Грінченка, С.О. Довгого, І.К. Ліфанова, І.І. Ляшка, І.А. Луковського, В.В. Мелешка, О.Г. Наконечного, М.І. Нішта, Л.Н. Полтавського, І.В. Сергієнка, В.В. Скопечького, І.Т. Селезова, О.М. Трофимчука. Поглиблення досліджень у різних галузях гідродинаміки призвело до формування наукових напрямків та наукових шкіл, які відрізняються спеціальними підходами та методами розв'язування задач, у тому числі, з врахуванням в'язкості. Можливості застосування спеціальних підходів, представлено в роботах І.О. Бровченка, В.А. Ваніна, Г.О. Воропаєва, В.О. Горбаня, О.А. Гуржія, М.Г. Железняка, О.І. Жданова, С.О. Іщенка, С.І. Ляшка, Т.С. Краснопольської, В.С. Мадерича, В.О. Міщенко, Є.І. Нікіфоровича, А.В. Сетуши, О.Г. Стеценка, Е.В. Терлецької, О.А. Приходько.

Доцільно окремо відмітити методи та топологічні підходи до побудови моделей вихрових структур, які були запропоновані в роботах В.А. Арнольда, Н.К. Moffatt, Ю.П. Ладікова-Роева, G.J.F. van Heijst, P.G. Saffman та отримали розвиток для розв'язування задач динаміки в роботах Н.К. Aref, Е.Ю. Баннікової, П.О. Васіна, С.О. Довгого, В.М. Канторовича, Т. Kambe, S. Kida, F. Nakamura, С.А. Полтавського, О.А. Гуржія, G.M. Zaslavsky, R.L. Ricca та інш.

Для більшості прикладних задач, які розглядаються в областях зі складною геометрією, відсутні аналітичні розв'язки. Їх дослідження здійснюється з використанням різних чисельних методів для дискретних аналогів обраних моделей. Зазвичай, чисельні розв'язки задач масопереносу для довільних областей отримуються загальновідомими методами розв'язування початково-крайових задач для рівнянь з частинними похідними, такими, як метод скінчених різниць (МСР), метод скінчених елементів (МСЕ), безсітковими методами із групи методів граничних елементів (МГЕ) або гібридними методами. Приклади застосування таких підходів представлено в роботах В.А. Ваніна, Г.О. Воропаєва, Є.І. Нікіфоровича, В.І. Нікішова, Є.І. Нікіфоровича, О.Г. Стеценка.

В роботах Р.В. Беженара І.О. Бровченка, та інших представників шкіл В.С. Мадерича і М.І. Железняка, а також в роботах О.А. Гуржія, В.В. Мелешка, Т.С. Краснопольської, О.І. Кордас продемонстровано високу ефективність моделей із застосуванням підходу Лагранжа при дослідженнях багатofакторних процесів пов'язаних із забрудненням водного середовища.

Це дозволяє зробити висновок, що стрімкий розвиток безсіткових методів на основі методу граничних елементів та гібридних методів із застосуванням підходу Лагранжу, сприяє прогресу в дослідженнях широкого кола прикладних задач механіки суцільного середовища.

Розвиток математичної та фізичної теорії масопереносу призвів до постановок задач хаотичної динаміки та адвекції домішок. Доцільно відзначити фундаментальні роботи Н. Aref, В.Т. Грінченка, О.А. Гуржія, В.В. Мелешка, G.J.F. van Heijst, Т.С. Краснопольської, які вплинули на розвиток теоретичних представлень. Як продемонстровано в роботах Є.І. Нікіфоровича, О.А. Гуржія, О.І. Кордас, В.А. Воскобійника, для задач переносу забруднювача в акваторіях, високу ефективність показали моделі, які побудовані на основі методу дискретних особливостей (МДО).

Аналіз можливостей існуючих спеціалізованих програмних систем (ANSYS Fluent, ANSYS CFX, COMSOL Multiphysics, ADINA, LS-DYNA, PowerFLOW та XFlow, SIMULIA, Palabos, Linflow, 3DynaFS-Bem, Aeroflow і Mill, Autowing CATRAN, Wind Expert та інш.) показав, що існуючі програмні системи мають суттєві недоліки та обмеження, щодо класів задач так за обчислювальними можливостями.

Поглиблення досліджень у різних галузях аерогідродинаміки призвели до розвитку спеціальних підходів та формуванню нових наукових напрямків та шкіл. На створення нових моделей та розвиток чисельно-аналітичних, функціонально-дискретних, чисельних методів, в значному ступені, вплинули досягнення в теорії потенціалу, теорії сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь, що пов'язано з працями Т.А. Cruse, Г.М. Вайникко, Д.Ф. Гахова, С.О. Довгого, І.К. Ліфанова, В.Л. Макарова, Н.І. Мусхелішвілі, Л.Н. Полтавського, F.J. Rizzo, P.C. Хапко та їх учнів.

Метод дискретних вихорів (МДВ) розроблявся С.М. Білоцерківським та М.І. Нішом як імпіричний, але його активний розвиток вже як методу дискретних особливостей (МДО) представлений в роботах І.К. Ліфанова, С.О. Довгого, Ю.В. Ганделя, В.В. Мелешко, М.Ю. Константінова, Д.Н. Горелова, О.І. Желаннікова,

В.В. Апарінова, В.В. Гуляєва, О.Г. Гомана, В.І. Карплюка, В.М. Котовського, Р.М. Федорова, а також їх послідовників, серед яких О.М. Буланчук, Г.Г. Буланчук, А.Д. Головенко, Г.Я. Диннікова, О.В. Копіка, О.Г. Лебідь, О.В. Шеховцов, О.В. Сетуха, та багатьох інших. Традиційно метод дискретних вихорів використовувався для прикладних задач аеродинаміки та досліджень динаміки вихрових структур (що віддзеркалено в оглядах Т. Сарпкая). Переваги МДО при комп'ютерному моделюванні складних процесів та систем проявляються завдяки його фізичності та ефективності обчислювальних алгоритмів.

Актуальні питання обґрунтування методу дискретних особливостей, складовою частиною якого є метод дискретних вихорів (МДВ) були визначені ще наприкінці ХХ сторіччя, в працях Г.М. Вайнико, Б.Г. Габдулахаєва, О.Г. Гоман, С.О. Довгого, І.К. Ліфанова, Л.Н. Полтавського, Я.Е. Полонського, J.L. Walsh та їх учнів.

З розвитком промислових технологій виникла потреба в системах для забезпечення керування швидкоплинними процесами за умов реального часу. Це в повній мірі має відношення і до прогнозування виникнення катастрофічних ситуацій в природному середовищі. Швидке (online) моделювання, як інтелектуальна складова, є елементом систем управління запобігання розвитку катастрофічних процесів та вчасній ліквідації їх наслідків.

Стрімкий розвиток обчислювальної техніки надав математичному моделюванню нові можливості для розв'язання великих задач, досліджень складних систем і швидкоплинних, багатофакторних процесів. Створення обчислювальних технологій, як нового наукового напрямку започаткував Г.І. Марчук. Цей науковий напрямок полягає в розробці спеціальних методів для розв'язування великих задач в умовах обмеження обчислювальних ресурсів. Основні методи з розпаралелення обчислень представлено в роботах В.В. Воєводіна та Вл.В. Воєводіна, методи та технології для багатопроекторних систем та для кластерних обчислень представлено в роботах О.М.Хіміча, В.В.Полянко, В.А.Сидорука та Т.В. Чистякової. В роботах В.В. Апарінова, А.В. Гахова, В.О. Міщенко, С.О. Дергачева, І.К.Марчевського, О.В.Сетухи, С.Л.Ставцева, Е.Е.Тертишнікова, показано, що ряд питань прискорення комп'ютерного моделювання вирішується спеціальною апроксимацією матриць великої розмірності, а також спеціальними технологіями розпаралелення основних обчислень.

Доцільно відмітити, що ресурсом для прискорення та забезпечення ефективності обчислень широкого класу задач може виявитися врахування в обчислювальних технологіях властивостей дискретних моделей, які утворені із застосуванням дискретизації сингулярних інтегралів, як це віддзеркалено в роботах С. О. Довгого, І. К. Ліфанова, О.В. Сетухи, Г.А. Щеглова та їх учнів.

Аналіз публікацій, наведений в першому розділі, дозволив дати мотивоване формулювання науково-прикладної проблеми дисертації, визначити мету, сформулювати комплекс задач, а також шляхи та методи для їх вирішення.

У другому розділі обґрунтовано систему розщеплення вихідної задачі на систему задач та представлено математичні моделі. Вихідна задача вважається поставленою, при визначенні для рівнянь, крайових та початкових умов.

Задача 1 Вихідними рівняннями з визначеними початковими та крайовими умовами прилипання, заданими на границях області, є рівняння Нав'є-Стокса, які описують рух в'язкої нестисливої рідини:

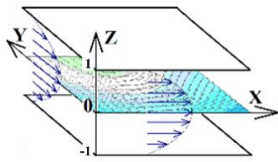
$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{F} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{V}, \quad (1)$$

$$\nabla \vec{V} = 0, \quad (2)$$

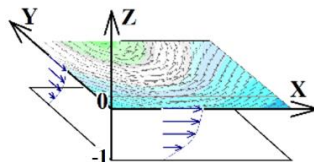
де ∇ – оператор Гамільтона, $\vec{V}(x, y, z, t) = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$ – вектор швидкостей рідини в тривимірному просторі, ρ – щільність рідини, $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ – вектор масових сил, $P = P(x, y, z, t)$ – скалярна функція тиску, $\text{Re} = \frac{\rho L V_0}{\mu}$ – число Рейнольдса, де μ – коефіцієнт динамічної в'язкості рідини, L – характерний розмір задачі, V_0 – характерна швидкість задачі.

Задача 2 формулюється при виконанні системи припущень. Так, для течій поміж паралельних площин (рис. 1) припускається, що компонента швидкості уздовж осі OZ вважається такою, що дорівнює нулю. Також вважається, що при будь-яких z і t існує безперервно диференційована функція $H = H(x, y, z, t)$ така, що для компоненти швидкості справедливо:

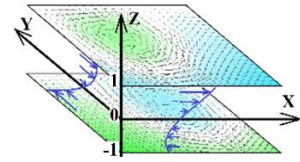
$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial x} H(x, y, z, t), v(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial y} H(x, y, z, t), w(x, y, z, t) \equiv 0. \quad (3)$$



а) Течія поміж двох нерухомих паралельних площин



б) Течія над нерухомою площиною



в) течія в шару між двох рухомих паралельних площин з заданим розподілом швидкостей

Рис. 1. Схема течій поміж двох паралельних площин

У припущенні про консервативність поля зовнішніх сил маємо на увазі, що існує $U = U(x, y, z)$, така що $\vec{F} = \nabla U$. В даному випадку рівняння (1), (2) призводять до наступної задачі – моделей течії в плоскому каналі з криволінійними межами та перешкодами (рис. 2)

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{p}{\rho} - U(x, y, z) - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = q(z, t), \quad (4)$$

з граничними умовами прилипання на паралельних площинах (згідно рис. 1):

$$\text{а) } (H'_x(x, y, \pm 1, t), H'_y(x, y, \pm 1, t), 0) = (0, 0, 0); \quad (5)$$

$$\text{б) } (H'_x(x, y, 0, t), H'_y(x, y, 0, t), 0) = \vec{V}_0(x, y, 0, t), (H'_x(x, y, -1, t), H'_y(x, y, -1, t)) = (0, 0, 0); \quad (5')$$

$$\text{в) } (u, v, 0)|_{z=\pm 1} = (H'_x(x, y, \pm 1, t), H'_y(x, y, \pm 1, t), 0) = \vec{V}_{\pm 1}(x, y, t). \quad (5'')$$

де $\vec{V}_{\pm 1}(x, y, t)$, $\vec{V}_0(x, y, t)$ – векторні функції, які визначені умовами прилипання.

В межах шару між площинами визначається умова непроникнення

$$\left((H'_x, H'_y, 0) \cdot \vec{n} \right) \Big|_{L_D} = \vec{W}_n \Big|_{L_D}, \quad (6)$$

де $\vec{n} \Big|_{L_D} = (n_x, n_y, 0)$ є паралельним площинам, а в правій частині визначено, нормальну компоненту руху $\vec{W}_n \Big|_{L_D}$ межі $L_d(t)$ (перешкоди, з направляючою $L_d(t)$, Рис.2-3) та заданими нижче початковими умовами:

$$t = 0: \quad \vec{V}(x, y, z, 0) = 0. \quad (7)$$

Права частина рівняння (4) визначає незалежність усього комплексу зліва від пари координат (x, y) , тому припускається, що невідома функція може мати представлення у вигляді $H(x, y, z, t) = \phi(x, y, t)R(z)$, (8)

При визначених $P_0 = P(x_0, y_0, z, t)$, $H_0 = H(x_0, y_0, z, t) = \phi(x_0, y_0, t)R(z)$, $\vec{V}_0 = \nabla \phi(x_0, y_0, t)$ в точці (x_0, y_0) рівняння (4) набуває вигляду звичайного диференційного рівняння відносно функції $R = R(z)$:

$$\frac{1}{\text{Re}} (\phi - \phi_0) \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = \frac{R^2}{2} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - V_0^2 \right) + R \frac{\partial (\phi - \phi_0)}{\partial t} + \frac{P(x, y, t) - P_0}{\rho}. \quad (9)$$

Тобто, для визначення $R = R(z)$, при заданих a, b, c коефіцієнтах маємо

Задача 2.1

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 R}{dz^2} = aR^2 + bR + c. \quad (10)$$

Рівняння вигляду (10) має розв'язок в квадратурах та визначає $R = R(z)$ при умовах, прилипання на площинах (згідно Рис. 1):

$$\begin{aligned} \text{а) } R(\pm 1) = 0; \quad \text{б) } R(0) = 1, \quad R(-1) = 0; \quad \text{в) } R(\pm 1) = 1. \end{aligned} \quad (11)$$

При $R = 1$ (4), з функцією (8) перетворюється на інтеграл Коші-Лагранжа:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{p}{\rho} - U(x, y, z) = q(z_0, t) = \text{const}. \quad (12)$$

Для визначення циркуляційної течії ідеальної нестисливої рідини, в області, поза рухомих границь $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$ (Рис.2-Рис.3, де $L_d(t)$ – границя, рух точок якої задається швидкістю $\vec{W}_d$, $L_v(t)$ – вільна границя – лінія розриву дотичних швидкостей, а швидкість її руху $\vec{W}_v$ визначається з розв'язку задачі),

формулюється задача знаходження функції $\phi = \phi(x, y, t)$ з параметром t , в двовимірній області з непроникною рухомою границею.

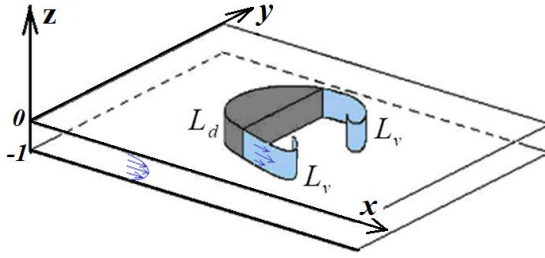


Рис. 2.

Схема течії над площиною з перешкодою

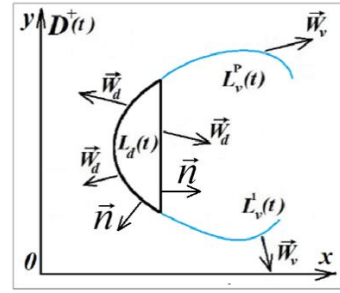


Рис. 3.

