Дослідження схеми симплектичного інтегрування при моделюванні руху дискретних вихорів

Довгий С.О.[1], Буланчук П.О. [2], Буланчук О.М.[3], Буланчук Г.Г.[4]
[1]Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України
[2]Університет штату Пенсильванія
[3]НЦ "Мала академія наук України"
4ДВНЗ "Приазовський державний технічний університет
[2]pavlo.o.bulanchuk@gmail.com
[3]obulan65@gmail.com, [4]ggbulan7@gmail.com,

При моделюванні довгострокової еволюції системи вихорів важливо використовувати схеми інтегрування, що зберігають інтеграли руху (Гамільтоніан системи). У даній роботі досліджувався симплектичний метод інтегрування [1-3] , при якому зберігається фазовий об'єм.

Гідродинамічна система моделюється множиною із N точкових вихорів з координатами $\left(\dot{x}_i, \dot{y}_i\right)$ (сукупність всіх координат називається фазовим простором). Систему руху точкових вихорів можна записати в Гамільтоновій формі:

$$\begin{aligned} k_i \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ k_i \dot{y}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{aligned}, \tag{1}$$

де Гамильтоніан

$$H = H\left(x_i, y_i\right) = -\sum_{i<j} k_i k_j \ln r_{ij} \tag{2}$$

Для проведення симплектичного інтегрування зазвичай систему рівнянь руху намагаються представити в такій формі, щоб похідна $\dot{x}_i$ не залежала від x_i . У методі Тао [4] для вирішення цієї проблеми проводиться подвоєння фазового простору до $\left(x_i, y_i, X_i, Y_i\right)$. Гамільтоніан нової системи вибирається таким чином:

$$H_{new}\left(x_i, y_i\right) = H\left(x_i, Y_i\right) + H\left(X_i, y_i\right) + \frac{\omega}{2} H_C \tag{4}$$

Де $H_C = \sum_i \left(X_i - x_i\right)^2 + \left(Y_i - x_i\right)^2$ – допоміжний Гамільтоніан, мета якого “наближати” траєкторії $\left(x_i, y_i\right)$ до $\left(X_i, Y_i\right)$. Параметр $\omega > 0$ калібрує “силу притягування” між траєкторіями. Даний вибір Гамільтоніана відповідає наступним рівнянням руху:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \partial_{y_i} H \\ \dot{y}_i = -\partial_{x_i} H \\ \dot{X}_i = \partial_{Y_i} H \\ \dot{Y}_i = -\partial_{X_i} H \end{cases} \tag{3}$$

Розв’язки системи (1) $\left(x_i\left(t\right), y_i\left(t\right)\right)$ також будуть розв’язками системи (3) якщо взяти $X_i\left(t\right) = x_i, Y_i\left(t\right) = y_i$, але тепер в системі (3) похідні від змінних по часу не залежать напряму від самих змінних, що дозволяє застосувати стандартні методи симплектичного інтегрування. Покрокова ітераційна схема другого порядку для еволюції рівняння (5) на відрізок часу δ складається із п’яти кроків:

$$\phi_\delta^2 := \phi_{H_A}^{\delta/2} \circ \phi_{H_B}^{\delta/2} \circ \phi_{\omega H_C}^{\delta} \circ \phi_{H_B}^{\delta/2} \circ \phi_{H_A}^{\delta/2}$$

У даному запису виконання операцій відбувається справа наліво (в наступних формулах мається на увазі індекс i в усіх відповідних змінних):

$$\phi_{н_A}^{\delta}:\begin{bmatrix} x \\ y \\ X \\ Y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x+\delta\partial_y H(X,y) \\ y \\ X \\ Y-\delta\partial_X H(X,y) \end{bmatrix},\ \phi_{н_B}^{\delta}:\begin{bmatrix} x \\ y \\ X \\ Y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y-\delta\partial_X H(x,Y) \\ X+\delta\partial_Y H(x,Y) \\ Y \end{bmatrix}$$

$$\phi_{\omega н_c}^{\delta}:\begin{bmatrix} x \\ y \\ X \\ Y \end{bmatrix} \to \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} x+Y \\ y+Y \end{pmatrix} - R(\delta)\begin{pmatrix} X-x \\ Y-y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x+X \\ y+Y \end{pmatrix} + R(\delta)\begin{pmatrix} X-x \\ Y-y \end{pmatrix} \end{bmatrix},$$

Де $R(\delta) := \begin{bmatrix} \cos(2\omega\delta) & \sin(2\omega\delta) \\ -\sin(2\omega\delta) & \cos(2\omega\delta) \end{bmatrix}$

Розглядалися два методи інтегрування рівнянь руху вихорів: метод Рунге - Кути другого порядку і симплектичний метод другого порядку. Коректність результатів визначалась шляхом порівняння з розрахунками методом Рунге-Кути четвертого порядку

Список використаних джерел

1. К. Фен, Про симплектичну геометрію// Матеріали Пекінського симпозіуму 1984р., Диференціальна геометрія та диференціальні рівняння-Розрахунок диференціальних рівнянь у частинних похідних (ред. К. Фенг), Science Press, Пекін, 1985, - С. 42-58.
2. К. Фенг та М.З. Кін, Симплектичні методи обчислення гамільтонових рівнянь, 1987, - С. l-37.
3. І. Пуллін, П.Г. Саффман, Довгочасне симплектичне інтегрування: Приклад чотиривихрового руху, 1991, - 481- 494 с.
4. Molei Tao Explicit symplectic approximation of nonseparable Hamiltonians: Algorithm and long time performance//Physical Review E, 94(4). doi:10.1103/physreve.94.043303 – 2016.