Схема течії в шару над площиною з перешкодою

Задача 2.2 Знайти гармонічну в площині ОХУ функцію $\phi = \phi(x, y, t)$ (таку, що $\vec{V} = \nabla\phi$ та яка має параметричну залежність від часу t), яка задовольняє рівнянню:

$$\text{при } t \geq t_0: \Delta\phi = 0, \text{ для } \vec{r} \in D^+, \quad (13)$$

з крайовими умовами на рухомих границях $L_d(t)$:

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial n} \right|_{L_d} = (\vec{W}_d, \vec{n})|_{L_d} \quad (14)$$

з крайовими умовами на вільних границях $L_v(t)$:

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial n} \right|_{L_v}^+ = \left. \frac{\partial\phi}{\partial n} \right|_{L_v}^- \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt}(\phi^+ - \phi^-)|_{L_v} = 0 \quad (16)$$

$$\text{з умовами для зовнішній задачі: } \lim_{|r-r_L| \rightarrow \infty} \nabla\phi = \vec{V}_\infty. \quad (17)$$

Для внутрішньої задачі задаються умови на проникний частині границі області $L_Q \in L_d(t)$ (на вході в область D^+):

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial n} \right|_{L_Q} = W_Q, \text{ або } \int_{L_Q} \frac{\partial\phi}{\partial n} ds = Q \quad (14')$$

де W_Q – швидкість течії скрізь $L_Q \in L_d(t)$, або задається миттєва витрата через перетин $L_Q \in L_d(t)$ і з початковими умовами, при $t = t_0$:

$$L_d(t_0) = L_{od}, L_v(t_0) = L_{ov}. \quad (18)$$

Розв'язок ϕ завдання розглядається в класі $C^2(D^+(t)) \cap C^1(\bar{D}^+(t))$,

$$\text{тобто } |\Delta\phi| < \infty \text{ на } L(t), \quad (19)$$

Остання умова є еквівалентною умові Кутта-Жуковського на кінцівках та на зламах контуру $L_d(t)$, яка природно задовольняється у відривних течіях, з породженням на гострих кінцівках і зламах контуру $L_d(t)$ нових елементів вільних границь $L_v(t)$.

Слід зазначити, що задача (13) – (19), з умовами Неймана (14) на $L_d(t)$, з умовами Неймана (15) і умовами (16) типу Діріхле, на $L_v(t)$, а так само з умовами (17) на ∞ є нелінійною задачею з вільною, рухомою границею $L_v(t)$.

В таких задачах рух невідомої вільної границі $L_v(t)$ визначається полем швидкостей $\vec{V} = \nabla \phi$, яке знаходиться з рішення задачі (13) – (19).

Форма області $\bar{D}^+(t)$ визначається геометрією рухомих границь $L(t) = L_d(t) + L_v(t)$. Зміна $L_d(t)$ задається переміщення точок $r_d \in L_d$ за законом руху, або визначається із задачі Коші при заданій правій частині

$$\frac{d\vec{r}_d}{dt} = \vec{W}_d(\vec{r}_d, t), \quad (20)$$

$$\text{з початковими умовами при } t = t_0 : L_d(t_0) = L_{0d}. \quad (21)$$

Зміна вільної границі $L_v(t)$ визначається з рішення задачі Коші для частинок, $\vec{r}_v(t) \in L_v(t)$ які визначають її рух:

$$\frac{d\vec{r}_v}{dt} = \vec{W}_v(\vec{r}_v, t), \quad (22)$$

$$\text{при заданих початкових умовах} \quad t = t_0 : L_v(t_0) = L_{0v}, \quad (23)$$

$$\text{де права частина, для (22):} \quad \vec{W}_v(\vec{r}_v, t) = \frac{1}{2}(\nabla \varphi^+(\vec{r}_v, t) + \nabla \varphi^-(\vec{r}_v, t)) \quad (24)$$

Розв'язання задач (13) – (19) і (20) – (24) в виділеному класі функцій (19) можливо при виконанні умов гладкості меж, яка забезпечується основним фактором фізичного процесу – виникненням відриву, який задовольняє критерію гладкості Вілля. Таким чином, умова Кутта-Жуковського на всіх зламах і кінцях кордонів виконується при природному виникненні відривів.

Розв'язок Задачі 2.2 суттєво залежить від порядку зв'язності області.

Задача 3 – задача масопереносу та адвекції. Масоперенос, у даному випадку, розглядається як адвекція пасивної домішки (виділеного об'єму маркування частинок) в заданому полі швидкостей. Визначення переміщення виділеного об'єму частинок визначається переміщенням маркованих частинок, які утворюють контур границі виділеного об'єму в заданому полі швидкостей $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$. Із застосуванням підходу Лагранжа задача адвекції зводиться до задачі Коші, з визначення руху кожної маркованої $\vec{r}_\alpha(t) \in D_\alpha(t)$ частинки з виділеного і маркованого об'єму $D_\alpha(t)$:

$$\frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = \vec{W}_\alpha(\vec{r}_\alpha, t), \quad (25)$$

$$\vec{r}_\alpha(t_0) \in D_\alpha(t_0) \quad (26)$$

має назву рівняння адвекції в задачах масопереносу.

Для визначення масопереносу та адвекції необхідно розв'язувати дві задачі одночасно: задачу 2.2 з визначення миттєвого поля швидкостей в області із

заданими властивостями її границь (непроникність, рухомість, розтягнення з породженням нових елементів границь області – ліній розриву неперервного поля швидкостей), та задачу 3 з визначення геометричної форми підобласті $D_\alpha(t)$ з маркованими частинками, рух яких визначається розрахованим, змінним в часі, полем швидкостей $\vec{W}_\alpha(\vec{r}_\alpha(t), t) = \vec{V}(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, t)$.

Тривимірні задачі з відривними циркуляційними та струменевими течіями розглядаються в припущенні, що число Рейнольдса $Re \rightarrow \infty$ та вихор швидкості $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$ є фінітною функцією, носій якою є локалізованою (та в загальному випадку неоднозв'язною) областю. Розглядаючи рухомі границі $\sigma(t) = \sigma_d(t) + \sigma_v(t)$ вже, в якості гладких обмежуючих поверхонь, отримуємо

Задачу 4 щодо знаходження функції $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ – потенціалу, для якого швидкість $\vec{V} = \nabla \varphi$:

$$\text{при } t \geq t_0: \Delta \varphi = 0, \text{ для } \vec{r} \in D^+, \quad (27)$$

з крайовими умовами на рухомих границях $\sigma_d(t)$:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\sigma_d} = (\vec{W}_d, \vec{n})|_{\sigma_d} \quad (28)$$

з крайовими умовами на вільних границях $\sigma_v(t)$:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\sigma_v}^+ = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\sigma_v}^- \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt} (\varphi^+ - \varphi^-)|_{L_v} = 0 \quad (30)$$

з умовами для зовнішній задачі: $\lim_{|r-r_L| \rightarrow \infty} \nabla \varphi = \vec{V}_\infty$.

(31)

Умови для внутрішньої задачі задаються на проникній частині границі області $\sigma_Q(t) \in \sigma_d(t)$ (на вході в область D^+):

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\sigma_Q} = W_Q, \text{ або } \int_{\sigma_Q} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = Q \quad (31')$$

де W_Q – швидкість течії крізь $\sigma_Q(t) \in \sigma_d(t)$, або задається миттєвий викид через

перетин $\sigma_Q(t) \in \sigma_d(t)$ і з початковими умовами, при $t = t_0: \sigma_d(t_0) = \sigma_{d0}(t), \sigma_v(t_0) = \sigma_{v0}$,

(32)

Розв'язок $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ розглядається в класі $C^2(D^+(t)) \cap C^1(\bar{D}^+(t))$.

Зміна вільної границі $\sigma_v(t)$ також, визначається з рішення задачі Коші (22)-(24) для частинок, $\vec{r}_v(t) \in \sigma_v(t)$ які визначають її рух.

Математичні моделі. Для вирішення плоскої задачі (13) – (24) про нестационарне обтікання непроникних рухомих зі швидкостями $\vec{W}_d$ і $\vec{W}_v$ границь-контурів $L_d(t)$ і $L_v(t)$, в деформованій області $D(t)$ застосовна

Математична модель 1 (з параметричної залежністю від часу t), яка в термінах теорії функцій комплексної змінної має інтегральні представлення:

$$\Phi(z, t) = \phi(x, y, t) + i\psi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \gamma(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \gamma(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + C \quad (33)$$

$$\bar{V}(z, t) = u(x, y, t) - iv(x, y, t) = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \frac{\gamma(\omega, t)}{z - \omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{\gamma(\omega, t)}{z - \omega} d\omega \quad (34)$$

$$\Gamma_0 = \int_{L_d(t)} \gamma(\omega, t) d\omega + \int_{L_v(t)} \gamma(\omega, t) d\omega = const \quad (35)$$

де (33) має сенс закону збереження циркуляції.

Для визначення $f(\omega, t)$ на межах $L_d(t)$, $L_v(t)$ і їх зміни, для (33), (34) потрібно задоволення інтегральним співвідношенням (36), отриманим з крайових умов (14), (15) і диференціальних рівнянь (37) – аналогу крайових умов (16), (17) на

$$L_d(t) : \begin{cases} z = \omega_d(t) \in L_d, \quad t \geq t_0 : \\ \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \frac{f(\omega, t) n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)} d\omega \right\} = W_n - \operatorname{Re} \left\{ (\bar{V}_\infty + \bar{V}_{imp}) n(\omega_d) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(\omega, t) n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)} d\omega \right\}, \\ \int_{L_{dj}} f(\omega_d, t) d\omega_d = - \int_{L_{vj}(t)} f(\omega_v, t) d\omega_v + C_j, \quad j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (36)$$

$$\text{На } L_v(t) : \begin{cases} z = \omega_v(t) \in L_v(t), \quad t > t_0 : \\ \frac{d\bar{\omega}_v(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \frac{f(\omega, t) d\omega}{(\omega_v - \omega)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(\omega, t) d\omega}{(\omega_v - \omega)}, \\ \omega_v = \omega_d \Rightarrow f(\omega_v, t) = f(\omega_d, t), \\ t = t_0 : L_v(t_0) = L_{v0} \end{cases} \quad (37)$$

Для процесу масопереносу та адвекції для усіх частинок, які належать до маркованої області $D_\alpha(t)$, застосована

Модель 2 (Задача Коші для маркованих частинок із виділеної області $D_\alpha(t)$):

$$\begin{cases} \forall z_\alpha(t) \in D_\alpha(t), \quad t > t_0 : \\ \frac{d\bar{z}_\alpha(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \frac{f(\omega, t) d\omega}{(z_\alpha - \omega)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(\omega, t) d\omega}{(z_\alpha - \omega)}, \\ t = t_0 : D_\alpha(t_0) = D_{\alpha 0} \end{cases} \quad (38)$$

Для тривимірної задачі (27) – (32) застосована математична

Модель 3, яка має інтегральне представлення та визначає рух тривимірного деформованого об'єму з непроникною границею σ :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z, t) = & xu_{\infty} + yv_{\infty} + zw_{\infty} + \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma_d(t)} g_d(x_{\sigma}, y_{\sigma}, z_{\sigma}, t) \frac{\partial}{\partial n_{\sigma}} \left(\frac{1}{r_{\sigma}} \right) d\sigma + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma_v(t)} g_v(x_{\sigma}, y_{\sigma}, z_{\sigma}, t) \frac{\partial}{\partial n_{\sigma}} \left(\frac{1}{r_{\sigma}} \right) d\sigma \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \vec{V}(x, y, z, t) = & \vec{V}_{\infty} + \frac{1}{4\pi} \nabla \iint_{\sigma_d(t)} g_d(x_{\sigma}, y_{\sigma}, z_{\sigma}, t) \frac{\partial}{\partial n_{\sigma}} \left(\frac{1}{r_{\sigma}} \right) d\sigma + \\ & + \frac{1}{4\pi} \nabla \iint_{\sigma_v(t)} g_v(x_{\sigma}, y_{\sigma}, z_{\sigma}, t) \frac{\partial}{\partial n_{\sigma}} \left(\frac{1}{r_{\sigma}} \right) d\sigma \end{aligned} \quad (40)$$

Для визначення підінтегральних функцій застосоване інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \nabla \iint_{\sigma_d(t)} g_d(x_{\sigma}, y_{\sigma}, z_{\sigma}, t) \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{\partial}{\partial n_{\sigma}} \left(\frac{1}{r_{\sigma}} \right) d\sigma = \\ = -(\vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n}_0) - \frac{1}{4\pi} \nabla \iint_{\sigma_v(t)} g_v(x_{\sigma}, y_{\sigma}, z_{\sigma}, t) \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{\partial}{\partial n_{\sigma}} \left(\frac{1}{r_{\sigma}} \right) d\sigma \end{aligned} \quad (41)$$

$$J = \int_D (\vec{V} \cdot \nabla \times \vec{V}) dD = \text{const} \quad (\text{Закон збереження спіральності}). \quad (42)$$

Для визначення еволюції виділеної поверхні σ_v застосовна задача Коші:

$$\frac{d\vec{R}_{\sigma_v}}{dt} = \vec{V}(\vec{R}_{\sigma_v}(t), t), \quad \vec{R}_{\sigma_v}(t_0) = R_0, \quad (43)$$

Незважаючи на те, що достатньо широкий спектр плоских та тривимірних задач має схожі постановки, тривимірні моделі мають власні особливості. Так, закон збереження спіральності (42) вихорових структур в ідеальній нестисливій рідині визначає збереження загальної завузленості конфігурації із замкнених вихрових трубок, які розташовані всередині області $D^+(t)$, яка рухається у відповідності до умов задачі (43).

Третій розділ присвячено дискретизації моделей, методам обчислень та обчислювальним схемам та дискретизації інтегральних представлень.

Інтегральні представлення, які застосовні в моделях, виражені через контурні інтеграли (на кусково-гладкому контурі, Рис.4), та потребують коректних обчислень.

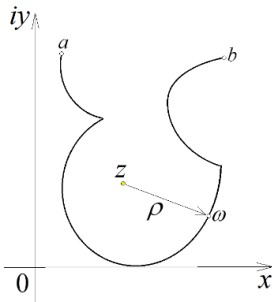


Рис. 4. Контур

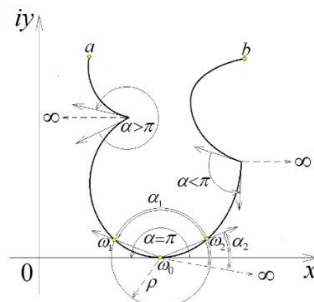


Рис.5. Схема виділення особливостей.

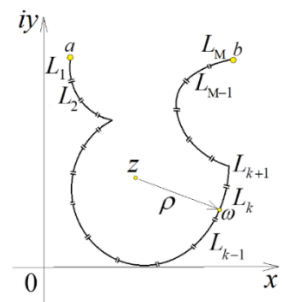


Рис.6. Дискретизація контуру

Так, функції виражені через сингулярні інтеграли $\Phi_1(z) = \int_{L_{ab}} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$, з підінтегральною функцією $f = f(\omega) \in H(\lambda)$, $0 < \lambda < 1$, які визначені у внутрішніх точках кусково-гладкому контурі (рис.5), розуміються в сенсі головного значення, за Коші:

$$\Phi_1(z) = \int_{L_{ab}} \frac{f(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} = \lim_{\substack{\omega' \rightarrow \omega_0 \\ \omega'' \rightarrow \omega_0}} \left[\int_a^{\omega'} \frac{f(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} + \int_{\omega''}^b \frac{f(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} \right], \quad (43)$$

при виконанні умови, що

$$\lim_{\substack{\omega' \rightarrow \omega_0 \\ \omega'' \rightarrow \omega_0}} \frac{|\omega' - \omega_0|}{|\omega'' - \omega_0|} = 1. \quad (44)$$

При застосуванні гіперсингулярних інтегральних представлень з більш сильними особливостями (ядро, з показником ступеня $n \geq 2$) інтеграл

$$\Phi_n(z) = \int_{L_{ab}} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^n} d\omega, \quad \text{де } n = 2, 3, 4, \dots, \quad (45)$$

слід розуміти, за умови (44), в сенсі скінченної частини, за Адамаром. Тобто, при виконанні умови (44), справеджується

Теорема 1 Нехай для функція має інтегральне представлення (45), з $n = 2, 3, 4, \dots$, де функція $f = f(\omega)$ визначена на контурі L_{ab} і задовольняє умові $|f(\omega) - f(\omega_0)| \leq A|\omega - \omega_0|^\lambda$, $n - 1 < \lambda < n$ (наприклад, $\lambda = n - 1 + \mu$, $0 < \mu < 1$).

В цьому випадку, інтеграл (45) на всіх внутрішніх точках контуру L_{ab} , тобто, при $z = \omega_0 \in L_{ab}$, існує як сильно сингулярний, якщо його, при виконанні умови (44), розуміти в сенсі скінченної частини по Коші-Адамару:

$$\int_{L_{ab}} \frac{f(\omega) d\omega}{(\omega - \omega_0)^n} = \lim_{\substack{\omega' \rightarrow \omega_0 \\ \omega'' \rightarrow \omega_0}} \left[\int_a^{\omega'} \frac{f(\omega) d\omega}{(\omega - \omega_0)^n} + \int_{\omega''}^b \frac{f(\omega) d\omega}{(\omega - \omega_0)^n} - \frac{f(\omega_0)}{(n-1)} \left(\frac{1}{(\omega'' - \omega_0)^{n-1}} - \frac{1}{(\omega' - \omega_0)^{n-1}} \right) \right]. \quad (46)$$

Зауваження 1: Теорема залишається справедливою, якщо функція $f = f(\omega)$, яка визначена на L_{ab} є такою, що $f^{(n-1)}(\omega) \in H(\mu)$, $0 < \mu < 1$, тобто, $f(\omega) \in H_{n-1}(\mu)$.

Зауваження 2: Для інтегрального представлення (45), з непарними $n = 2m + 1$ $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ інтеграл (46) на всіх внутрішніх точках контуру L_{ab} існує в сенсі головного значення по Коші.

Теорема 2: Нехай $\forall z : \rho(z) = |z - \omega| > \rho_0 = \min_{\omega \in L} |z - \omega| > 0$ маємо узгоджене канонічне розбиття контуру L_{ab} , тобто $\exists M, \exists E, E_0, L = \sum_{j=1}^M L_j$, таке, що представлення (45) має дискретизований аналог

$$\Phi_n(z) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i (z - \omega_{0j})^n} + O\left(\frac{\varepsilon}{\rho_0^n}\right), \quad (47)$$

$$\text{де } n = 1, 2, 3, 4, \dots; \quad \Gamma_j = \int_{L_j} f(\omega) d\omega, \quad j = \overline{1, M}. \quad (48)$$

Тоді для всіх непарних $n = 2m + 1$ $m = 1, 2, 3, 4, \dots$, в будь-якій внутрішній $k - \text{й}$ точці контуру $\omega_{0k} \in L_k$, $k = \overline{1, M}$, існує оцінка модуля різниці:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega) d\omega}{(\omega_{0k} - \omega)^n} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^M \frac{1}{2\pi i (\omega_{0k} - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) d\omega \right| \leq \frac{\Gamma_0}{2\pi \rho_0^n} |(1 - \varepsilon)^{-n} - 1| + \frac{A \delta^\mu}{\pi \mu} = O(\delta^\mu), \quad (49)$$

де: A – константа Гельдера, показник Гельдера $0 < \mu < 1$, $\Gamma_0 = \int_L |f(\omega)| |d\omega|$.

Для чисельного розв'язання задач (13) – (22) застосовано метод дискретних особливостей, заснований на дискретизації інтегральних представлень (33)-(35):

Дискретизована модель 1.

$$\Phi(z, t) = \phi(x, y, t) + i\psi(x, y, t) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}(t)) + \sum_p \sum_{s=1}^{n(t)} \frac{\delta_s^p}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0s}^p(t)) \quad (50)$$

$$\bar{V}(z, t) = u(x, y, t) - iv(x, y, t) = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_{0j}(t)}{2\pi i (z - \omega_{0j})} + \sum_p \sum_{s=1}^{n(t)} \frac{\delta_s^p}{2\pi i (z - \omega_{0s}^p(t))}, \quad (51)$$

$$\Gamma_0 = \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_n) + \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^n \delta_i^p = \text{const} \quad (52)$$

Для визначення динамічних характеристик застосовується

$$c_p(x, y, t) = 1 - \left(\left(\frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial y} \right)^2 \right) - 2 \frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} \quad (53)$$

Дискретизована модель 1 визначає поля швидкостей $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$ та $c_p(x, y, t)$ навколо границь і перешкод та надає вихідні данні для розв'язування задачі адвекції (25), (26).

Дискретизація інтегральних представлень та адаптація МДО до задач адвекції. При традиційній дискретизації границь із розташуванням як дискретних особливостей, так і точок колокації на лінії границі (рис.7) лінія течії не співпадає із лінією границі області. Виконання умови непроникнення через границю в МДО задовольняється спеціальним алгоритмом, в якому непроникнення забезпечується примусовим віддзеркаленням маркованих частинок від границь.

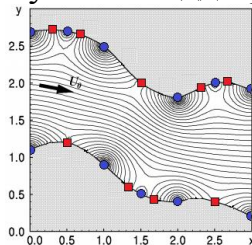


Рис. 7.
Дискретизація
границь області
для МДО.

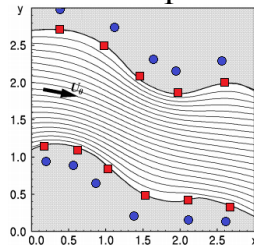


Рис. 8.
Адаптована
дискретизація
границь області.

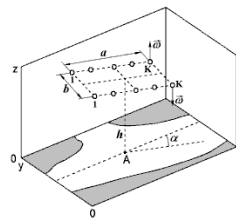


Рис. 9.
Модель впливу
вітру на
поверхню течії.

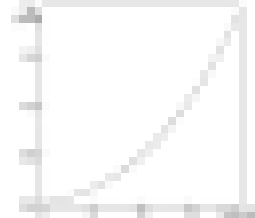


Рис. 10.
Залежність швидкості
поверхневої течії від
швидкості вітру.

Розв'язування задач адвекції в рідині потребує гладкості границь області течії. Адаптація методу дискретних особливостей до задач адвекції полягає в зміщенні положення дискретних особливостей вздовж нормалі від границі на відстань, що не перевищує відстань між точками колокації так, щоб лінія течії співпадала із лінією границі області та залишалася кусково-гладкою (Рис.8). При цьому, апроксимація границі точками колокації забезпечує умови дискретизації границь області течії із точністю, яку визначено апроксимацією квадратурного представлення. Для задачі адвекції (25),(26) застосовна циркуляційна модель (33)-(35) течії в мілкій акваторії у вигляді плоского каналу зі складною формою границь (узбережжя, перешкоди). Глибина каналу вважається малою. Течія передбачається паралельною площині дна каналу. Дискретизована модель (45)-(47) течії, з адаптованим розбиттям границі, забезпечує поле швидкостей $\vec{W}_\alpha(\vec{r}_\alpha(t), t) = \vec{V}(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, t)$ в області з гладкою границею для розв'язування задачі адвекції (25), (26).

Прогнозування еволюції плями забруднення на поверхні акваторії зводиться до задачі адвекції. Прогнозування еволюції плями забруднення базується на моніторингу лінії, яка оконтурює виділену область. Форма виділеної області в задачах адвекції апроксимується системою маркованих точок-частинок (пасивних маркерів), впорядковане з'єднання яких формує контур границь області. Рух маркерів описує еволюцію границі області (наприклад, забруднення) на морській поверхні з плином часу. Виділення гладких відрізків контуру дозволяє застосувати процедуру редискретизації частини границі при сильному розтягуванні або стисненні її сегментів в залежності від кількості маркерів, що утворюють сегмент контуру.

Для врахування впливу вітру на зсувну течію в поверхневому шару застосовна модель «хмари», що складається із системи вортонів над поверхнею течії (Рис.9). Вплив вітру (Рис.10) визначається інтенсивністю системи вортонів в «хмарі», та їх просторовою орієнтацією над областю течії, що задається за результатами метеопрогнозу. Вплив від «хмари» вортонів є моделлю вітрового впливу на морську поверхню, який призводить до змін поля швидкостей основної течії в акваторії.

Тривимірна математична модель вихорової структури у вигляді поверхні, при дискретизації апроксимується системою лінійних вихорових елементів (Рис.11.), кожний із яких індуцирує поле швидкостей, які визначаються формулою Біо-Савара.

Для побудови моделей із закрученою течією необхідно врахування властивостей тривимірних циркуляційних ефектів та застосовувати моделі із замкненими вихровими трубками (вихровими лініями). Моделі визначається топологічними характеристиками – вузлами та зачепленнями вихрових ліній розташованих на замкненій частині неоднорозв'язної поверхні (наприклад, тора, Рис. 12.).

Замкнені вихорові лінії можуть утворювати (p,q) -торічеський вузол та (p,q) – торічеське зачеплення. В торічеському вузлі вихорова лінія обертається q раз навколо кругової осі тора і p раз навколо осі обертання тора. Для моделей із замкненими вихровими трубками (вихровими лініями) розглядається характеристика –

спіральність вихрової структури (42), яка у дискретному випадку для трубок однакової інтенсивності Γ має представлення:

$$J = \sum_i^M \sum_{j \neq i}^M l_{ij} + \sum_i^M l_{ii}, \quad \text{де } l_{ij} \text{ є коефіцієнтами матриці зачеплень.} \quad (54)$$

В дискретному випадку сума усіх елементів матриці зачеплень для системи замкнених вихорових елементів – вихорових ліній (вихорових трубок) визначає спіральність течії, яка є таким же інваріантом, як і циркуляція.

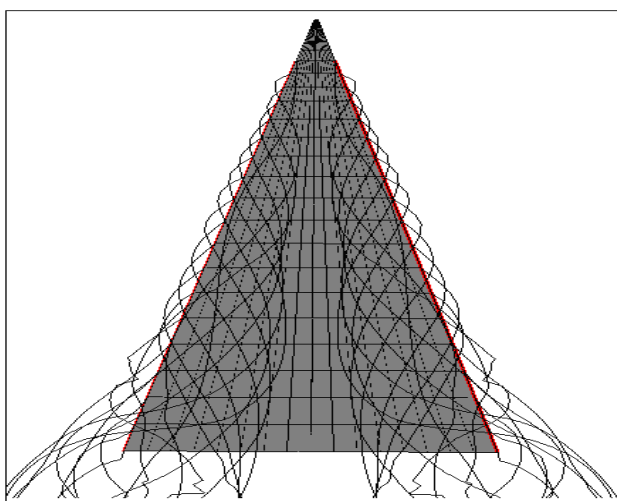


Рис. 11. Модель тривимірної вихрової структури, від трикутного крила, з лінійними вихровими елементами.

Збереження спіральності визначає збереження кількості зачеплень при гладкій деформації течії (у процесі еволюції вихрової структури) за умови збереження циркуляції. Збереження спіральності – збереження загальної завузленості вихрової структури (що є топологічним критерієм стійкості вихрової структури).

Модель тривимірної вихрової структури у вигляді системи замкнених вихрових ліній, розташованих на неоднорозривних поверхнях, застосовна для опису вихрових/струменевих структур з ортогональними циркуляційними течіями, для вихрових об'єктів типу смерч/торнадо.

В четвертому розділі розглядаються побудова методів та алгоритмів обчислювальних технологій моделювання вихрових (циркуляційних) течій і динамічних систем.

Обчислювальні технології забезпечують подолання проблем, що обмежують застосування МДО:

- Проблема «неусувної» похибки обчислень характеристичної функції при її апроксимації елементами МДО (дискретизованими інтегральними представленнями багатозначної функції);

- Проблема коректного врахування виникнення нових елементів меж області які виникають при відривних явищах;

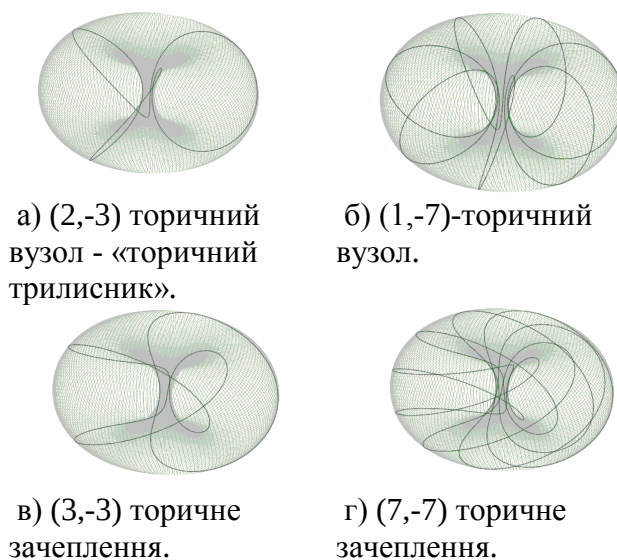


Рис. 12. Моделі тривимірних вихрових структур з замкненими вихровими елементами у вигляді (p,q)-торичних вузлів та зачеплень.

– Проблема коректного обчислення похідної у часі від характеристичної функції та обчислень локальних та розподілених динамічних характеристик нестационарного аерогідродинамічного процесу.

Для вирішення зазначених проблем запропоновано метод та алгоритми перетворення системи дискретних особливостей, в яких враховано ефекти руху та деформації границь області та утворення нових елементів границь (модель відривних ефектів), апроксимованих системою дискретних особливостей та їх застосування для обчислювальних технологій. Представлено новий метод та алгоритм обчислення динамічних характеристик течії, побудований на застосуванні дискретизованих інтегральних представлень – елементів МДО.

Схема алгоритму перетворення системи дискретних особливостей. Проблема «неусувної» похибки обчислень характеристичної функції (із застосуванням МДО) полягає в неможливості коректного обчислення характеристичної функції, апроксимованої системою розривних функцій вигляду (55), у всіх точках області поза контуром границі. При обчисленні функцій (55) в області визначається смуга (рис. 13, а) із розривними значеннями функції. Тобто, значення характеристичної функції

$$\Phi(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{M_1} \frac{\Gamma_j^1}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0j}^1) + \sum_{j=1}^{M_2} \frac{\Gamma_j^2}{2\pi i} \ln(z - \omega_j^2) \quad (55)$$

можна визначити в усіх точках області поза межами контуру, за виключенням області із системою ліній розрізу (рис. 13, а).

Для вирішення означеної проблеми запропоновано метод та алгоритм перетворення дискретизованих інтегральних представлень (рис. 13, б – г), які змінюють порядок дискретних особливостей у системі та позбавляють від проявів багатозначності в системі дискретних особливостей. Застосуванню алгоритму передуює каскадне впорядкування системи гілок контуру $L = L_I + L_{II} + \dots$.

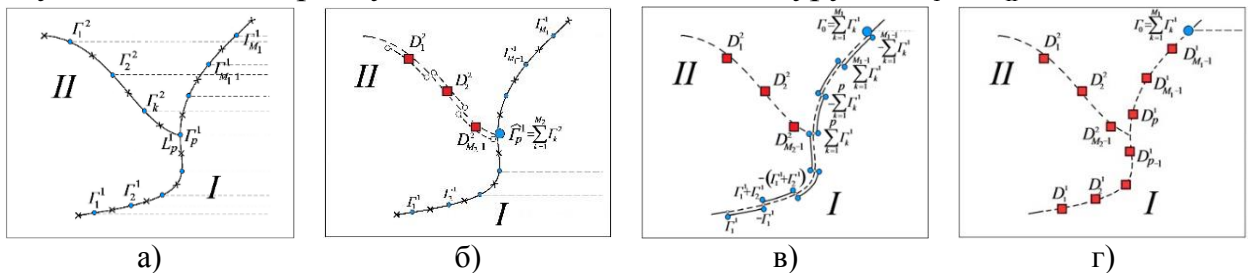


Рис. 13. Схема послідовних кроків методу перетворення системи дискретних особливостей.

Послідовне застосування, на кожній гілці контуру, перетворення замінює впорядковану систему дискретних особливостей впорядкованою системою пар дискретних особливостей, що призводить до нової системи впорядкованих дискретних особливостей (з підвищенням на одиницю порядком особливостей). Результат послідовного перетворення за схемою (рис. 15, а – г) – це перетворення (55) до вигляду, що відповідає схемі на Рис.15, г:

$$\Phi(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln(z - \omega_{0M_1}^1) + \sum_{j=1}^{M_1-1} \frac{D_j^1}{2\pi i(z - \omega_j^1)} + \sum_{j=1}^{M_2-1} \frac{D_j^2}{2\pi i(z - \omega_j^2)}, \quad (56)$$

$$\text{де} \quad \Gamma_0 = \sum_{j=1}^{M_1} \Gamma_j^1 + \sum_{j=1}^{M_2} \Gamma_j^2 \quad (57)$$

Алгоритмічна схема утворення і перетворення системи дискретних особливостей (вихорів) при моделюванні руху, деформації та утворенні нових елементів контуру (при його нестационарному відривному обтіканні, рис. 16, а – е) та покрокова послідовність обрахунків характеристик процесу обтікання.

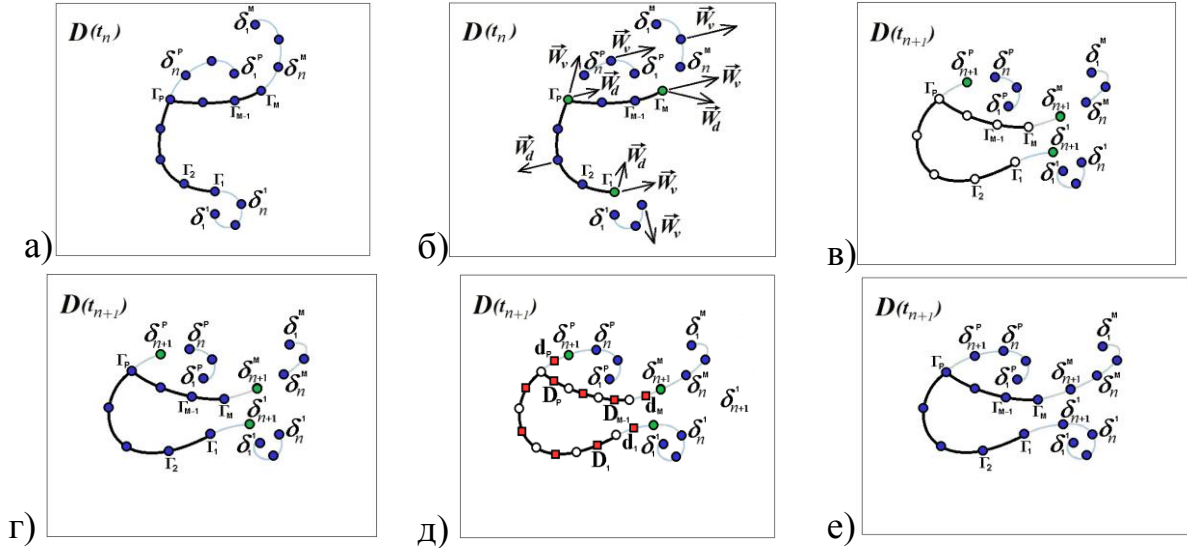


Рис. 14. Деформації та зміни рухомого контуру з породженням нових елементів контуру (як для моделі відривного обтікання).

Покрокову послідовність виконання обрахунків (характеристик процесу) на кожному із кроків моделювання процесу обтікання можна представити наступним чином (відповідно до рис. 14):

Крок 1 (рис. 14, а) – Визначення та класифікація систем дискретних особливостей, які апроксимують контур-рухому границю області, при $t = t_n$;

Крок 2 (рис. 14, б) – Визначення швидкостей кожної маркованої дискретної особливості із системи дискретних особливостей, які апроксимують контур - рухому границю області при $t = t_n$;

Крок 3 (рис. 14, в) – Пересування кожної маркованої дискретної особливості, які апроксимують контур –рухому границю області, із попереднього положення точки в нове, при заданій швидкості та породженні нових елементів контуру при $t = t_{n+1}$;

Крок 4 (рис. 14, г) – Визначення інтенсивності кожної із маркованих дискретних особливостей на контурі-детермінованій границі з врахуванням зміни положення дискретних особливостей на вільній границі та з врахуванням породження нових елементів контуру при $t = t_{n+1}$;

Крок 5 (рис. 14, д) – Перетворення системи дискретних особливостей, які апроксимують контур - детерміновану границю разом з новоутвореними

елементами, в систему дискретних особливостей підвищеного порядку для обчислення похідних і динамічних характеристик, при $t = t_{n+1}$;

Крок 6 (рис. 14, е) – Визначення та класифікація систем дискретних особливостей, які апроксимують рухомі границі області, при $t = t_{n+1}$.

Алгоритмічна схема методу перетворення системи впорядкованих дискретних особливостей у систему впорядкованих дискретних особливостей з підвищеним порядком, на кроці 5, при утворенні нових елементів контуру границі (модель відриву).

Схема перетворення системи впорядкованих вихорів в систему диполів на $L_d(t_{n+1})$, при утворенні нових елементів меж $L_v(t_{n+1})$ на кінцівках границь $L_d(t_{n+1})$, в розгортці (рис. 15 а)-д):

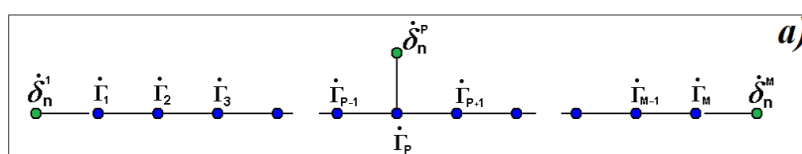


Рис. 15, а) Визначення та впорядкування похідних від інтенсивностей усіх вихорів, які є приєднаними, на непроникному контурі $L_d(t_{n+1})$, разом з тими що відірвалися на його кінцівках та кутових точках:

$$\dot{\Gamma}_j(t_{n+1}) = (\Gamma_j(t_{n+1}) - \Gamma_j(t_n)) / (t_{n+1} - t_n), \quad \dot{\delta}_{n+1}^p = \delta_{n+1}^p / (t_{n+1} - t_n) \quad (58)$$

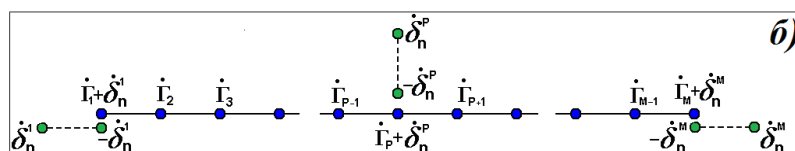


Рис. 15, б) Формування системи окремих пар (із похідних від дискретних особливостей) від тих дискретних особливостей, які «відірвалися» та внесення «виправлення» в значення похідних від їх інтенсивностей кінцевих вихорів на контурі $L_d(t_{n+1})$:

$$\hat{q}_j = \hat{q}_i(t_{n+1}) = \dot{\Gamma}_j(t_{n+1}), \quad \hat{q}_p(t_{n+1}) = \dot{\Gamma}_p(t_{n+1}) + \dot{\delta}_{n+1}^p. \quad (59)$$

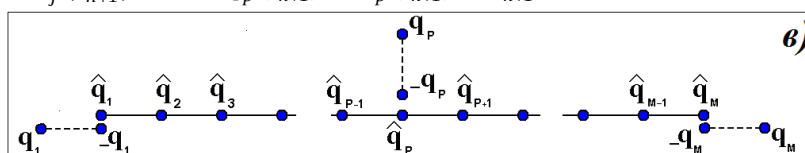


Рис. 15 в) Впорядкування усіх «дискретних особливостей» на контурі $L_d(t_{n+1})$, з врахуванням нових, які утворилися(відірвалися) на кінцівках та кутових точок межі $L_d(t_{n+1})$.

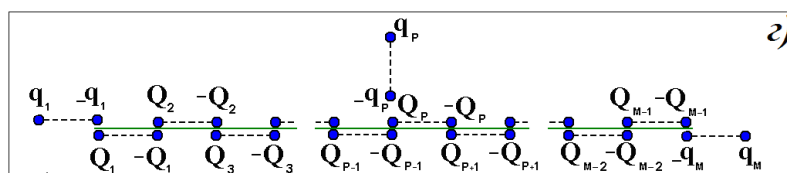


Рис. 15, г) Формування пар дискретних особливостей із всіх дискретних особливостей на межі - контурі $L_d(t_{n+1})$ разом з тими, що утворилися (відірвалися) на кінцівках та кутових точках межі-контуру $L_d(t_{n+1})$:

$$Q_1 = \hat{q}_1, Q_i = \sum_{k=1}^i \hat{q}_k \quad i=1,2,\dots,M-1. \quad (60)$$

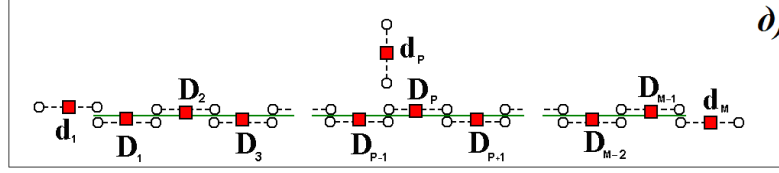


Рис. 15, д) Перетворення (заміна) впорядкованої системи пар дискретних особливостей (розташованих на контурі) в систему дискретних особливостей підвищеного порядку, з параметрами для обчислення похідних та динамічних характеристик при $t = t_{n+1}$:

$$\begin{cases} \bar{D}_j = (x_{j+1} - x_j, y_{j+1} - y_j)Q_j \\ \bar{d}_p = (x_p - x_n^p, y_p - y_n^p)q_p \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x}_j = 0.5(x_{0j+1} + x_{0j}) \\ \bar{y}_j = 0.5(y_{0j+1} + y_{0j}) \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x}_n^p = 0.5(x_n^p + x_{0p}) \\ \bar{y}_n^p = 0.5(y_n^p + y_{0p}) \end{cases} \quad (61)$$

Подолання проблеми некоректного обчислення похідних для функцій, визначених через граничні інтегральні представлення на рухомих та деформованих границях області, стало можливим при врахуванні вимог теореми Томсона про незмінність циркуляції швидкості по замкнутому рідкому контуру протягом усього часу руху, що в термінах дискретних представлень має вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^M \Gamma_j + \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^n \delta_i^p \right) = \sum_{j=1}^M \dot{\Gamma}_j(t) + \sum_{p=1}^P \dot{\delta}_n^p = 0. \quad (62)$$

Застосування методу та алгоритму перетворення впорядкованої системи дискретних особливостей у впорядковану систему дискретних особливостей з підвищеним порядком надає можливість сформулювати наступне твердження.

Твердження 1. Нехай виконується (62), тоді формула обчислення значення похідної за часом для (53) від дійсної частини дискретного представлення (50), має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, y, t_{n+1})}{\partial t} = & \sum_{j=1}^{M-1} (\bar{D}_j, \bar{V}_j(x, y, \bar{x}_j(t_{n+1}), \bar{y}_j(t_{n+1}))) + \sum_p (\bar{d}_p, \bar{V}_p(x, y, \bar{x}_n^p(t_{n+1}), \bar{y}_n^p(t_{n+1}))) - \\ & - \sum_{j=1}^M \Gamma_j(t_{n+1}) (\bar{V}_j(x, y, x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1})), \bar{W}_d(x_{0j}(t_{n+1}), y_{0j}(t_{n+1}))) - \\ & - \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i^p \left(\bar{V}_i(x, y, x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})), \bar{W}_v(x_i^p(t_{n+1}), y_i^p(t_{n+1})) \right) \end{aligned} \quad (63)$$

П'ятий розділ присвячено експериментальним методам, методиці та технології моделювання в'язких течій на лабораторному стенді з плоским каналом (рис. 16, 17), який має перешкоди та границі складної криволінійної форми. Крім того, у розділі представлені результати експериментальних досліджень.

Мета експериментальних досліджень – підтвердження теоретичних припущень (щодо властивостей математичних моделей):

1) виявлення діапазону числа Re_h , в якому виникають циркуляційні режими течії в плоскому закритому каналі (глибина-товщина шару $h = 15\text{мм}$);

2) виявлення режимів течії (за Re_h) в плоскому закритому каналі, геометрично та кінематично подібних (за профілем швидкості) течії в мілководній акваторії.

Методика проведення лабораторних експериментальних досліджень включає в себе кольорову візуалізацію виділеної частини течії в каналі (метод локального фарбування), відеофіксацію, технологію вимірювання локальної та осередненої по товщині каналу швидкості навколо перешкод.

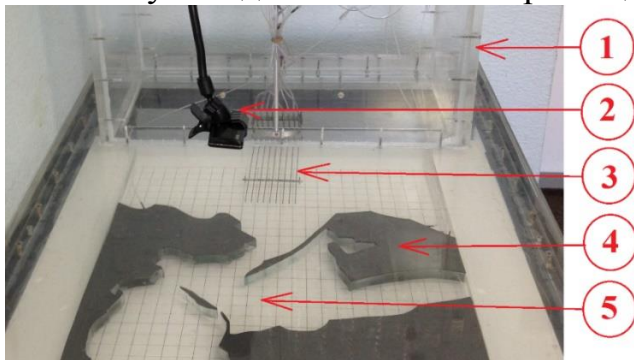


Рис. 16.

Конструкція лабораторного стенду з системою візуалізації та відеофіксації течій.



Рис. 17.

Зовнішній вигляд конструкції лабораторного стенду.

На рис. 16, 17 наведені наступні позначення: 1 – резервуар для рідини; 2 – система відеофіксації; 3 – голкова система введення фарби; 4 – встановлені моделі; 5 – робоча частина стенду; 6 – регулятор швидкості течії. Лабораторний стенд призначений для дослідження течій в плоскому закритому каналі, в робочому діапазоні чисел Рейнольдса $0 \leq Re_h \leq 1.5 \times 10^4$, де $Re_h = \frac{hV}{\nu}$ визначається за товщиною шару.

Технічні характеристики робочої частини лабораторного стенду:

Глибина плоского закритого каналу (товщина шару): $h = 15\text{мм}$;

Ширина робочої частини – $h = 500\text{мм}$;

Довжина робочої частини – $h = 1100\text{мм}$;

Робоча рідина – вода, коефіцієнт кінематичної в'язкості $\nu = 10^{-2}\text{ см/сек}$;

Діапазон робочих швидкостей $V = 0 \div 100\text{ см/сек}$;

Загальні розміри лабораторного стенду: довжина – 2,0 м., висота – 1,5 м. ширина – 0,8м.

Для виявлення діапазону чисел Re_h , при яких виникає циркуляційний режим течії в плоскому каналі з перешкодою у вигляді кругового циліндру, було проведено комплекс експериментів. Результати лабораторного експерименту з виявлення режимів циркуляційної течії навколо циліндру, в шару між паралельних площин, при $0 \leq Re_D \leq 2 \times 10^3$ представлено на рис. 18.

Помітно, що для течії між паралельними площинами, в достатньо широкому діапазоні чисел Рейнольдса $0 < Re < 2000$, де в'язкі сили мають значний вплив, у порівнянні із силами інерції виникають циркуляційні режими течії. Порівняльний аналіз з відомими експериментальними результатами показав, що для течії води в шару товщиною $h = 15 \text{ мм}$, навколо циліндру діаметром $D = 2h = 30 \text{ мм}$ циркуляційний режим виникає при $Re_h \geq 10$, в тому ж діапазоні чисел Рейнольдса, як для циліндрів у вільному потоці.

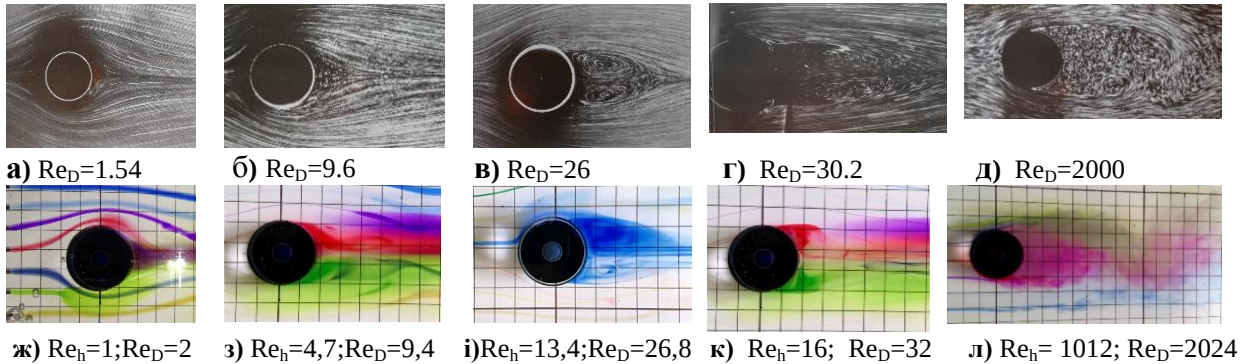


Рис. 18 а) – д) Течія навколо циліндру в вільному потоці (М.Ван-Дайк, 1982). Лабораторний експеримент: ж) – л) течія навколо циліндру встановленому в плоскому каналі глибини $h = 15 \text{ мм}$. Діаметр циліндру

$$D = 2h = 30 \text{ мм}, Re_D = \frac{DV}{\nu}, Re_h = \frac{hV}{\nu}.$$

При лабораторному дослідженні течії в плоскому каналі (модельної акваторії) забезпечено умови геометричної та кінематичної подібності:

$$- \frac{R_h}{L_h} = \frac{R_m}{L_m} = \text{const} \quad - \text{умова геометричної подібності форми меж (натурної)}$$

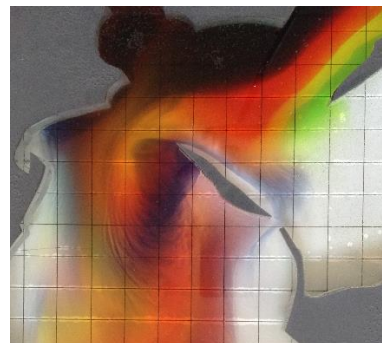
акваторії та формі меж плоского каналу (модельної акваторії);

$$- Sh = \frac{L_h}{T_h V_h} = \frac{L_m}{T_m V_m} = \text{const} \quad - \text{умова кінематичної подібності (за числом Струхалі);}$$

де: R_h – характерні розміри елементів акваторії, R_m – характерні розміри елементів у каналі, V_h – характерна швидкість в акваторії, T_h – характерний час процесу, L_h – характерний розмір акваторії, V_m – характерна швидкість в каналі, T_m – характерний час модельного процесу, L_m – характерний розмір каналу.



а) Космічне фото акваторії



б) Лабораторний експеримент.

Керченської протоки
<https://www.google.com.ua/maps>

Моделювання течії в плоскому
 криволінійному каналі.

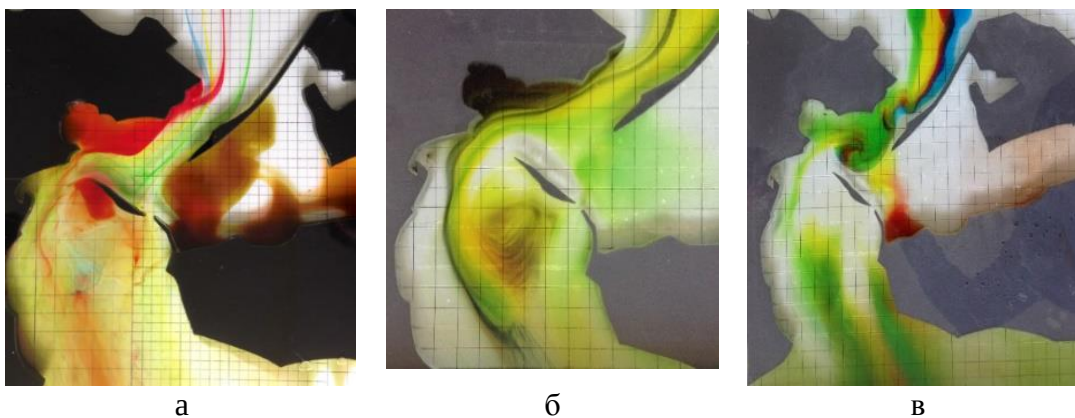
Рис. 19. Порівняння структури течії в акваторії Керченської протоки, з результатом лабораторного експерименту в плоскому каналі глибини $h = 15\text{ мм}$ (з лінією стінок, геометрично подібними межах акваторії).

$$\text{Масштаб моделі } \frac{L_m}{L_n} = 10^{-4}$$

Дані умови забезпечують геометричну подібність розташування та форм циркуляційних зон течії в плоскому каналі (модельної акваторії) геометричним формам та розташуванню циркуляційних течії в (натурної) акваторії протоки.

Наявність впливу в'язких сил в шару (товщина якого для моделі дорівнює глибині каналу $h = 15\text{ мм}$), при $Re_h = \frac{hV_m}{\nu} \leq 1.5 \cdot 10^4$ (ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості води), призводить до формування профілю швидкості (для течії в'язкої рідини) з умовами прилипання на стінках, але не перешкоджає утворенню циркуляційних зон (Рис. 19, Рис. 20).

Результатами лабораторного моделювання підтверджено існування стійких структур та циркуляційних режимів течії в плоскому криволінійному каналі, геометрично подібних структурам течії в реальній акваторії (рис. 20, а – і). Враховуючі на слабку залежність числа Струхала від числа Рейнольдса ($Sh(Re) \approx \text{const}$, при $Re = \frac{L_m V_m}{\nu} > 150$), спостерігається зміна розташування циркуляційних зон (в каналі з перешкодами) геометрично подібних циркуляційним зонам акваторії протоки, в залежності від змін швидкості.



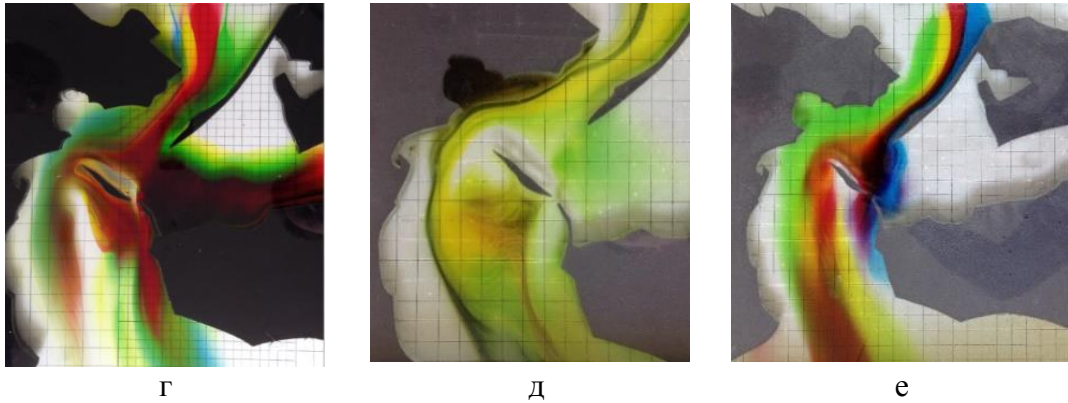


Рис. 20. Результати лабораторного експерименту. Варіанти мінливості циркуляційних течій в плоскому криволінійному каналі з перешкодою, глибини $h = 15 \text{ мм}$ (модель акваторії Керченської протоки).

Експериментальні дослідження плоскопаралельних вихрових в'язких течій в плоскому каналі скінченої глибини зі стінкою складної криволінійної форми (моделі акваторії морської протоки), показали мінливість великомасштабних циркуляційних течій. Також експеримент дозволив виявити в каналі із складними межами та великомасштабними перешкодами зони, в яких виникають течії з високими градієнтами швидкостей. В реальній акваторії подібні умови визначають підсилений вплив на донні ґрунти що призводить до виникнення процесу масопереносу в акваторії. На рис. 20 наведено варіанти мінливих та великомасштабних циркуляційних течій, на виникнення яких впливають кінематичні параметри течії на вході в канал.

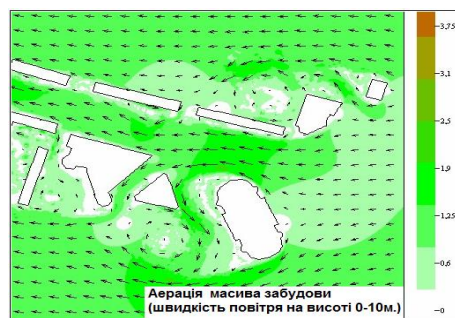
Шостий розділ присвячено комп'ютерному моделюванню динамічних систем та прогнозуванню наслідків аерогідродинамічних процесів.

В розділі наведено результат застосування обчислювальних технологій в моделюючих програмних системах, призначених для проведення попередніх проектних та експертних досліджень в галузях будівельної аеродинаміки, в машинобудуванні, в гідротехніці, в галузі контролю екологічного стану акваторій та для досліджень тривимірних аергідродинамічних явищ та ефектів.

Моделювання аераційних та аеродинамічних процесів на території щільної забудови є складовою частиною передпроектних досліджень (згідно Державних будівельних норм) з виявлення особливостей зазначених процесів, визначення критичних та виявлення небезпечних і небажаних аеродинамічних впливів на конструкції, виявлення наслідків впливів аеродинамічної інтерференції на споруди та прилеглі території.



а) Проект забудови проспекту Перемоги у м. Києві, архітектор С. Бабушкін



в) Виявлення векторних полів швидкості повітря в прилеглому шару, на висоті до 10м.

Рис. 21. Результати дослідження аеродинамічних процесів та впливів на системи будівельних споруд та прилеглі території. Прогнозування аераційних процесів.

Так, аналіз результатів моделювання полів (рис.21.) показав, що розташування висотної споруди в масиві малоповерхової забудови може призводити до небезпечних наслідків – істотної зміни розподілу полі швидкостей та тиску навколо малоповерхових споруд. За підсумками моделювання встановлено динаміку проявлення «ефекту замикання» та реверсним режимам в вентиляційних комунікаціях малоповерхових споруд (рис. 23), що може призвести до раптових «непояснених» вибухів в малоповерхових житлових спорудах, які оснащені індивідуальними системами опалення або газовими колонками та розташовані поблизу висотних споруд та будівель.

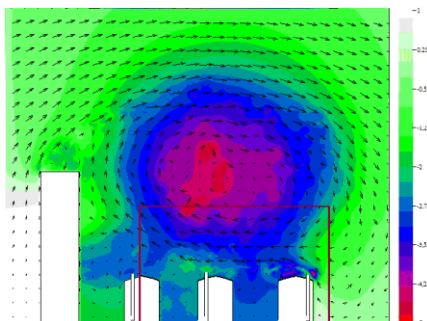


Рис. 22. Вихроутворення навколо висотної споруди – причина змін неоднорідного поля тиску поза межами будівель.

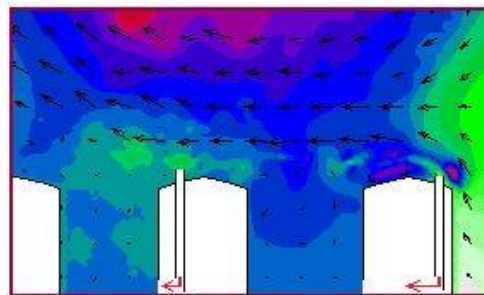


Рис. 23. Виникнення реверсного режиму у системі споруд із природничої витяжної вентиляції.

Структура течій і гідрологічних процесів в акваторіях проток, фіордів, в шельфових зонах зазвичай залежить від характеристик течій на вході, від погодно-кліматичних умов в зоні течії і особливостей берегової лінії. Як відомо, якісні зміни в структуру течії та гідрологічних процесів в акваторії вносяться значними, за геометричним масштабом, змінами вхідних даних (витрат на вході або змін геометрії границь області). Прикладом такого технологічного впливу є спорудження дамби в акваторії Керченської протоки з боку Таманського півострова в 2003р. (рис. 25), яка суттєво змінила характер течії в акваторії.

Особливістю гідрологічних умов Керченської протоки є досить велика швидкість течії (0.4-0.6 м/с), мала глибина (4-8 м) і відносно рівне, пласке дно.

Зазначене дозволяє використовувати спрощені моделі для прогнозування зміни структури течії в акваторії протоки на підставі рішення початково-крайової задачі про течію в неоднорозв'язній області – пласкому каналі зі складними межами. Нижче представлені варіанти зміни структури течії під впливом реальних (рис. 24, рис. 25), і можливих (рис. 26 – 29) інженерних споруд. На малюнках інтенсивність забарвлення позначає інтенсивність течії в акваторії.

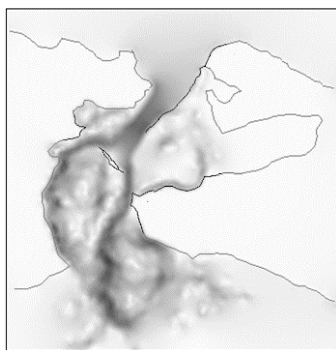


Рис. 24.

Модельна структура домінуючої течії до побудови дамби

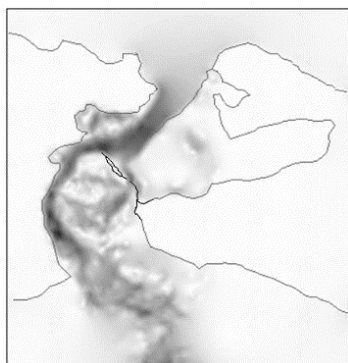


Рис. 25.

Модельна структура домінуючої течії після побудови дамби в 2003р.



Рис. 26.

Варіанти можливих гідротехнічних споруд.

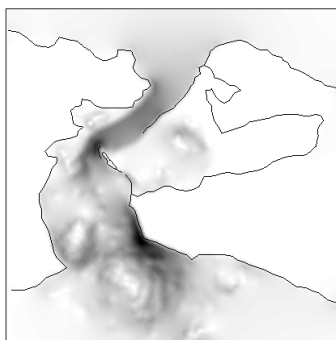


Рис. 27.

Прогноз структури течії для гідротехнічних споруд за варіантом а).

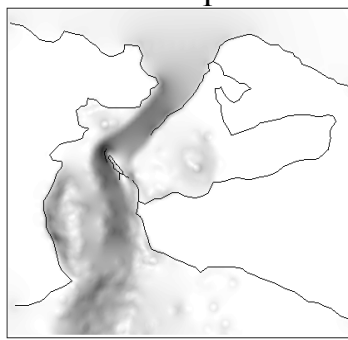


Рис. 28.

Прогноз структури течії для гідротехнічних споруд за варіантом б).

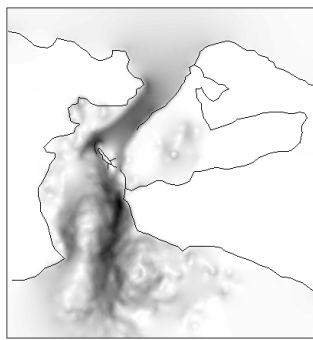


Рис. 29.

Прогноз структури течії для гідротехнічних споруд за варіантом в).

Результати моделювання демонструють (рис. 27 – 29), що навіть реалізація будь-якого з варіантів (рис. 26, а, б, в) – порівняно невеликих берегових гідротехнічних споруд на острові в акваторії, може призвести до глобальної перебудови течії в усій акваторії протоки з виникненням нових зон локального посилення інтенсивності течії. Доцільно зазначити, що структура течії є визначальною для основних гідрологічних процесів в акваторії.

В якості прикладу можливостей швидкого прогнозування поширення можливого локального забруднення в акваторії мілководної Керченської протоки (зі складною береговою лінією, зі зведеною ділянкою дамби біля острова Тузла), розглянуто модельну задачу адвекції виділеної частини рідини в двозв'язній області з кусково-гладкою межею.



Рис. 30.
Космічне фото
Spot11.03.2004.

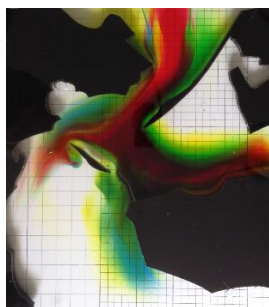


Рис. 31.
Результати
лабораторного
експерименту.

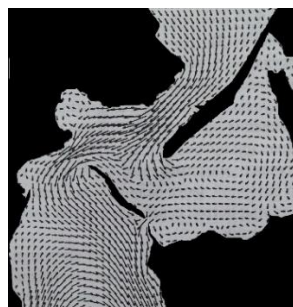


Рис. 32.
Результати
матмоделювання
полів течії в
акваторії.

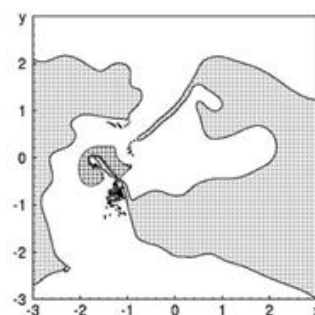


Рис. 33.
Результати
матмоделювання
адвекції
забруднення в
акваторії.

Результати моделювання демонструють, що звадана початковій локації забруднення при відомому полі течії визначає ареал розповсюдження забруднення в акваторії. Так при існуючій структурі течії в акваторії, велика частина виділеної рідини поширюється уздовж південного узбережжя Таманського півострова (рис. 33).

Аварія (11 листопада 2007р.) танкера «Волганефть-139» в Керченській протоці, призвела до екологічної катастрофи, в результаті якої понад 1300 тон сирої нафти вилилося на поверхню моря (рис. 34). Результати швидкого прогнозування із застосуванням адвекційної моделі наведено на рис. 35. При моделюванні враховано вплив вітру та короткотривалі зміни напрямку течії.

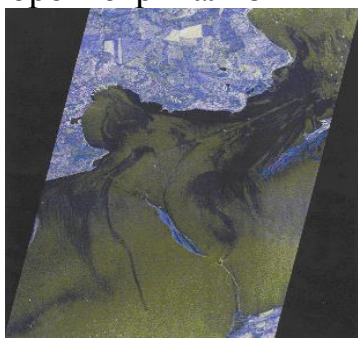


Рис. 34.
Космічне фото (TerraSAR-
X.16.11.2007).

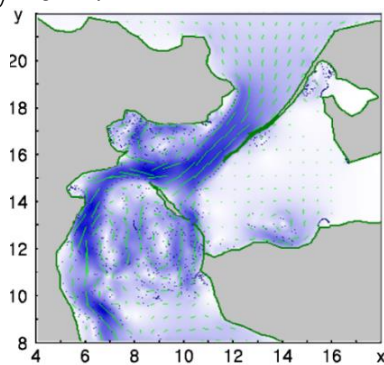


Рис. 35.
Результат прогнозування
розповсюдження забруднень
через 100 годин.

На рис. 36, рис. 37 представлено порівняльний результат тестового прогнозування (моделювання, з врахуванням впливу вітру на масоперенос) адвекції плями забруднення в акваторії Балтійського моря, навколо о. Борнхольм. Пляма забруднення з'явилася на морській поверхні 31 травня 2003 року в результаті зіткнення китайського суховантажу FuShanHai та кіпрського контейнеровоза Gdynia.

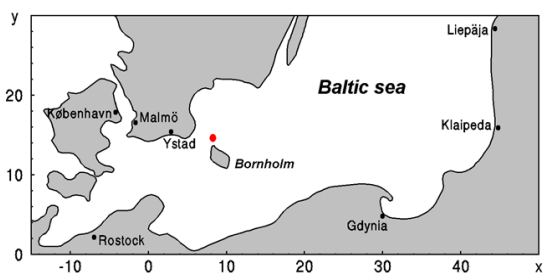
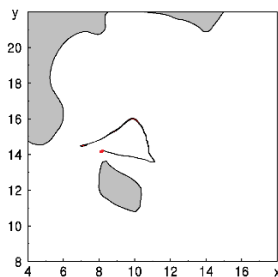
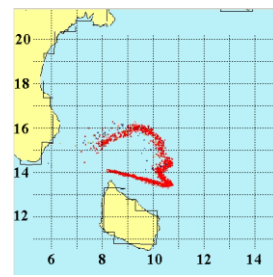


Рис. 36. Місце аварії в акваторії навколо о. Борнгольм позначено червоним маркером.



а)



б)

Рис. 37. Прогнозування масопереносу (плям забруднення) через 46 год., а) результат моделювання адвекції; б) данні КТН Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.

Порівняльний аналіз результатів чисельного моделювання поширення забруднення в водах Дніпровсько-Бузького лиману показує, що вплив навіть помірного за силою вітру призводить до суттєвих змін в розподілу забруднення в акваторії лиману (рис. 38 – 40).

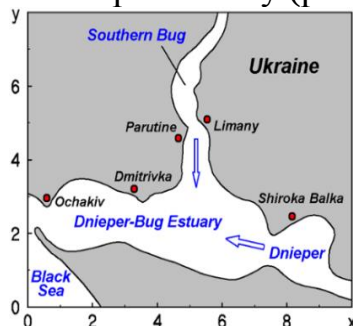


Рис. 38. Схема Дніпровсько-Бузького лиману.

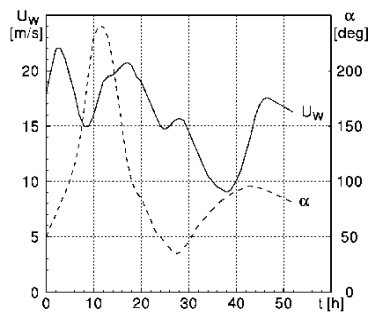


Рис. 39. Прогноз напрямку і сили вітру в Дніпровсько-Бузькому лимані.

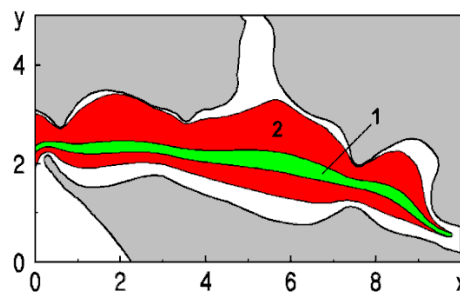


Рис. 40. Прогноз площі забруднення в Дніпровсько-Бузькому лимані при відсутності вітру (1) і з урахуванням вітрового навантаження (2).

Розрахунки задач адвекції (рис. 33, 35, 37, 40) проведено на персональному комп'ютері (AMD Athlon XP 1900+, 1.6 GHz, 2GB) в режимі, що випереджає реальний час. Загальна тривалість обчислювального процесу не перевищила 1 годину.

Моделювання динамічних систем. Застосування нових алгоритмів та обчислювальних технологій надало можливість швидкого моделювання динамічних впливів на систему N рухомих елементів – лопатей вітроротору вертикального типу, визначення миттєвих інтегральних та розподілених аерогідродинамічних характеристик на кожній лопаті, виявлення закономірностей змін інтегральних аерогідродинамічних характеристик ротору в цілому та усереднених моментних

характеристик ротору, в залежності від умов та законів керування орієнтацією системи лопатей на вітророторі.

На рис. 41, 42 представлено результати моделювання кінематичних і динамічних полів течії які впливають на аерогідродинамічні характеристики ротору Дар'є.

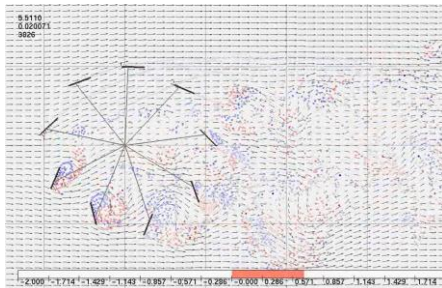


Рис. 41. Поле швидкостей навколо відривної течії ротору з системою керованих лопотів (N=9). Коефіцієнт швидкохідності ротору $\lambda < 1$.

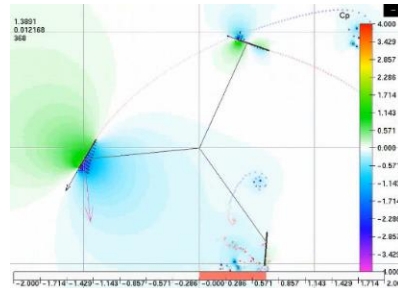


Рис. 42. Розподіл тиску навколо ротору з системою керованих лопотів (N=3). Коефіцієнт швидкохідності ротору $\lambda = 1.5$.

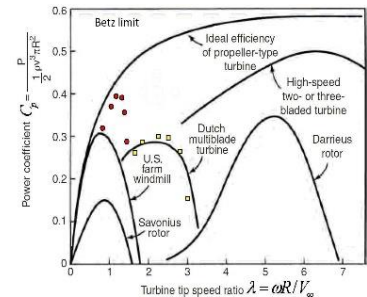


Рис. 43. Порівняння ефективності вітро/гідроенергетичних установок різних типів. $C_p = 0.4$ при $\lambda \approx 1$

Застосування обчислювальних технологій надало можливості проведення моделювання – системного обчислювального експерименту з досліджень кінематичних та аеродинамічних процесів, що забезпечують працездатність механічних вітроенергетичних систем (вітророторів з вертикальною віссю), з метою виявлення режимів їх ефективного функціонування. Дослідження призвели до виявлення умов та режимів підвищення енергоефективності ротору в практично актуальному низькошвидкісному діапазоні його експлуатації (при коефіцієнті швидкохідності ротору $\lambda < 2$). Це надало можливість наблизити коефіцієнт використання енергії вітру, для вітроротору з керованими лопатями, фактично до граничного режиму Бетця-Жуковського ($C_p = 0.4$ при $\lambda \approx 1$). Дослідження призвели до розробки конструкції вітроротору з керованими лопатями, в якій коефіцієнт використання енергії вітру, фактично наближається до теоретично можливих показників (Рис.43.).

Моделювання тривимірних циркуляційних течій. Тривимірні вихорові поверхні, що складаються із системи вихрових трубок здатні забезпечити ортогональні циркуляційні течії в областях, які вони обмежують. При побудові математичних моделей вихрових структур для тривимірних течій необхідно враховувати їх топологічні властивості.

Топологічна структура моделей тривимірних циркуляційних течій ідеальної нестисливої рідини навколо неоднозв'язних меж неоднозв'язної області, за постановкою задачі, повинна задовольняти законам щодо збереження циркуляції та спіральності (42): $\Gamma = \int_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = const$, $J = \sum_{i=1}^M \sum_{j \neq i}^M L_{ij} + \sum_{i=1}^M L_{ii} = const$.

(64)

Умова стійкості вихрових структур полягає в збереженні, при їх безперервному русі та деформуванні, основних топологічних характеристик, до якого відноситься порядок їх зв'язності.

На рис. 44 наведене векторне поле швидкості циркуляційних течій, яке знаходиться поза системою вихрових ліній. Ці лінії розташовані на тривимірній вихровій поверхні у вигляді тору. Наведений приклад з локально ортогональними полями швидкості відповідає тривимірної течії навколо вихрової структури типу смерч/торнадо (рис. 45).

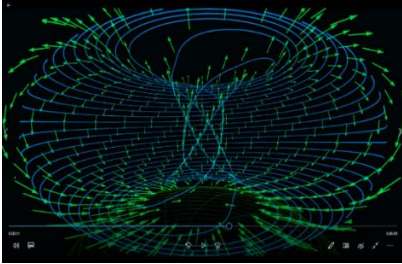


Рис. 44. Поле швидкості циркуляційних течій поза системи вихрових ліній на тривимірній вихровій поверхні, у вигляді тору.



Рис. 45. Тривимірна вихрова структура смерч/торнадо.

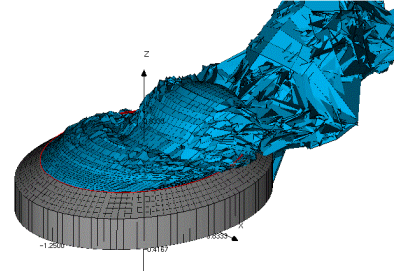


Рис. 46. Моделювання тривимірного вихроутворення навколо великомасштабних споруд.

Моделювання динаміки тривимірної вихрової поверхні у вигляді тору показало, що вихорові поверхні, які складаються із системи вихрових трубок із зачепленнями мають більший запас стійкості у порівнянні із тривимірними вихровими поверхнями, що складаються із системи вихрових трубок із вузлами.

Моделювання відривної течії навколо великомасштабних споруд (моделі частково покритих стадіонів) показало виникнення нестационарних режимів з утворенням періодичних вихорів та низькочастотних пульсацій тиску, що відображено в коливанні вихрової поверхні на рис. 46. Результат моделювання

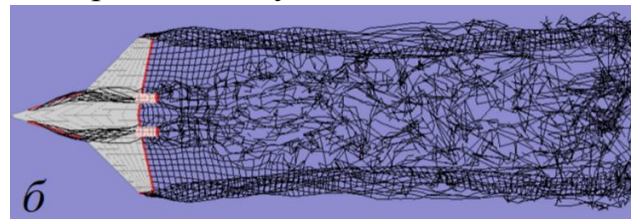
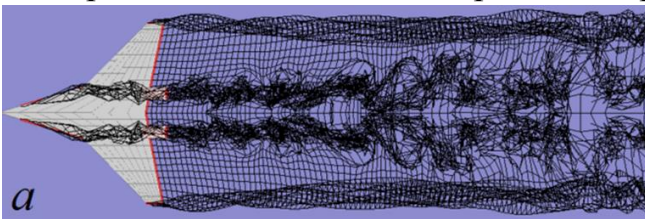


Рис. 47.

Результат моделювання відривної течії, зі швидкістю V навколо плоского крила під кутом атаки 20° . а) швидкість потоку в середині «турбіни» відсутня; б) швидкість потоку в середині «турбіни» дорівнює $10 \cdot V$.

впливу струменів на тривимірні вихрові системи, які породжені несучою поверхнею, представлено на рис. 47. В якості несучої поверхні розглядається пласке крило складної форми, яке знаходиться під кутом атаки в 30° .

З порівняння рис. 47 а) та б) видно, що вплив підсмоктуючої сили та ефект направленої струменю, який утворює працююча модельна «турбіна» (рис. 46, б)

суттєво впливає на стійкість вихрових джгутів над несучою поверхнею – над плоским крилом, яке встановлене під кутом атаки 30^0 . Притискання вихрових структур до несучої поверхні регулює відрив з напливу крила. Струмені від «турбін» частково руйнують вихрову пелену в сліду, але це, фактично, не впливає на торцеві відриви на крилі. В даному випадку розглядалися струмені круглого перерізу. Результат моделювання тривимірних струменевих течій із конфузорів з отворами різної форми у вигляді каталогу наведено на рис. 48.

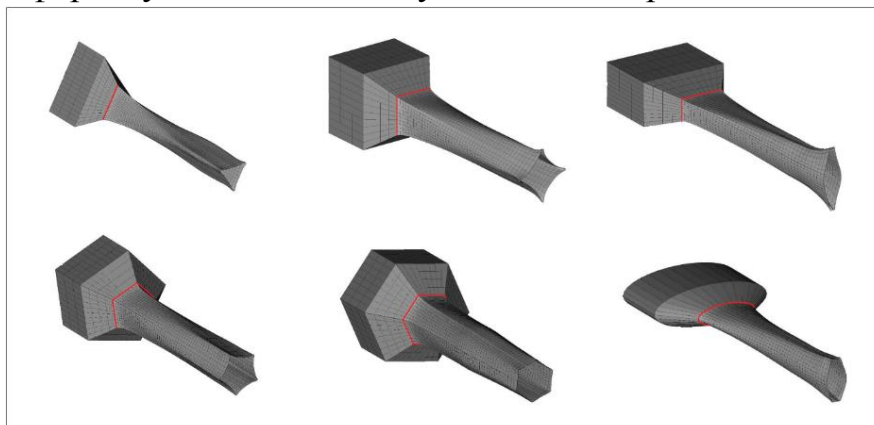


Рис. 48. Результати моделювання інверсії струменів

Можливість виникнення ефекту інверсії для затоплених струменів в середовищах з постійною щільністю визначається вихідними параметрами отвору конфузору. За результатами моделювання виявлено, що виникнення та інтенсивність проявлення інверсії струменю має залежність від нерівномірності швидкості в перерізі отвору конфузору, що є наслідком нерівномірності стискання струменю.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено актуальну комплексну науково-прикладну проблему підвищення ефективності математичного моделювання аерогідродинамічних процесів та систем шляхом створення технологій моделювання, призначених для застосування в комп'ютерних системах прогнозування та керування швидкоплинними процесами в масштабі реального часу.

За результатами досліджень було вирішено наступні завдання:

- Розроблено методологію побудови обчислювальних технологій моделювання, призначених для застосування в комп'ютерних системах прогнозування, інформаційної підтримки прийняття рішень та забезпечення керування швидкоплинними процесами в реальному масштабі часу;
- Розроблено нові математичні моделі швидкоплинних аерогідродинамічних процесів.
- Розроблено методи та алгоритми обчислення кінематичних та динамічних характеристик швидкоплинних аерогідродинамічних процесів в реальному масштабі часу;

- Побудовано обчислювальну технологію моделювання та забезпечення прогнозування аерогідродинамічних процесів в реальному масштабі часу.

В роботі отримано такі нові наукові і практичні результати:

1) Розроблено нову методологію побудови обчислювальних технологій моделювання аерогідродинамічних процесів, призначених для застосування в комп'ютерних системах прогнозування, підтримки прийняття рішень та забезпечення керування швидкоплинними процесами в реальному масштабі часу.

2) Запропоновано новий метод побудови моделей відривних течій з врахуванням впливу в'язких та інерційних сил у шару скінченної товщини навколо перешкод. Із застосуванням теорії потенціалу, в'язкого шару, моделей масопереносу моделей Лагранжа, створено методологію прогнозування забруднень в акваторіях.

3) Розроблено нову математичну модель течії в пласкому каналі скінченної глибини із застосуванням у сингулярних та гіперсингулярних інтегральних представленнях та з врахуванням в'язкості. В моделі течії в шару скінченної товщини використано порівняльний вплив інерційних та в'язких сил, що забезпечує врахування циркуляційних режимів для течій з помірними числами Рейнольдса. Розроблено нові математичні моделі тривимірних течій для дослідження вихрових та струменевих ефектів.

4) Розроблено лабораторний стенд та методологію лабораторних досліджень для тестування адекватності нових моделей нестационарної течії. Стенд призначено для досліджень та моделювання течій в шару з перешкодами та межами довільної форми, між паралельних площин, в діапазоні чисел Рейнольдса $0 \leq Re \leq 1.5 \cdot 10^4$. Лабораторна верифікація моделей підтверджує можливість застосування методу дискретних особливостей на нові класи прикладних задач.

5) Розроблено новий метод та алгоритм перетворення системи дискретних особливостей для відповідних моделей, побудованих на основі сингулярних та гіперсингулярних інтегральних представлень.

6) Представлено новий метод та алгоритм обчислення значень кінематичних характеристик процесу. Розроблено нові методи та алгоритми визначення динамічних характеристик процесу із застосуванням вже існуючого розв'язку кінематичної початково-крайової задачі.

7) Побудовано нову обчислювальну технологію, яка містить моделі, методи і алгоритми перетворення дискретних особливостей та алгоритми швидких обчислень, що надає можливість визначати динамічні параметри процесів та явищ з використанням методу перерахунку вже існуючих розв'язків вихідної задачі.

8) Представлено новий варіант моделі розповсюдження забруднень на водній поверхні, яка базується на Лагранжевому підході до спостереження хаотичної адвекції. В моделі враховано впливи вітру на формування полів течії. Модель призначена для короткотривалого прогнозування та застосовна в системах керування швидкоплинними процесами.

9) Продемонстровано ефективність застосування нових обчислювальних технологій в моделюючих комп'ютерних системах інженерно-технологічного спрямування:

- для проведення передпроектних досліджень у висотному будівництві, для визначення аеродинамічних впливів на конструкції та споруди;
- для проведення передпроектних досліджень в гідротехніці, для визначення гідродинамічних впливів на різноманітні гідротехнічні конструкції та споруди в акваторіях;
- для експрес-прогнозування можливих небезпечних гідроекологічних аварій та катастроф в акваторіях з метою їх попередження та зменшення шкідливих наслідків;
- при проведенні досліджень з виявлення режимів ефективного функціонування нових конструкцій вітро/гідроторів.

10) Розроблено нову математичну модель тривимірної вихрової структури, яка придатна для досліджень метеорологічних явищ типу смерч/торнадо. Досліджено особливості впливу крупномасштабних вихрових структур на споруди та струменевих течій на стійкість вихрових структур поблизу обтічних поверхонь.

11) Досліджено особливості аерації внутрішньої частини приміщень з врахуванням струменевих впливів. Виявлено властивості нової моделі тривимірної вихрової структури та умови виникнення ефекту інверсії струменю для конфузорів із заданою формою отвору. Побудовано каталог інверсії струменю для конфузорів з різною формою отворів.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації

1. Довгий С.А. Метод сингулярних інтегральних уравнений и вычислительные технологии. / Довгий С. А., Лифанов И. К., Черний Д. И. – К.: «Юстон», – 2016. – 380 с.
2. Наконечний О.Г. Моделювання та аналіз глобальних біосферних процесів/ Наконечний О.Г., Трофимчук О. М., Трофимова І. В., Черний Д. І. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2002. – 92 с.
3. Cherniy D. Interaction of Group of Bridge Piers on Scour. /Andrey Voskoboinick, Vladimir Voskoboinick, Vladimir Turick, Oleksandr Voskoboinyk, Dmytro Cherniy, and Lidia Tereshchenko/In book: Advances in Computer Science for Engineering and Education III, Volume 1247, Springer Nature Switzerland AG, ISSN 2194-5357 ISSN 2194-5365 (electronic) Advances in Intelligent Systems and Computing ISBN 978-3-030-55505-4 ISBN 978-3-030-55506-1 (eBook), pp.3-17., DOI: 10.1007/978-3-030-55506-1_1, <https://doi.org/10.1007/978-3-030-55506-1>, <http://www.springer.com/series/11156> (Входить до наукометричної бази **Scopus**).
4. Dovgiy S. O. Algorithms of the Discrete Singularity Method for Computing Technologies/ Dovgiy S. O., Lyashko S. I., Cherniy D. I. // Cybernetics and Systems Analysis. – 2017. – Vol. 53, 6. – P. 950-962. <https://doi.org/10.1007/s10559-017-9997-4> (Входить до наукометричної бази **Scopus**).
5. Kordas O. A study on mathematical short-term modelling of environmental

pollutant transport by sea currents: The Lagrangian approach / O. Kordas, A. Gourjii, E. Nikiforovich, D. Cherniy // Journal of Environmental Accounting and Management. – 2017. – Vol. 5, Issue 2. – P. 87-104. (*Входить до наукометричної бази Scopus*).

6. Cherniy D. An algorithm for finding similar objects in an image / Dmytro I. Cherniy, Yaroslav M. Linder, Volodymyr T. Matvienko, Volodymyr V. Pichkur // 2019 IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory. Conference Proceedings (IEEE ATIT 2019, 18.12.2019 – 20.12.2019, Kyiv, Ukraine). – Kyiv, 2019. – P. 365 – 368. (*Входить до наукометричної бази Scopus*).

7. Voskoboinick V. A. The Modeling of Different Scale Hydrologic Processes in Aquatories / V.A. Voskoboinick, O. A. Voskoboinyk, D. I. Cherniy // J. Enviromental safety and natural resources. – 2019. – Vol. 29. – P. 87-97.

8. Черній Д.І. Метод побудови математичної моделі шаруватих течій // Екологічна безпека та природокористування, № 1 (33), 2020.- сс.115-130. (Cherniy D.I. Method of building a mathematical model of layered flows //J.Enviromental safety and natural resources.- №1(V.33), 2020.-pp.115-130.) <http://es-journal.in.ua/>.

9. Головенко А. Д. Вычислительные особенности нестационарных аэродинамических задач / Головенко А. Д., Голубев С. А., Черний Д. И. // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2011. – Вип. 1(104). – С. 24-39.

10. Войцеховський С. О. Моделювання динаміки торнадо / Войцеховський С. О., Гаркуша В. І., Черній Д. І. // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2004. – Вип. 2(91). – С. 81.

11. Гуржий А. А. Адаптированный метод дискретных особенностей к задаче адвекции пассивной примеси морскими течениями / Гуржий А. А., Черний Д. И. // Прикладная гидромеханика. – 2009. –Т. 11(83), №2. – С. 30-39.

12. Черній Д. І. Про похідні для інтегральних представлень / Черній Д.І. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. –2016. – Вип. 3. – С. 111-116. <https://doi.org/10.17721/1812-5409>.

13. Вітько В. П. Чисельне моделювання еколого-аераційної ситуації в масивах висотної міської забудови / Вітько В. П., Кондратенко О. В., Черній Д. І. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2002. – Вип. 2. – С. 272-277 <https://doi.org/10.17721/1812-5409>.

14. Войцеховський С. О. До задачі про динаміку торнадо / Войцеховський С. О., Гаркуша В. І., Черній Д. І. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2004. – Вип. 2. – С. 378-381. <https://doi.org/10.17721/1812-5409>.

15. Войцеховський С. О. Математична та інформаційна модель гідрологічних процесів / Войцеховський С. О., Гаркуша В. І., Витько В. П., Кондратенко О. В., Рябоконенко О. Д., Хорошилов О. В., Черній Д. І. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2004. – Вип. 4. – С. 276-282. <https://doi.org/10.17721/1812-5409>.

16. Зайцев О. В. Метод розв'язання прямої та оберненої крайових задач про невісесиметричне обтікання конічних тіл зі вдувом / Зайцев О. В., Хорошилов О. В., Черній Д. І.// Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Серія математика-механіка. – 2004. – Вип. 14. – С. 176-184.

17. Риженко А. І. Обґрунтування методу сіток для параболічних варіаційних нерівностей другого порядку з обмеженням у середині області / Риженко А. І., Саженьок В. С., Черний Д. І. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2006. – Вип. 3. – С. 245-249. <https://doi.org/10.17721/1812-5409>.

18. Мищенко В. В. Чисельне моделювання процесу шунтирування у плазмі / Мищенко В. В., Сандраков Г. В., Черний Д. І. // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2006. – Вип. 3. – С. 235-239. <https://doi.org/10.17721/1812-5409>.

19. Гуржий А. А. Решение задачи о двухмерной адвекции пассивной примеси морскими течениями прогностическим методом / Гуржий А. А., Черний Д. И. // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2009. – Вип. 12. – С. 83-91.

20. Головенко А. Д. Моделирование аэродинамических полей при прогнозировании нестационарных аэрационных процессов в массивах разновысотной застройки / Головенко А. Д., Довгий С. А., Клименкова И. А., Черний Д. И. // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2010. – Вип. 13. – С. 37-46.

21. Гуржий А. А. Перемешивание пассивной жидкости в двумерных течениях со сложной геометрией ограничивающих поверхностей / Гуржий А. А., Кобзева Д. А., Черний Д. И. // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2011. – Вип. 14. – С. 112-119.

22. Черний Д. И. Математическая модель течения в мелководной акватории / Черний Д. И. // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2016. – Вип. 29. – С. 78-86.

23. Черний Д. И. Вычислительные технологии для метода дискретных особенностей в гидродинамике / Черний Д. И. // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2016. – Вип. 32. – С. 75-83.

24. Черний Д. И. Вычислительные технологии для метода дискретных вихрей / Черний Д. И. // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – 2016. – № 6 (1178). – С. 116-123.

25. Гуржий А. А. Применение метода дискретных особенностей при составлении краткосрочного прогноза распространения загрязнений на морской поверхности / А. А. Гуржий, О. И. Кордас, Е. И. Никифорович, Д. И. Черний // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – 2019. – № 8 (1333). – С. 104-109.

26. Довгий С. А. Математическое моделирование пространственных струйных эффектов/ Довгий С. А., Фломбойм А. В., Черний Д. И. // Комп'ютерна математика. – 2016. – №1. – С. 27-35.

27. Васин П. А. Моделирование трехмерной вихревой структуры / Васин П. А., Черний Д. И. // Комп'ютерна математика. – 2018. – №1. – С. 9-16.

28. Голубев С. О. Засоби комп'ютерного моделювання в галузі обчислювальної гідродинаміки / Голубев С. О., Лебідь О. Г., Черний Д. І. // Математичне моделювання в економіці. – 2019. – №2. – С. 21-39.

Опубліковані праці апробаційного характеру

29. Cherniy D.I. Topological aspects of the tornado problem / Cherniy D. I., Meleshko V. V., Dovgiy S. O. // 21-st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Abstract Book (August 15-21, 2004, Warsaw, Poland). – Warsaw, 2004. – P. 176.

30. Sandrakov G.V. Modeling of complex fluid dynamics with phase transitions / Sandrakov G. V., Cherniy D. I., Meleshko V. V. // Fluid Mechanics Conference. Abstracts. Volume 2 (EFMC6 KTH-EUROMECH, Royal Institute of Technology, Stockholm, June 26-30). – Stockholm, 2006. – P. 330. URL: http://www2.mech.kth.se/efmc6/web_vol1.pdf

31. Cherniy D. I. Topological Aspects of the Vortex Structure of Tornado / Cherniy D. I., Meleshko V. V., Dovgiy S. A. // IUTAM-Symposium «Hamiltonian dynamics. Vortex structure. Turbulence». Book of Abstracts (Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow, August 25-30, 2006). – Moscow, 2006. – P. 69-71.

32. Черний Д.И. О проблемах определения локальных и интегральных характеристик при решении начально-краевых задач с подвижными границами / Черний Д.И. // Сборник научных трудов XIII Международного симпозиума МДОЗМФ-2007. – Херсон, 2007, С.315-318.

33. Черний Д. И. Метод и алгоритм вычисления распределенных характеристик в начально-краевых гидродинамических задачах с подвижными границами при использовании МДО / Черний Д. И. // Сборник научных трудов XIII Международного симпозиума МДОЗМФ-2007. – Херсон, 2007, С.319-322.

34. Cherniy D. I. The vortex model of circulation flow in sea channel / Cherniy D. I. // IUTAM Symposium «150 Year of Vortex Dynamics». Proceedings (Technical University of Denmark, Oktober 12-16, 2008). – Copenhagen: Springer, 2008. – P. 5.

35. Фломбойм А. В. Вычислительные технологии моделирования эффекта «кроссовера» для затопленных струй / Фломбойм А. В., Черний Д. И. // III Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика», присвячена пам'яті академіка НАН України І. І. Ляшка. Матеріали конференції (Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 11-12 вересня 2009 р.). – Київ, 2009. – С. 67.

36. Cherniy D. Numerical simulation of impurity propagation in sea channels / D. Cherniy, S. Dovgiy, A. Gourjii // Bulletin of the American Physical Society. 62-nd Annual Meeting of the APS division of Fluid Dynamics (Minneapolis, Minnesota, USA, November 22-24, 2009). – Vol. 54, 19. – P. 149. URL: <http://meetings.aps.org/Meeting/DFD09/Session/HT.10>.

37. Meleshko V. V. The circulation model of vortex flow of a viscid wall layer / Vyacheslav V. Meleshko, Dmytro I. Cherniy, Stanislav A. Dovgiy // 3rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. Abstract Book (23-rd ICTAM 2012, Beijing, China, August 19-24, 2012). – Beijing, 2012. – P. 101.
38. Okhremenko A. E. Mobile systems for forecasting and decision support information / Okhremenko A. E., Stepanov O. V., Cherniy D. I. // XX International Conference «Problems of Decision Making Under Uncertainties». Abstracts (PDMU-2012, September 17-21, 2012, Brno, Czech Republic). – Kyiv, 2012. – P. 94-96.
39. Cherniy D. The Vortex Model of a Viscid Wall's Layer / Cherniy D., Dovgiy S., Meleshko V. // IUTAM Symposium on "Vortex Dynamics: Formations, Structure and Function". Abstract Book (March 10-14, 2013, Centennial Hall, Kyushu University School of Medicine, Fukuoka, Japan). – 2013. – P. 126-127.
40. Cherniy D. One of Partial Solutions of the Navier-Stokes / Cherniy D. // XXIV International Conference «Problems of Decision Making under Uncertainties». Abstracts (PDMU-2014, September 1-5, 2014, Cesky Rudoles, Czech Republic). – Kyiv, 2014. – P. 29-30.
41. Cherniy D. One Case of the Analytical Solution of the Navier-Stokes Equation/ Cherniy D. // XVII International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation". Abstracts of Conference Reports (DSMSI-2015, May 27-29, 2015, Kiev, Ukraine). – Kyiv, 2015. – P. 87.
42. Cherniy D. Computing technologies of the discrete singularities method/ Cherniy D. // XXVII International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties". Abstracts (PDMU-2016, May 23-27, 2016, Tbilisi-Batumi, Georgia). – Kyiv, 2016. – P. 35-36.
43. Cherniy D. On a Model of Viscous Flow/ Cherniy D. // XXVIII International Conference «Problems of Decision Making under Uncertainties». Abstracts (PDMU-2016, August 25-30, 2016, Brno, Czech Republic). – Kyiv, 2016. – P. 132-133.
44. Cherniy D. The Transformation to Discrete Singularities/ Cherniy D. // XXIX International Conference «Problems of Decision Making under Uncertainties». Abstracts (PDMU-2017, May 10-13, 2017, Mukachevo, Ukraine). – Kyiv, 2016. – P. 30–31.
45. Гуржий А. А. Моделирование распространения загрязнения на морской поверхности / Гуржий А. А., Никифорович Е. И., Кордас О. И., Черний Д. И. // V Міжнародна науково-практична конференція «Комп'ютерна гідромеханіка». (Інститут гідромеханіки НАН України, 29-30 вересня 2016, Київ). – Київ, 2016. – С. 25-26.
46. Черний Д. И. Экспериментальное и математическое моделирование слоистых течений в плоском канале / Черний Д. И., Воскобойник А. А., Воскобойник В. А. // V Міжнародна науково-практична конференція «Комп'ютерна гідромеханіка». (Інститут гідромеханіки НАН України, 29-30 вересня 2016, Київ). – Київ, 2016. – С. 68-69.
47. Cherniy D. The Transformation to Discrete Singularities / Cherniy D. // XXX International Conference «Problems of Decision Making under Uncertainties» dedicated to 80-th anniversary of Professor Yurii Yermoliev. Abstracts (PDMU-2017, August, 14-19, 2017, Vilnius, Lithuania). – Kyiv, 2017. – P. 32-33.

48. Cherniy D. Transformation of discrete singularities in the numerical method for singular equations / Cherniy D., Dovgiy S. // International Conference «Ukrainian Conference on Applied mathematics» dedicated to the 100th birth anniversary of professor Olexander Kostovskiy. Proceeding (UCAM-2017, 28-30, September, 2017, Lviv, Ukraine). – Lviv: PAIS, 2017. – P. 31-33.

49. Черний Д. І. Моделирование течений в акватории Керченского пролива / Черний Д. І., Довгий С. А. // Колективна монографія за матеріалами 16-ї Міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні інформаційні технології управління екологічною безпекою, природокористуванням, заходами в надзвичайних ситуаціях» (Київ, Пуща-Водиця, 3-6 жовтня 2017р.). – Київ: «Юстон», 2017. – С. 18-21.

50. Довгий С. А. Алгоритмы метода дискретных особенностей и вычислительные технологии / Довгий С. А., Черний Д. І. // Труды XVIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2017, 26-28 июня 2017, Харьков, Украина). – Харьков, 2017. – С. 86-91.

51. Гуржий А. А. Адаптация метода дискретных особенностей к задачам переноса поверхностных загрязнений морскими течениями / Гуржий А. А., Черний Д. І., Процан В. В. // Труды XVIII Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2017, 26-28 июня 2017, Харьков, Украина). – Харьков, 2017. – С. 82-85.

52. Cherniy D. Development Wake Behind of a Moving Grid and Computational Technologies / Cherniy D., Dovgiy S. // the 7th Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations. Proceedings (BBVIV-7, Carry-le-Rouet (Marseille), France, 3-6 July, 2018). – P. 79-80.

53. Golubiev S. The Structure of a Vortex Wake Behind Vertical Wind Turbines as a Criterion for the Efficiency / Golubiev S., Dovgiy S., Lebid O., Cherniy D. // the 7th Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations. Proceedings (BBVIV-7, Carry-le-Rouet (Marseille), France, 3-6 July, 2018). – P. 163-165.

54. Cherniy D. Methods of geodynamic processes simulation as a means of forecasting in decision support systems / Cherniy D., Trofymchuk O. // XXXI International Conference «Problems of Decision Making under Uncertainties». Abstracts (PDMU-2018, 3-6 July 2018, Baku-Lenkoran, Azerbaijan). – Kyiv, 2018. – P. 79-80.

55. Гаркуша В. І. Квадратурно-різницеві схеми для задачі Коші з гіперсингулярним інтегралом в правій частині / Гаркуша В. І., Ляшко С. І., Риженко А. І., Черний Д. І. // VIII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта». Тези доповідей (Луцьк-Світязь, 2-4 червня, 2019). – Луцьк, 2019. – С. 19.

56. Гуржий А. А. Моделирование особенностей процесса распространения поверхностных загрязнений в речных системах / Гуржий А. А., Кордас О. И., Никифорович Е. И., Осадчий В. И., Черний Д. І. // V International Scientific Conference «Modern Problems of Mechanics». Abstracts (28-30.08.2019, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Abstracts, Kyiv, Ukraine). – Kyiv, 2019. – P. 28.

57. Довгий С. О. Метод дискретних особливостей в задачах математичної фізики

і механіки / Довгий С. О., Черній Д. І. // V International Scientific Conference «Modern Problems of Mechanics». Abstracts (28-30.08.2019, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Department of Theoretical and Applied Mechanics, Abstracts, Kyiv, Ukraine). – Kyiv, 2019. – P. 32.

58. Cherniy D. Numerical methods for the Cauchy problem with hypersingular integral on the right side. / Cherniy D., Voloshchuk S. // XXXV International Conference “Problems of Decision Making under Uncertainties”. Abstracts (PDMU-2020, 11-15 May 2018, Baku-Sheki, Azerbaijan). – Kyiv, 2020. – P. 30-31.

Праці, які додатково відображають наукові результати дисертації

59. Черній Д. І. Програмна система для дослідження аерогідродинамічних процесів/ Черній Д. І., Гаркуша В. І., Рижинко А. І., Кашпур О. Ф. Наукові розробки Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Частина 1. Природничі науки. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2009. – С. 137.

АНОТАЦІЯ

Черній Д.І. Методологія та обчислювальні технології моделювання аерогідродинамічних процесів. – На правах рукопису.

Дисертації на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – «Математичне моделювання та обчислювальні методи». – Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, 2021.

У дисертаційній роботі вирішено актуальну науково-прикладну проблему підвищення ефективності математичного моделювання аерогідродинамічних процесів та систем шляхом урахування їх особливостей і спеціальних властивостей, створення технологій моделювання, придатних для застосування в комп'ютерних системах прогнозування та керування швидкоплинними процесами в реальному масштабі часу. Досягнення ефективності моделювання відбувається за рахунок методології побудови моделей, що враховують основні домінуючі фактори явищ та процесів, із застосуванням методу сингулярних інтегральних рівнянь, використання удосконалених дискретизованих моделей, нових методів, обчислювальних алгоритмів та технологій, придатних для застосування в системах прогнозування та забезпечення підтримки прийняття рішень.

На основі методу сингулярних інтегральних рівнянь побудовані нові дискретизовані моделі динамічних процесів, та дискретизовані моделі масопереносу, що базуються на принципах Лагранжа. Разом з використанням нових підходів та обчислювальних алгоритмів, були створені обчислювальні технології, що призначені для застосовування в комп'ютерних системах прогнозування та керування швидкоплинними процесами.

Створено лабораторний стенд та методологію лабораторних досліджень нових моделей нестационарних, циркуляційних течій в плоскому криволінійному каналі з перешкодами в діапазоні чисел Рейнольдса $0 \leq Re \leq 1.5 \cdot 10^4$. Лабораторна верифікація моделей надає можливість поширення застосування методу дискретних особливостей на нові класи прикладних задач.

Розроблено новий метод та алгоритми перетворення системи дискретних особливостей для коректного обчислення значень дискретизованих інтегральних представлень з сингулярними підінтегральними функціями.

Створено нові обчислювальні технології обрахунку локальних і розподілених кінематичних та динамічних характеристик течії з врахуванням деформації меж області та відривних структур. Також були розроблені дискретизовані моделі масопереносу та адвекції, які базуються на принципах Лагранжа. Розроблені обчислювальні технології призначені для застосування в моделюючих комп'ютерних системах інженерно-технологічного спрямування (проектно-конструкторських, інформаційно-аналітичних, підтримки прийняття рішень, забезпечення керування швидкоплинними процесами).

Ключові слова: обчислювальні технології, метод сингулярних інтегральних рівнянь, дискретні особливості, моделювання аерогідродинамічних процесів.

SUMMARY

Cherniy D.I. Methodology and computational technologies for modeling aerohydrodynamic process. – Manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences in the specialty 01.05.02 – "Mathematical modeling and computational methods." – Institute of Telecommunications and Global Information Space NAS of Ukraine, Kyiv, 2021.

In the dissertation work, the actual scientific and applied problem of increasing the efficiency of mathematical and computer modeling in forecasting systems and providing real-time control of fast-flowing processes is solved. Increasing the efficiency of modeling is achieved through the methodology of constructing models based on singular integrals, which take into account only the main dominant factors of phenomena and processes, through the use of improved discretized models, new methods, computational algorithms and computational technologies suitable for use in predictive systems and in decision support systems in real time.

The use of the method of singular integral equations for constructing models of dynamic processes, constructing discretized models of mass transfer, based on Lagrangian principles of observation and adapted for use with computational algorithms, makes it possible to create effective computational technologies intended for use in computer systems for forecasting and controlling fast-flowing processes in real time.

A laboratory stand and a methodology for laboratory studies of unsteady circulation flows in a plane curved channel with obstacles in the range of Reynolds numbers have been developed $0 \leq Re \leq 1.5 \cdot 10^4$. Laboratory verification of models makes it possible to extend the applicability of the discrete singularity method to new classes of applied problems.

A new method and algorithms for transforming a system of discrete singularities have been developed for the correct calculation of values of discretized integral representations with singular integrand functions.

New computational technologies have been created, in which methods and algorithms for transforming a system of discrete features are applicable, a method and algorithms for calculating local and distributed dynamic characteristics and actions, at arbitrary points of the flow region, in which the deformation and motion of the boundaries of the region are taken into account, together with separation phenomena, as well as discretized models of mass transfer and advection based on Lagrangian observation principles. Computing technologies are intended for use in modeling computer systems of engineering and technological specialization (design, information and analytical systems for decision support and control of fast-flowing processes):

- to carry out pre-design studies in high-rise construction, to determine aerodynamic effects on structures and structures, to identify manifestations of aerodynamic interference, to zonate territories according to the level of comfort;
- to carry out pre-design studies in hydraulic engineering, to determine the hydrodynamic effects on hydraulic structures and structures in sea areas, to identify areas with increased intensity of hydrological processes;
- for systems for predicting hazardous hydroecological consequences of possible accidents and disasters in sea water areas and water areas of straits, in order to ensure real-time control of emergency response and threat prevention means;
- when conducting research to identify modes of effective functioning of new designs of rotors in wind / hydropower.

A new mathematical model of a three-dimensional vortex structure has been developed, which has its own topological characteristics – nodes and links that affect its stability. The model is suitable for investigating meteorological phenomena such as tornado / tornado. Using the method of computer simulation, the emergence of the effect of the inversion of the jet, which flows from the confuser with a given shape of the hole, is revealed. The conditions for the occurrence of inversion in jets are determined. A catalog of jet inversion for confusers has been created, with a set of holes of arbitrary shape.

Keywords: computational technologies, method of singular integral equations, discrete singularitys, modeling of aerohydrodynamic processes.

Надруковано в ТОВ «Видавництво «Юстон»
03113, м. Київ, проспект Перемоги, 62-Б, офіс 2

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців
ДК № 4973 від 09.09.2015 р.
<http://www.yuston.com.ua>

Підписано і здано до друку « » . 2021. Формат 60X84 1/16.

Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Офсетний друк.

Умовн. друк. арк. 1,4. Обл.-вид. арк. 1,1

Тираж 100.

Замовлення №

КИЇВ 2021